

特殊相対論入門

前野昌弘

平成17年3月14日

目次

第 1 章	はじめに—なぜ相対論が必要なのか？	1
1.1	「相対論的」考え方	1
1.2	電磁気学での「絶対空間」	3
第 2 章	座標系の変換と運動方程式	5
2.1	座標系と次元	5
2.2	1次元空間の座標変換	6
2.3	速度、加速度のガリレイ変換と運動方程式の不変性	7
2.4	2次元の直線座標の間の変換	9
2.5	運動方程式を不変にする3次元の座標変換	12
2.6	絶対空間に対するマッハの批判	12
2.7	この章で考えた座標変換と、「慣性系」の定義	13
2.8	光の伝搬とガリレイ変換	14
第 3 章	電磁気学の相対性	15
3.1	電磁波に関する疑問	15
3.2	マックスウェル方程式をガリレイ変換すると？	16
3.3	マイケルソン・モーレーの実験	19
3.4	ローレンツ短縮	21
3.5	現代における光速度不変	22
第 4 章	光速度不変から導かれること	25
4.1	同時の相対性	25
4.2	ウラシマ効果	27
4.3	(新しい意味での)ローレンツ短縮	29
4.4	ドップラー効果	30
第 5 章	ローレンツ変換と4次元時空	35
5.1	ローレンツ変換の数式による導出	35
5.2	行列およびテンソル式で書くローレンツ変換	37
5.3	ミンコフスキー計量	39
5.4	世界線の長さとは固有時	41
5.5	4元ベクトルの前に：3次元ベクトルの回転の復習	42
5.6	4元ベクトル	43
第 6 章	パラドックス	45
6.1	双子のパラドックス	45
6.2	2台のロケットのパラドックス	47
6.3	ガレージのパラドックス	49

第7章 相対論的力学	51
7.1 ニュートン力学を相対論的に再構成する	51
7.2 4元速度	52
7.3 速度の合成	52
7.4 4元加速度、4元運動量と4元力	54
7.5 質量の増大?	56
7.6 運動量・エネルギーの保存則	58
7.7 質量とエネルギーが等価なこと	59

第1章 はじめに—なぜ相対論が必要なのか？

授業の始めに、この授業でどんなことをやるのか、どうしてそんなことを勉強しなくてはいけないのか、という点について、ざっと述べておく。

1.1 「相対論的」考え方

この授業の内容は名前の通り「相対論」である。相対論には特殊相対論と一般相対論があるが、ここで扱うのは特殊相対論の方である。「特殊」とつくから難しいと思ってはいけない。たいてい物理では「一般」とつくものの方が難しい。「一般」なものは解くのが難しいので、問題を「特殊」なものに限定して解きやすくするのは、物理の常套手段である。相対論の場合も同様で、特殊相対論の方が圧倒的に簡単である。

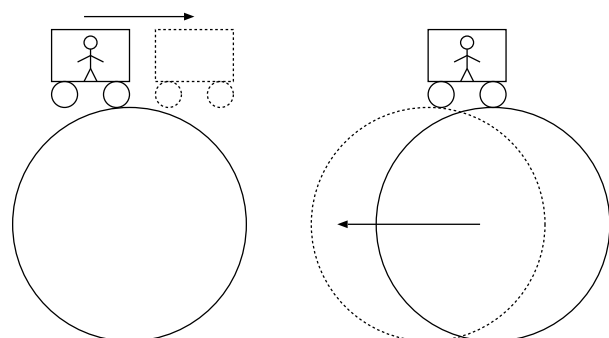
「相対論」というのはどのような学問なのか。「相対」の反対は「絶対」である。相対論は「絶対」の否定として生まれた。この場合の絶対とは、ニュートンの言う「絶対空間」「絶対時間」の「絶対」である。ニュートンはニュートン力学を作るとき、宇宙には基準となる座標系が存在していると考えて、それを絶対空間と呼んだ。

ニュートンより少し前に、地球を中心とし、太陽がその回りを回っているという天動説から、太陽を中心とし、地球がその回りを回っているという地動説への変換（コペルニクス的転換と呼ばれる）があった。これは、当時の人々が考えていた「絶対静止」の原点が地球から太陽へと移動したことに対応する。今では太陽は銀河系に属し、銀河系は回転しているし、さらに銀河系全体もグレート・アトラクターと呼ばれる大質量天体に向かって落下していることもわかっている。もはや絶対静止の原点は太陽ではなく、銀河系ですらない。いやそれよりも、「絶対静止」などというものを考えるはいけない。むしろ、

世の中に「自分は絶対静止している」と主張できるものなどない

というのが相対論の主張である。

ここで、「宇宙で静止しているものは何かを判定できるか」ということを考えてみよう。

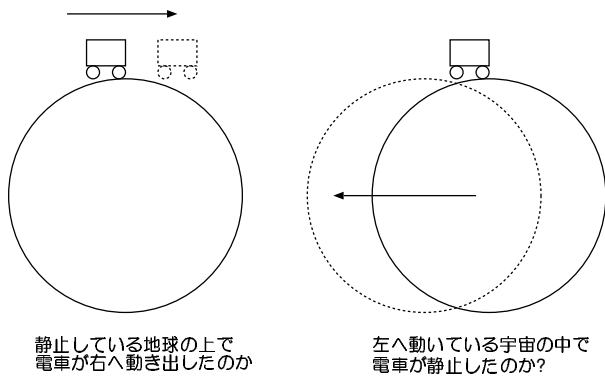


電車が動いているのか、宇宙全体が逆向きに動いているのか

話を簡単にするため、宇宙には地球とその表面の物体しかなく、地球は自転も公転もしていないとしよう。この孤独な地球の上あなたが住んでいて、今電車に乗っているとす。電車が加速も減速もせず曲がりもせずスムーズに走っている時、電車の中であなたがする行動（本を読んだりあくびしたり、あるいはすいていればキャッチボールだって）は、家の中での行動と同じように、何の支障もなくできるはずだ¹。この現象を「宇宙が止まっていて、電車が等速運動している」と考えることもできるし、「電車が止まっていて、

¹電車が揺れている、などと言うなかれ。それは加速減速のうちだから、今はないとしている。

宇宙全体が逆向きに等速運動している」と考えることもできる。どちらで考えても、電車内で起こる物理現象は同じである。つまり、どっちが静止しているのか、判断する方法はないのである。



ここで、「でも電車はモーターで動かしているが、だれも宇宙を動かしてないではないか」と思う人もいるかもしれない。だがそう思った人は、絶対とか相対とか言う前に、ニュートン力学の理解が足りない。物体が動くのに、力はいらぬ。物体の運動を変化させる時(加速度がある時)に力が必要なのである。だから宇宙の全てが整然とある方向に等速運動している限り、誰も力を出す必要はない。整然とある方向に等速運動している宇宙の中で、宇宙と同じ速度で動いていた(ということはつまり「駅に停車していた」ということだ)

電車が止まる(ということはつまり、「宇宙に対して動き出す」ということだ)ためには力が必要なのである。もちろん現実の電車においてはまさつ力という「運動を妨げる力」が存在しているので、等速運動を続けるためにはモーターが力を出す必要がある。しかしこれは電車が止まっていて宇宙全体が動くという考えても同様である。動き続ける宇宙からまさつを受けて動き出したりしないように、電車を止め続ける力をモーターが出しているのだ、と解釈できるのである。

これは運動方程式が

$$(\text{力}) = (\text{質量}) \times (\text{加速度}) \quad (1.1)$$

という形になっていることが効いている。これを少し書き直すと、

$$(\text{力}) \times (\text{時間}) = (\text{質量}) \times (\text{速度の変化}) \quad (1.2)$$

である。

地球静止説に立っている人が

静止している電車(質量 m)のモーターが F の力を Δt 秒間出した。電車の速度は $V = \frac{F\Delta t}{m}$ になった。つまり、

$$F\Delta t = m(V - 0)$$

という式が成立している。

と解釈する現象を、地球運動説にたっている人は

地球も電車も、最初 $-V$ の速度で走っていた(マイナス符号は逆向きを表す)。電車のモーターは F の力を Δt 秒出したので、電車は静止した。

$$F\Delta t = m(0 - (-V))$$

という式が成立している。

と解釈する。どちらの解釈も、どこも間違っていない。この二つの記述は等価である。だから、どちらを正しいかを判定することはできない。どちらも正しいのである。

天動説から地動説への転換の時、「太陽が動いているのではなく、地球が動いているのだ」ということが確立されるまでに長い時間がかかったことを考えてみれば、二物体が相対的に運動している時、ほんとうに運動しているのはどっちかを認識するのがいかに難しいかがわかるだろう。なお、より厳密に言えば、「太陽・地球」系で動かないといっているのは太陽でも地球でもなく、

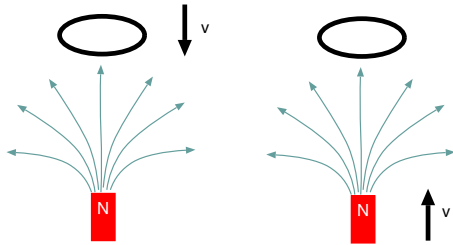
この二つの重心である²。ニュートンは太陽でも地球でもない、絶対静止の基準となる空間があるという仮定のもとにニュートン力学を作った。しかし実際には、ニュートン力学の成立のために絶対空間の仮定は必要ない。宇宙全体が平行に等速運動していたとしても、我々には力学的にそれを知る手段がないからである。より詳細な、数式を使った考察は次章からに回すが、とにかくここまででわかることは、力学においては「絶対空間」は存在していないらしい、ということである。

1.2 電磁気学での「絶対空間」

19世紀終わり頃、物理学者は力学に「絶対空間」がないことには気づいていたが、電磁気学では「絶対空間」があるのではないかと考えていた。その絶対空間の指標となるものが光の媒質である「エーテル」である。光が電磁波と呼ばれる、電気と磁気の波であることはマクスウェルによって発見された。波ならば媒質があるはずであり、媒質が運動すれば波の速度は変化すると考えるのはある意味当然である。つまり、音が風下の方に速く伝わるのと同様の現象である。しかしこの「エーテルの風」を検出しようという試みは失敗し、電磁気学にも「絶対空間」がない(あるいはあっても検出できない)ことがわかった。どのようにしてわかったのか、詳しい内容は後で解説する。とにかく、絶対空間は検出できなかった。「ならば全く絶対空間などないような理論を作ってしまう。」というのが「相対論的」な考え方である。

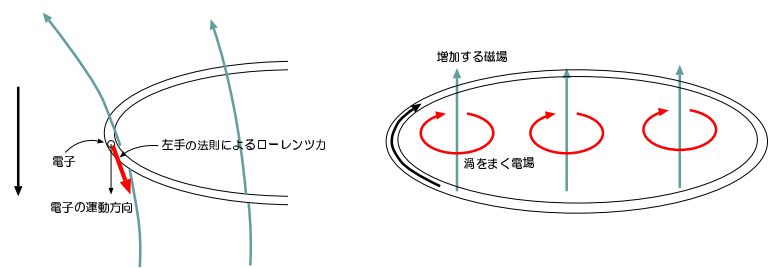
ちなみに、16才の頃に「光の速さで動いたら、電磁波は波の形が静止しているように見えるのか?」と疑問に思ったことが、アインシュタインが相対論を作るそもそものきっかけだったという話がある。アインシュタインはこの疑問を考え続けた結果相対性理論に達した(らしい)。

もう一つ、アインシュタインが疑問としたのはおなじみの電磁誘導をどのように解釈するかである。アインシュタインの考察した現象とは少し違うが、以下のような現象を考えよう。磁石にコイルを近づける(右図)、あるいはコイルに磁石を近づける(左図)、このどちらを行ってもコイルには電流が流れる。この二つの現象は、「相対的に」考えるならば、全く同じものである。というのは、左図の状態を、コイルと同じ速さで同じ方向に動いている人がみれば、まさに右図の状態が見えるはずだからである。



しかしこれがどのように起るか、という解釈は同じではない。

右図の場合であれば、それはコイル内の磁束密度が時間変化するということからくと解釈される。すなわち Maxwell 方程式の $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ にしたがって、磁束密度が変化している場所には電場の渦が発生していて、その電場によってコイル中の電子が力を受け、電流となる。よく知られているように、この時に発生する電位差は、ファラデーの電磁誘導の法則 $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ によって求められる。ここで Φ は回路内をつらぬく磁束であり、 V の符号は Φ に対して右ネジの向きに電流を流そうとする時にプラスと定義される。



ここで Φ は回路内をつらぬく磁束であり、 V の符号は Φ に対して右ネジの向きに電流を流そうとする時にプラスと定義される。

[問い 1] $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ から $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ を導け。

²ティコ・ブラーエは地球が静止して太陽がその回りを回り、その太陽の回りを地球以外の惑星が回るというモデルを唱えていたと言う。これは「地球が動いているとしたら、星の位置が変化するはずだ」と考えたからである

この時に起こっていることはあくまで「磁束密度の変化 電場の発生」という現象である。

では左図はどう解釈されるか。この場合は各点各点の磁束密度は変化していないので、電場などは発生していない。しかし、磁場中を電子が運動すると磁場とも運動方向とも垂直な方向にローレンツ力を受ける。この力は電子がコイルをぐるぐるとまわすような方向に働くので、電流が流れる。つまりこの場合、電場などは発生していないが、磁場によって電子が力を受けることによって、電位差が発生したのと同じ効果があらわれて電流が流れていることになる

[問い2] この考え方で、電子に働く力を計算し、電子が回路を一周する間にこの力がする仕事を計算せよ。この仕事を単位電気量あたりに直したものが、 $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ と等しいことを導け。

どちらで計算しても、流れる電流は同じになる。このように、同じ現象のように見えるのに、違う物理法則によって起っているかのごとく、説明が2種類ある。これはアインシュタインにとっては受け入れがたいことであった。アインシュタインによる特殊相対性理論の最初の論文のタイトルは「運動する物体の電気力学について」(Zur Elektrodynamik bewegter Körper) という、どちらかというど地味なものであるが、それはこのような電磁気に関する疑問から話が始まっているからである。

以上のように、相対論の目指すことは、「どんな立場で見ても物理法則は同じである」ということである。動いている場合と止まっている場合は区別できず、「動いている時のための物理法則」を別に用意する必要はない。前節でみたように、力学の法則はそうなっているが、電磁気の法則はそうになっていない。

そこで、「力学的に見ても電磁气的に見ても、絶対空間が存在しないような理論はどんなものか？」という問いが生まれる。今回は理論的な興味にしぼって話をしたが、実験的にも電磁気学に絶対空間が存在しない(少なくとも、感知できない)ことがわかっている。電磁気学から絶対空間を消すことが必要なのである。そういう意味で、電磁気学は相対論なしには不完全なのであって、上の疑問はなんとかして解決されねばならない。

具体的にどのように相対論がこの疑問に答えたのかはこの講義の中で明らかにしていく。とりあえずここまででわかるように、その理論は動きながら見ると磁場が電場に見えたり、その逆が起こったりと電場と磁場をまじりあわせるような、そういう理論になる。しかし最終的結果はそれだけにとどまらない。電磁気学から絶対空間がなくなるように理論を修正すると、結果として力学も修正されてしまう。それどころか、物体の長さを測る尺度というものが観測している人の状態によって変化しなくてはいけないことがわかる。具体的には「運動しながら見ると(あるいは物体が運動すると)物体が縮む」のである。さらに、相対性理論は「絶対空間」のみならず「絶対時間」も否定することになる。立場が違えば時間すら、同じものではないことがわかったのである。「運動していると時間が遅くなる」という結果も出るし、「ある人にとって同時に起こったことが、別の人にとっては同時ではない」ということも起こる。

具体的にどのようにしてこのような(一見)不思議な結果が出てきたのかは後で詳しく述べる。ここまでの話を聞くと、ずいぶんおかしな、突拍子もないことをやっているように思えるのではないかと思う。しかし実際には、相対論ができあがる過程は非常に確実なものであり、一步一步理解していけば難しいところも論理の飛躍もない。ちゃんと講義を最後まで聞いていけば、あなた方も16才のアインシュタインの疑問に答えることができるはずである。今回だけ聞いて「わからない～」と根をあげないように。

第2章 座標系の変換と運動方程式

第1章の前半では、力学の法則が相対的であること、つまり絶対空間が存在しない(少なくとも、感知できない)ということの説明をした。この章では、そのことを数式を使って考えていく。そのために、座標系の変換ということについて勉強する。

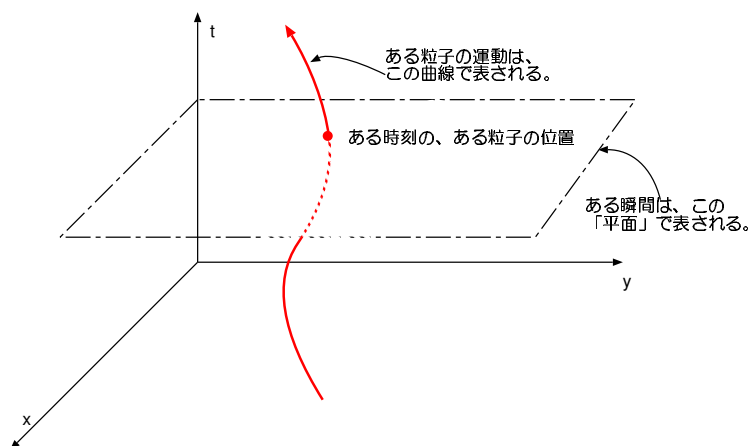
物理を記述するにあたって、座標系は大事である。というより座標系を置かないと何も始まらない。相対性、すなわち「見る立場が違って物理法則は変わらない」ということは数学的言葉を使えば「座標系を変換しても物理法則は変わらない」と表現できる。よって相対論を理解するには、座標系を変換する(ある座標系から別の座標系に移る)ということの意味を理解することが必要である。ここでは相対論以前のニュートン力学の範疇において、座標変換と力学の法則の関係を整理しておくことにする。

2.1 座標系と次元

座標系というのは、物体の位置を指定するための道具である。特に相対論では、4次元、すなわち4つの座標を使って運動を記述するということが大事になる。「次元」という言葉はずいぶんいろんな意味に使われていて¹、一般社会においては「4次元」という言葉は特に謎めいたイメージを持たされている。しかしここで言う「次元」というのは「いくつの数を指定すれば系の状態が決まるか」という意味であって、それが「4」であるということは、別に不思議なことではない。例えば待ち合わせをする時、「じゃあ、生協食堂前で会おう」では待ち合わせはできない。かならず「何時に」ということも決めるはずである。「生協食堂前」を指定するのに数字を使うとしたら、3つの数字が必要である²。これに時刻を足して4つの数字を指定して始めて待ち合わせが成立する。つまりこの場合必要な数字は4つ。これを「4次元」と言う³。

物体の位置だけを問うのなら、3次元でいい。ニュートン力学の世界では、3次元空間と1次元の時間は完全に切り放されて、別個に存在している。相対論的世界では、空間と時間の中に少し関係が生じてくる。そのため、相対論の話をする時には4次元の記述が好まれる(と、今言ってもわからないだろうけど、授業が進むにつれてわかってくるはずである)。

以上のように、4次元と言っても別に怖いものでもなんでもなく、物体の位置と時



¹「その式、左辺と右辺で次元が違うじゃないか」「3次元空間で考えましょう」「そんな次元の低い話はしてないんだよ!」全部、意味が違うのに「次元」という同じ言葉が使われている。

²例えば、「北緯何度、東経何度、標高何メートル」。あるいは「ここから東に何メートル、南に何メートル、下に何メートル」。

³「空中に浮いて待ったり、地面に潜って待つことなどありえないのだから高さや標高は省略してよい」と考えると次元は一つ減って3次元になる。ただしこの場合1階と2階で互いに待ちぼうけを食われる可能性がある。

間を指定するには4つの座標が必要だ、と言っているだけのことである。我々の住んでいるこの宇宙は3次元空間 + 1次元の時間で、「4次元時空」と呼ばれる（「3 + 1次元時空」という呼び方をする人もいる）が、「4次元」と言われただけで不必要に緊張する必要はない⁴。

座標の取り方はいろいろあるが、ここでは一番簡単な直交座標、すなわち互いに垂直な空間軸 x, y, z をとることにしよう。これに時間 t をあわせて、座標は4つ (x, y, z, t) である。ある一つの物体の運動は、この「4次元時空」の中の線で表されることになる。図の「ある時刻のある粒子の位置」を表すには4つの数字が必要だということである（図では z 座標を省略している）。なお、「ある時刻の宇宙」はこの4次元時空のうち、 $t = (\text{ある一定値})$ に限った部分ということになる。ほんとは3次元分の広がりがあるが、図では z 軸が書かれていない分、2次元の面のように描かれている。この面を「面のようだが3次元分ある」ということで「超平面」(hyper surface) と呼ぶ。

2.2 1次元空間の座標変換

簡単のため、まず空間座標は x だけ考えて、 y, z は無視して考えることにする。つまり1次元空間、時間を合わせて2次元（1 + 1次元）時空である。1次元での空間座標は x 一つで、どこかに原点を選び、あとは軸の向き（1次元なので左か右か二つに一つ）を選べば、原点から軸の正の方向に何メートル行った場所か、ということによって位置を指定できる（ここでは「メートル」と書いたが、もちろん「フィート」でも「尺」でも「オングストローム」でも「光年」でも支障はない）。

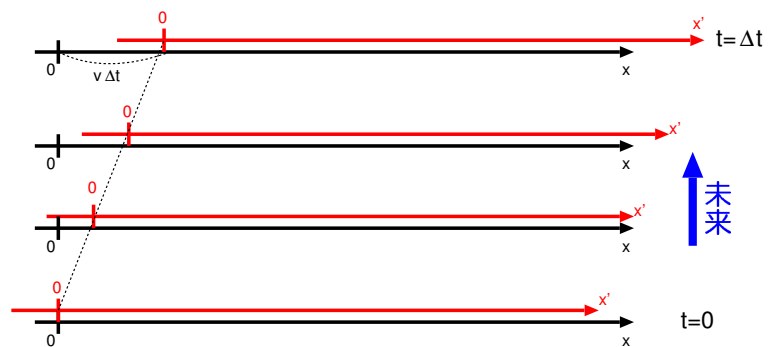


まず簡単な座標変換として、原点の移動を考えよう。新しい座標系 x' 系の原点が古い座標系 x 系で表して $x = b$ という場所にあるとする。座標系の向きと目盛りの幅は同じであるとする、この二つの座標系は $x' = x - b$ という関係で結び付いていることになる。この場合、二つの座標原点は互いに運動していない。 x' 座標系の原点は x 座標系の原点よりも右（つまり、正の方向）にあるのだが、式の上では $x' = x - b$ と引き算される形になっている。この式になっていると、 $x' = 0$ が $x = b$ に対応するのだからもちろんこれでいいのだが、勘違いして $x' = x + b$ とやってしまうことが多いので注意しよう。

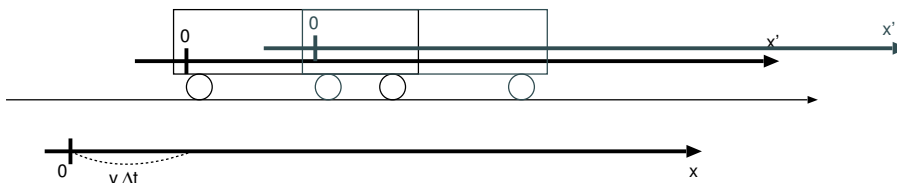
次に座標の原点自体が刻一刻と等速度 v で移動している場合を考える。この場合、 $b = vt$ と考えて、

$$x' = x - vt$$

という変換則に従っている。この座標系 x' は、いわば速度 v で走る電車の内部の座標系である。電車内でみると静止している $x' = 0$ という点は、外からみると、 $x = vt$ で表される、等速運動して移動している点に見える。



⁴たまにいろいろ「4次元ってのはものすごいことなんだ」と思い込んでいる人が、そういう人はこの話をきいてびっくりするようだ。



ここであげた式では $t = 0$ で x と x' の原点が一致しているとしたが、もちろん一般には一致する必要はなく、 $x' = x - vt - b$ でよい。この形でも x' 座標系の原点が x 系で見ると等速運動しているという点は同じである。

この時、 x 系と x' 系で、時間は変化しないと考えられるので、

$$t' = t \tag{2.1}$$

である。あたりまえのことのようであるが、これは重要な（後で変更をせまられることになる）式である。

このような互いに等速で運動している座標系間の変換をガリレイ変換と呼ぶ。

2.3 速度、加速度のガリレイ変換と運動方程式の不変性

さて、「電車内でも外部でも同じ物理法則が成立する」ということを、今考えたガリレイ変換と力学の法則を使って確かめよう。

ニュートンの運動方程式は（1次元であれば）

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F \tag{2.2}$$

と書ける。ガリレイ変換の一般式 $x' = x - vt - b$ という変換式を微分していくと、

$$\begin{aligned} x' &= x - vt - b \\ &\downarrow \\ \frac{dx'}{dt} &= \frac{dx}{dt} - v \\ &\downarrow \\ \frac{d^2x'}{dt^2} &= \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

となるから、運動方程式の形は x 系でも x' 系でも変化しない。つまり、互いに等速運動している二つの観測者は、どちらも同じ運動方程式を使って運動を記述できることになる。運動方程式に加速度という「速度の変化」だけがあらわれていることから、当然の結果である。

二つの座標系で、同じ運動を記述してみる。 x 系と x' 系は原点が一致しているものとする（上の $b = 0$ ）。今 x 系で時刻 $t = 0$ に原点に静止していた質量 m の物体に、力 F を Δt の間加え続けたとする。 x 系および x' 系で成立する運動方程式は

$$F = m \frac{d^2x'(t)}{dt^2} \quad \text{または} \quad F = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \tag{2.4}$$

と書ける。これを t で2回積分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{F}{m} \\ \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{F}{m}t + C_1 \\ x(t) &= \frac{1}{2} \frac{F}{m}t^2 + C_1t + C_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

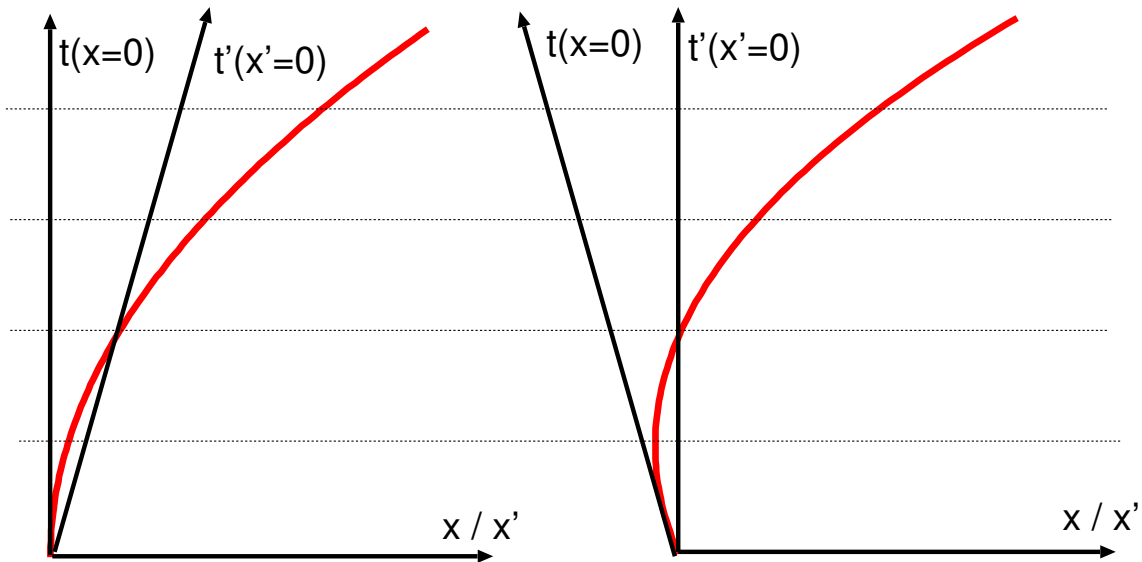
となる (C_1, C_2 は積分定数)。

x 系で考えるならば、 $x(t)$ の初期値 (平たくいえば $x(0)$) は0、初速度 ($\frac{dx(0)}{dt}$) も0であるから、 C_1, C_2 はともに零となる。

x' 系での運動を考えるには、二つの方法がある。今求めた解をガリレイ変換するという方法と、 x' 系での初期値を用いて C_1, C_2 の計算をやり直す方法である。ガリレイ変換ならば、

$$x'(t) = x(t) - vt = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 - vt \quad (2.6)$$

と公式どおりに求まる。 x' 系での初期値を考えるならば、 x 系で静止している、ということは x' 系でみると v の速さでバックしているということになるので、 $x'(0) = 0, \frac{dx'(0)}{dt} = -v$ となって、 $C_1 = -v, C_2 = 0$ となる。結果は、上の式と同じである。



二つの結果を、 x 系と x' 系でグラフにしてみたものが上の二つの図である。 x 系で見ると「静止した状態の物体が速度を少しずつ増しながら離れていった」と見える運動であるが、 x' 系でみると、「最初左へ走っていた物体がだんだん遅くなり、やがて止まって今度は右向きに走りだし、自分の前を通りすぎてどんどん右へと速度を増しながら離れていった」ということになる。等速運動している鈍行電車を、後から発車した急行電車があつという間に追い抜いていった、という状況である。

上のグラフで、 $t = t'$ なのに t 軸と t' 軸が同じ軸でないことをおかしく思う人もいるかもしれないが、 t 軸というのは $x = 0$ で表される線であり、 t' 軸というのは $x' = 0$ で表される線であることに注意せよ。つまり t 軸と t' 軸が同じ方向を向かないのは x と x' にずれがあるからなのである。この二つのグラフは、グラフを水平方向 (x 方向) に、高さ (t 座標) に比例した距離だけ横にずらしていくことによって互に移り変わる。つまり、 $3 + 1$ 次元空間のうち、 3 の部分 (空間あるいは超平面) を時間に応じて動かしていくという変換を行っていることになる。

前の章で強調した、「絶対静止しているかどうかは判定できない」というのは、今示したように、互いにガリレイ変換で移ることができる座標系であれば、どこでも同じ法則が成り立っているからである。物理法則 (この場合ニュートンの運動方程式) にあらわれるのは加速度であり、上のグラフでいえば、物体の運動を表す線の傾きがどの程度変化しているか、つまりは線の曲がり具合である。ガリレイ変換は線の傾き (つまりは速度) を一定値だけ変えるが、その時間的变化量 (曲がり具合) を変えない。そのため、物理法則は変わらない。

今あなたが電車外にいて、「静止しているのは私である」という仮定のもとに運動方程式を解いて、ある物体の運動を求めたとする。しかし電車内にいる誰か別の人が「静止しているのは俺の方だ」と

言って同様のことを行ったとしても、結果は同じになる。ではあなたとこの人の、どちらが正しいのか。もちろん、判定不可能である。

ガリレイ変換の物理的意味は、一つの物理現象を見る時、観測者が運動しながら見るとどう見え方が変わるか、ということにある。ガリレオ・ガリレイの時代と言え、天動説から地動説への変換の真っ最中であった。つまり、「地球が静止していると考えて天体の運動を考える」立場と「太陽が静止していると考えて天体の運動を考える」立場のどちらが正しいのかが論争の焦点となっていた。ガリレイ変換は等速直線運動どうしの変換であるから太陽と地球（円運動している）には直接当てはまらないが、地球の運動方向の変化が十分小さくなるほど短い時間で近似して考えれば「地球が静止している」座標系と「地球が運動している」座標系の変換はガリレイ変換で表せる。

2.4 2次元の直線座標の間の変換

一つ次元をあげて、2次元空間の場合で考えてみる。二つの空間座標を x, y とすると、 x, y に対して別々の平行移動を行う座標変換

$$x' = x - a, y' = y - b$$

であるとか、それぞれ別の速度でガリレイ変換する座標変換

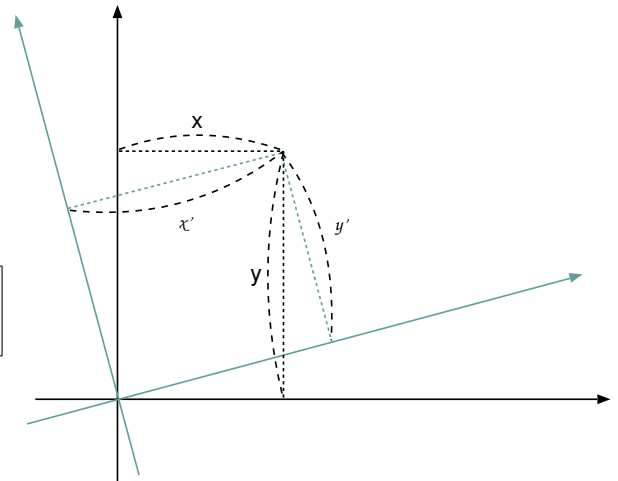
$$x' = x - v_x t, y' = y - v_y t$$

などがある。

しかしここまでは1次元の話を重ねているだけで面白くない。2次元ならではの座標変換は、右の図のような、座標軸の回転である。

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \quad (2.7)$$

[問い3] 右の図に適当に補助線を引くことにより、(2.7)を図的に示せ。



回転であるから当然であるが、この式は

$$(x')^2 + (y')^2 = x^2 + y^2 \quad (2.8)$$

を満足する。つまり、原点からの距離（上の式は距離の自乗）はこの変換で保存する。

逆に、(2.8)を満足するような座標変換はどんなものか、考えてみよう。この変換は x, y （または x', y' ）の1次変換の形になっているので、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

と書くことができる。このように行列で書くと、(2.8)は $\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ である。

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

ということになるが、 x, y が任意の数でこれが成立するためには、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

となればよい。これが意味することは、二つの列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ が、どちらも長さが1で、互いに直交せよ、ということである。このような条件を満たしている行列を直交行列といい、 A が直交行列であれば、 $A^T A$ は単位行列となる⁵。

直交行列であれ、というだけの条件では回転の行列になるとは限らない。たとえば、 $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ としても、 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$ となる場合と $\begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ となる場合が考えられる。前者は回転であるが、後者は回転 + 反転になっている。

3次元になると回転がより複雑になるが、基本的な考え方は同じで、3つの直交するベクトルを並べた形で直交行列を作れば回転（反転を含む場合あり）の行列を作ることができる。

[問い4] 行列 $\begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ が回転 + 反転の行列であることを、図を書いて確認せよ。

なお、以上のような多次元の計算をする時、いちいち x 座標はこう、 y 座標はこう、と式を並べるのは面倒なので、約束ごととして、 $x^1 = x, x^2 = y$ のように x の肩に添字をつけて表すことが多い。 x^1 は「 x の1乗」と、 x^2 は「 x の2乗」と間違えやすいので注意すること⁶。この書き方を使うと、(2.9) は

$$x^i = \sum_{j=1}^2 a_{ij} x^j \quad (2.12)$$

と書けるし、(2.10) は

$$\sum_{i=1}^2 (x^i)^2 = \sum_{i,j,k=1}^2 x^i a_{ji} a_{jk} x^k = \sum_{i=1}^2 (x^i)^2 \quad (2.13)$$

と書ける (a_{ji} とか a_{jk} などの足の前後関係に注意せよ)。さらに楽をするために、「同じ添字が2回現れたら、その添字に関して和がとられているものとする」というルール⁷を採用して、 \sum を省略することがある。その場合、(2.9) は

$$x^i = a_{ij} x^j \quad (2.14)$$

と書けるし、(2.10) は

$$x^i x^i = x^j a_{ij} a_{ik} x^k = x^i x^i \quad (2.15)$$

と書ける。

このように上や下に添字のついた量を「テンソル」⁸と呼ぶ（テンソルの正しい定義は後で行う）。以後この講義ではこの書き方をすることも多い（しばらくは併記するようにする）。どの書き方もたいへん大事なので、どれも使えるようになって欲しい。

⁵ A^T は行列 A の転置（行と列を入れ替えたもの）を表す。

⁶添字は肩でなく下につけて x_1, x_2 とする場合もある（この場合を「下付き添字」などと言う）。上付き添字と下付き添字は厳密には意味が違う。その差はこの講義の後半で出現する予定。実は厳密に考えると、(2.9) は $x^i = a^i_j x^j$ のように書かなくてはならない。今考えている2次元や3次元で直交座標を使っている場合ではそこまで厳密にしなくても支障無い。

⁷始めたのはアインシュタインなので、「アインシュタインの規約」と呼ぶ。アインシュタイン本人は「私の数学への最大の貢献」と冗談混じりに自画自賛している。

⁸足の数をテンソルの階数と言う。ベクトルは足が一個ついているので「一階のテンソル」と言う。 a_{ij} は二階のテンソル。

a_{ij} が直交行列であるという条件は

$$a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik} \quad (2.16)$$

と書ける。ただし、 δ_{ik} は $i = k$ の時 1、それ以外の時 0 ということの意味する記号で、クロネッカー・デルタと呼ばれる。つまりは単位行列をテンソルで表したものである。

回転に関しても運動方程式は不変になる。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y \quad (2.17)$$

から、

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x'}{dt^2} &= m \frac{d^2x}{dt^2} \cos \theta + m \frac{d^2y}{dt^2} \sin \theta \\ &= F_x \cos \theta + F_y \sin \theta \end{aligned} \quad (2.18)$$

同様に

$$m \frac{d^2y'}{dt^2} = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta \quad (2.19)$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} F_{x'} &= F_x \cos \theta + F_y \sin \theta \\ F_{y'} &= -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta \end{aligned} \quad (2.20)$$

を「回転された力」と考えれば⁹、

$$m \frac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'}, m \frac{d^2y'}{dt^2} = F_{y'} \quad (2.21)$$

が成立し、回転前と同じ運動方程式が成立している。

このことも、行列およびテンソルを使った書き方で示しておく。

行列を使って書くならば、運動方程式が

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

と書かれていて、回転した座標系では、

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

と書かれる、ということになる。角度 θ が時間 t によっていなければ、この二つの式は等しい。また、 $a_{11} = a_{22} = \cos \theta, a_{12} = -a_{21} = \sin \theta$ として a_{ij} を使って表すならば、運動方程式は

$$m \frac{d^2x^i}{dt^2} = F^i \quad (2.24)$$

から

$$m a_{ij} \frac{d^2x^j}{dt^2} = a_{ij} F^j \quad (2.25)$$

と変わる、ということになる。 a_{ij} が時間によらなければ、この二つは等しい。

行列表示あるいはテンソル表示では、元の運動方程式に何か（行列だったり a_{ij} だったり）をかけることで新しい座標系での運動方程式が出ている、ということがわかりやすいかと思う。

⁹これは座標というベクトルと力というベクトルが同じ形の変換をしなさい、ということなので、reasonable である。

2.5 運動方程式を不変にする3次元の座標変換

今度は3次元を考えて、運動方程式が不変になるような座標変換のを考え、それもやはり、ガリレイ変換と回転の合成で考えることができるであろう。そこで一般的な回転を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{テンソル表示なら、} x'^i = a_{ij}x^j) \quad (2.26)$$

のように行列で表してみよう。この行列を3つの列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ に分解する。

この3つは互いに直交し、長さが1のベクトルになる。このことから、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{テンソル表示なら、} a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik}) \quad (2.27)$$

が結論できる。つまり直交行列であるという点で、2次元の場合と同様である。

3次元の具体的な回転は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

で表される3つの2次元回転の組み合わせで作られる。回転を表すパラメータとしては、回転軸を指定するのに2つ、回転角度を指定するのに1つで、合計3つのパラメータがいる。

後で時間も入れた4次元の時空に関して、ここで扱った回転に似た変換を考えることになる。

2.6 絶対空間に対するマッハの批判

ニュートンはニュートン力学を構築する時、「絶対空間」すなわち物体が静止していることの基準となる空間を仮定した。つまり、「静止している」ということが定義できるとしたのである。マッハはこれを批判し、「物体が静止しているかどうかを判定することはできない」と主張した。実際ニュートンの運動方程式はガリレイ変換で不変なのだから（動きながら見ても物理法則は変わらないのだから）運動を見ているだけではその物体が静止しているかどうかを判定することはできない。観測者自身すら、止まっているのかが判定できないからである。

この「動いているかどうか判定できない」というのは等速直線運動の場合に限る。たとえば観測者が回転運動をしていれば、遠心力を感じるの、遠心力があるか否かを実験することで「自分は回転しているのか」を判定することができる（数式上言えば、先の計算の θ が時間の関数であれば、運動方程式は不変ではない）。しかしマッハはこの考え方も批判していて「自分が静止していて宇宙全体が回転していたとしても遠心力が働くかもしれない」と述べている。今のところ(?)、誰も宇宙全体を回転させるような実験はできないので、この真偽はもちろんわからない。

マッハの批判から学ぶべきことは「観測されていないことを固定観念で「決まっている」と思い込んではいけない」ということである¹⁰。ニュートンは実際には観測することができない「絶対空間」

¹⁰このあたりの「心」は量子力学にもつながるかもしれない。ただし、マッハ自身は量子力学どころか、分子論に対しても批判的であった。つまりは全てを疑ってかかる人だったのだろう。

をあると仮定してニュートン力学を作った（実際にはこの仮定は必要ではない）。「絶対空間」が存在することは人間の感覚にはなんとなく、合う。だが、感覚を信用することは危険である。「物体に働く力は、物体の速度に比例する」という、人間の感覚に合うアリストテレスの理論が長い間信じられてきた（が間違っている）ということをおぼろげに思い出さなくてはならない。

2.7 この章で考えた座標変換と、「慣性系」の定義

以上でわかるように、ニュートンの運動方程式は

1. ガリレイ変換。すなわち $x' = x - vt - b$ という形の、等速運動による原点ずらし。
2. 一定角度（時間にも空間にもよらない角度）の回転。
3. 座標軸の反転。

によって不変である。しかし例えば時間によって変動する角度で回転させたり、等加速度運動させたりすると、もはや新しい座標系では運動方程式が成立しなくなる。

そこで、ニュートンの運動方程式が成立する座標系を特別に「慣性系」と呼ぶ。ニュートンの運動方程式は上の座標変換で不変である。つまり、上の座標変換は、慣性系を別の慣性系に移すような座標変換である、ということが言える。

たとえば地球表面に固定した座標系は厳密には慣性系ではない。地球の回転によって、コリオリ力および遠心力というみかけの力が働く。また、慣性系 x に対して加速度運動しているような座標系

$$x' = x - \frac{1}{2}at^2 \quad (2.29)$$

を導入したとすると、この x' 系での運動方程式は

$$m \left(\frac{d^2 x'}{dt^2} + a \right) = F \quad (2.30)$$

あるいは

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = F - ma \quad (2.31)$$

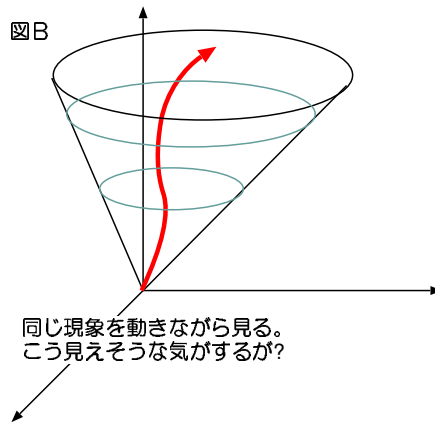
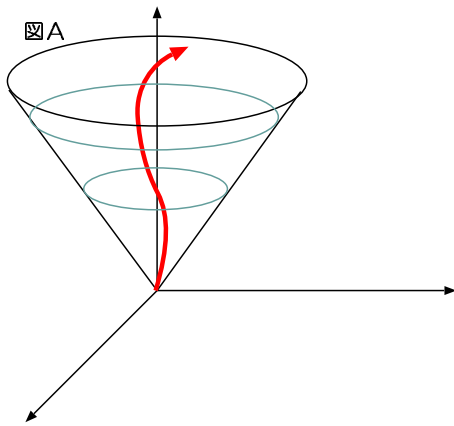
となってしまう。つまり x' 系は慣性系ではなく、運動方程式の力の部分に余分な項 $-ma$ がつく。この項は「慣性力」と呼ばれる。加速している物体（発進する車など）の上の観測者が加速と逆向きに力が働いているように感じるのが、この慣性力のもっとも単純な例である。このような加速度のある座標系は特殊相対論ではあまり扱われないが、一般相対論では非常に重要になる。

[問い5] 平面上の慣性系 (x, y) に対して角速度 ω で回転している座標系 $(x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t, y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t)$ で成立する運動方程式を求めよ。普通の運動方程式に比べ、余分な項がつくが、その余分な項の物理的意味は何か。

19世紀終わりの段階では（まだ量子力学が出てないので）、基本的な方程式は力学におけるニュートンの運動方程式と電磁気におけるマクスウェル方程式であった。この章では、ニュートンの運動方程式が全ての慣性系で成立するというを確認した。ではマクスウェル方程式は？—これが次の章のテーマとなる。

2.8 光の伝搬とガリレイ変換

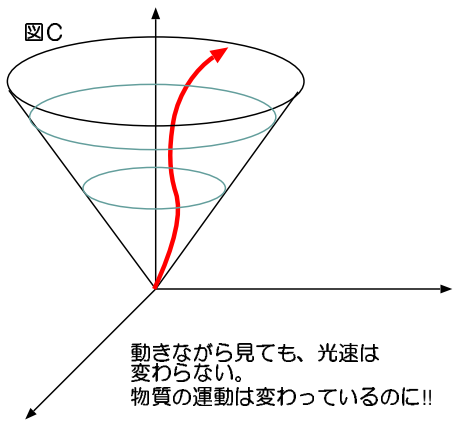
ここまででガリレイ変換がどういうものか、という感覚がつかめたと思うので、ここで少し先走って、ガリレイ変換の考え方では「光は誰が見ても同じ速度である」という事実を説明できそうにない、ということを確認しておこう。



光が一点からまわりに広がっていく、という現象は左側の図のように記述することができる。例によって z 座標を省略している。これは円錐のように見えるので、光円錐 (light-cone) と呼ばれる。光円錐の中に書かれている太線矢印はある粒子の軌跡を表している。

この現象を、左に走りながら見たらどうなるだろう。ナイーブに考えると¹¹、右側の図のよ

うになると思われる。



しかし、光の速度は動きながらみても変わらないということが実験事実なので、光円錐の形は変化しないことになる。しかし、物体の運動に関しては変化している (これも実験事実！)。

ちなみに、光の速度は変化しないが、その様子はいろいろと変わっている。どのように変化するのかについては今後の講義で話そう。とにかくここまでで感じて欲しいことは、「図Aを動きながら見たら図Bではなく図Cになるとしたら、図Aと図Cはどのような関係になっているのか」ということである。

「動きながら見る」ということは時々刻々位置が変化していく、ということだから、「超平面」の位置がずれていく、という考え方 (ガリレイ変換がまさにこういう変換なのである) をすると、どうしても結果は図Bになってしまう。図Aが図Cに変化するためには、この図の水平方向の動きだけではだめである。かならず「超平面を傾ける」というような操作が必要になる。実際にどんな操作なのかは以後の講義を聞いてのお楽しみであるが、このような操作がすなわち「4次元的に考える」ということなのである。

ためには、この図の水平方向の動きだけではだめである。かならず「超平面を傾ける」というような操作が必要になる。実際にどんな操作なのかは以後の講義を聞いてのお楽しみであるが、このような操作がすなわち「4次元的に考える」ということなのである。

¹¹「ナイーブ (naive)」という言葉は日本語だと良い意味にとられるが、英語では「だまされやすいばか」という意味にとられることが多い。特に物理で「ナイーブに考えると」という言葉は「間抜けが考えると」に近い。

第3章 電磁気学の相対性

3.1 電磁波に関する疑問

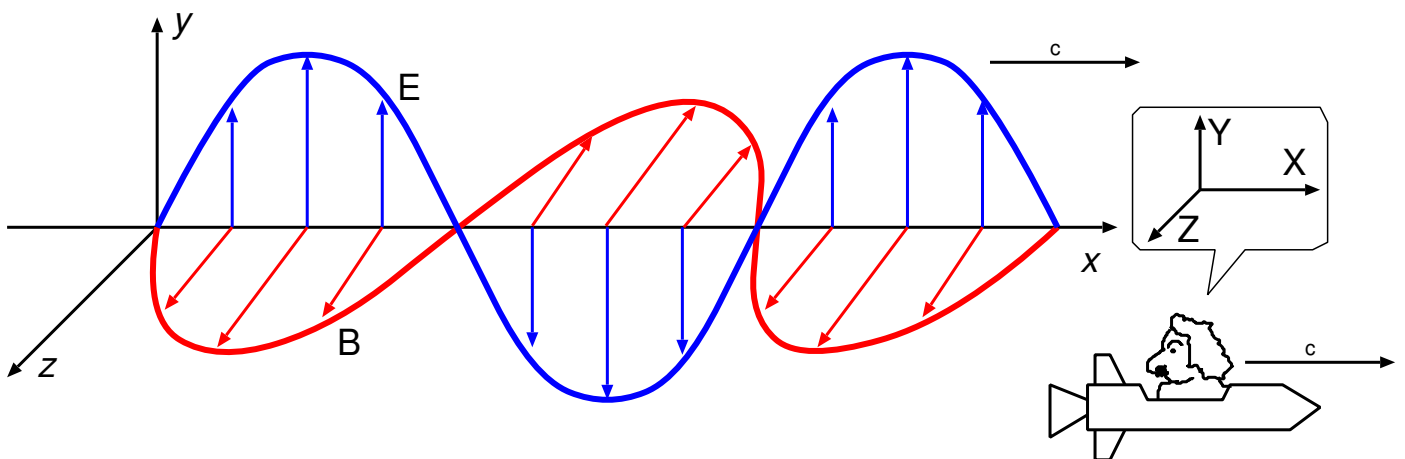
前にも書いたが、アインシュタインが後に相対論へと続く道の中で、最初に抱いた疑問は「光の速さで飛ぶと波の形をした静電場や静磁場が見えるのだろうか？」だったと言う話がある。例えば x 方向に伝播する電磁波

$$E_x = E_z = 0, E_y = E_0 \sin k(x - ct), B_x = B_y = 0, B_z = \frac{E_0}{c} \sin k(x - ct) \quad (3.1)$$

は真空中のマックスウェル方程式

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

の解である。



[問い6] (3.1) が (3.2) の解であることを確認せよ。

[問い7] (3.2) は、通常の教科書に載っている式を、真空中では $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ であることを使って簡単化した式である。教科書に載っている式からこの式を導いてみよ。

これを速度 c で走りながら見たとすると、その観測者にとっての座標系 (X, T) は速度 c でのガリレイ変換を施した座標系

$$X = x - ct, T = t \quad (3.3)$$

だと考えられる。座標の変換だけを行えばよいのだとすると（つまり、電場や磁場は座標変換しても同じ値を保っているとする）この系での電場と磁場は

$$E_X = E_Z = 0, E_Y = E_0 \sin kX, B_X = B_Y = 0, B_Z = \frac{E_0}{c} \sin kX \quad (3.4)$$

となり、波の形をして止まっている電場と磁場が見えるように思われる。しかし、この解はマクスウェル方程式を満たさない。例えば左辺の $\text{rot} \vec{E}$ の Y 成分は $-\partial_X E_Z = -kE_0 \cos kX$ となるが、右辺は $\frac{\partial \vec{B}}{\partial T} = 0$ である。

3.2 マクスウェル方程式をガリレイ変換すると？

電磁波の発見者としても名高いヘルツは、動いている人から見たらマクスウェル方程式はどのように変化するのか、ということを考えて、マクスウェル方程式をガリレイ変換した方程式を導いている。

3次元のガリレイ変換を

$$x^i = x^i - v^i t \text{ または } x^i = x'^i + v^i t', \quad t' = t \quad (3.5)$$

と置く。そして、この (x', t') 座標系では普通のマクスウェル方程式が成立するでしょう。では (x, t) 座標系ではどんな方程式が成立するだろう？

これは座標変換 $(x^i, t) \rightarrow (x'^i, t')$ であるが、この時微分 $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial t}$ はどのように変化しなくてはいけないかを考えてみる。一般的な微分の公式から

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial t}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x^j}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.7)$$

がわかる。つまり、 x による微分と x' による微分は同じもので、 t による微分と t' による微分が変化する。座標は x が変化して t は変化していないのだから、奇妙に思えるかもしれないが、 $x^i = x'^i + v^i t'$ を t で微分した時には0にならなくてはいけない、ということに気をつければ、こうなることは当然である。

では方程式を作っていく。ここで、電場や磁場の値は運動しながら見ても変化しない（どちらの座標系でも同じ値を取る）と仮定する。空間微分は変化しないから、 $\text{div} \vec{B} = 0$ や $\text{div} \vec{E} = 0$ は x' 系でも x 系でも同じ式である。時間微分を含む方程式である $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ などを考えていこう。

(x', t') 座標系を「マクスウェル方程式が成立する座標系」と考えたので、たとえば z 成分の式として、

$$\frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\frac{\partial B_z}{\partial t'} \quad (3.8)$$

が成立している。これをガリレイ変換すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} - v_x \frac{\partial B_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial B_z}{\partial y} - v_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} - v_x \frac{\partial B_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial B_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial B_y}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} - v_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial B_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial B_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.9)$$

ここで、1行めから2行目では $\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y}$ ($\text{div} \vec{B} = 0$) を使った。

$\vec{v} \times \vec{B}$ というベクトルを考えると、これの y 成分が $v_z B_x - v_x B_z$ であり、 x 成分が $v_y B_z - v_z B_y$ である。ゆえに上の式は

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\vec{v} \times \vec{B})_y - \frac{\partial}{\partial y}(\vec{v} \times \vec{B})_x \quad (3.10)$$

x, y 成分に関しても同様の計算をすれば、この3つの式が

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.11)$$

とまとめることができる¹。

$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ の方は、

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \text{rot}(\vec{v} \times \vec{E}) \quad (3.12)$$

となる（この計算は全く同様であるから省略する）。

よって、 x 系で成立する方程式は

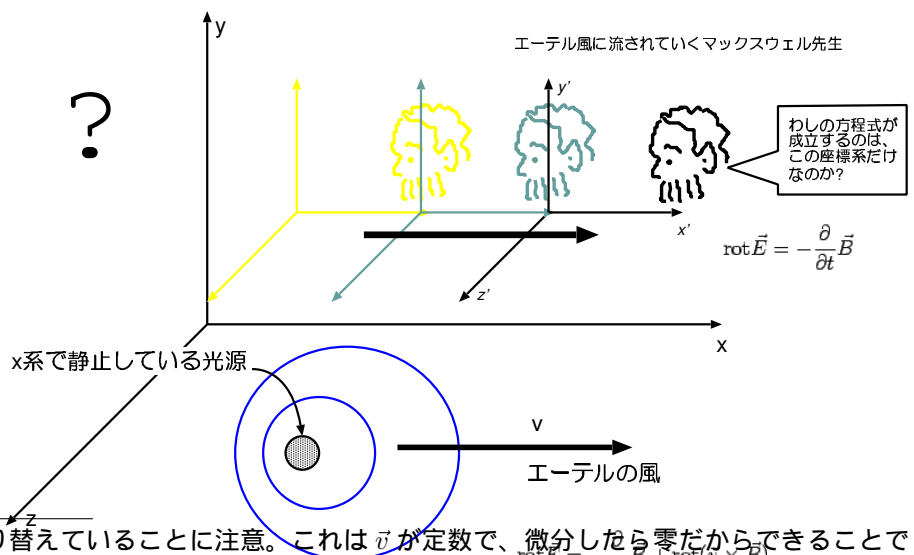
$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.13)$$

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad \text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \text{rot}(\vec{v} \times \vec{E})$$

となる。これをヘルツの方程式と呼ぶ。

こうして、マックスウェルの方程式とヘルツの方程式という、二つの方程式が出てきた。どのようにしてヘルツの方程式が出てきたかを思い出そう。互いにガリレイ変換 $x' = x - vt$ で移り変わる二つの座標系を用意し、 x' 系ではマックスウェル方程式が成立すると考えて、 x 系で成立する方程式を求めた。これがヘルツの方程式である。つまり、宇宙には特別な「マックスウェル方程式が成立する座標系」 x' があり、その特別な座標系に対して運動している座標系ではヘルツの方程式が成立する。そして、それぞれの座標系から見てマックスウェル方程式が成立する x' 系がどう運動しているのかを示すのが \vec{v} である。

ここで、光同様に波である、音の場合を考えてみよう。音は「空気の静止系」では周囲に均等な速度で伝播する。しかし、「空気の静止系が速度 \vec{v} で動いているように見える座標系」つまり「風が速度 \vec{v} で吹いている座標系」では、風に流される。つまり、音の伝播は「空気の静止系」とそれ以外の座標系では、違う法則にしたがうのである。それと同様に、「マックスウェル方程式



¹計算の途中で \vec{v} と微分の位置を取り替えていることに注意。これは \vec{v} が定数で、微分したら零だからできることである。 \vec{B} と微分との順番は決して取り替えてはならない。

が成立する特別な座標系」がどこかにあり、それ以外の座標系では $\vec{v} \neq 0$ のヘルツの方程式を

使わねばならない。音に対する空気のように、光に対して「エーテル」² という媒質を考えると、「エーテルの静止系」(今の場合 x' 座標系)でのみマクスウェル方程式が成立するということになる。

空間はエーテルに満たされている。このエーテルの振動が光であり、エーテルの静止系ではマクスウェル方程式が成立する。音が空気の振動であるように、光はエーテルの振動だと考えたのである。そして、ヘルツの方程式にあらわれる \vec{v} は、エーテルの運動速度である。エーテルが動いていれば、光はエーテルの運動方向には速く、逆方向には遅く伝わる。

[問い8] x 座標系では光の速度は方向によって違うため、静止した光源から出た光は光源を中心とした円にはならない。一方、 x' 座標系で見ると、光はどの方向にも均等に広がる。では x' 座標系で見た時、光の波の形が同心円にならない理由は何か？

周期表で有名なメンデレーエフはエーテルに原子番号「0」を与えたという。エーテルがもし存在するとしても普通の物質とは全く違う性質を持ったものであることは間違いない。まず光は横波であるから、エーテルは固体のように変形に対して元に戻ろうとする性質(弾性)を持っていない(液体や気体中は横波は伝わらない)。光が秒速30万キロという速いスピードで進むことは、エーテルが非常に固い物質であることを示している。しかしエーテルが満ちていると考えられる「真空」中を、物体は抵抗なく進むことができる³。

これがほんとうだとすると、マッハによってニュートン力学から追放されたはずの、「絶対空間」が電磁気学の世界で復活してきたことになる。と同時に我々は電磁気の問題を解く時常に「エーテルの風は吹いているのか？」と問いかけなくてはならないことになる。エーテルの風の速さ \vec{v} がわからないと式がたてられないのである。

さて、この章の最初の疑問に対して、ヘルツの考え方はどのような答えを出すだろうか。3.1では、 (x, t) 系がマクスウェル方程式が成立する座標系で、 (X, T) 系がその系に対して速度 c で動いているとして、座標変換を $X = x - ct$ (この逆変換は $x = X + cT$) と考えた。ヘルツの方程式の導出では $x' = x - vt$ として、 x' 系がマクスウェル方程式の成立する座標系(エーテルの静止系)であったから、対応 $((x, X) \leftrightarrow (x', x))$ を考えると、ヘルツの方程式にあらわれる \vec{v} が $\vec{v} = (-c, 0, 0)$ であることがわかる。3.1ではエーテル静止系はとまっていて、観測者が速さ c で右側に動いていた。逆に考えると、観測者から見てエーテル静止系が速さ c で左側に動いている。一方、3.2では、観測者に対してエーテル静止系が右に速さ v で動いている、と考えればわかりやすい。

よって、 (X, T) 座標系での電磁場

$$\vec{E} = (0, E_0 \sin kX, 0), \quad \vec{B} = (0, 0, \frac{E_0}{c} \sin kX) \quad (3.14)$$

の満たすべき方程式は、ヘルツの式で $\vec{v} = (-c, 0, 0)$ とした方程式である。

$\vec{v} \times \vec{B}$ を計算すると、

$$(\vec{v} \times \vec{B})_X = 0, \quad (\vec{v} \times \vec{B})_Y = E_0 \sin kX, \quad (\vec{v} \times \vec{B})_Z = 0 \quad (3.15)$$

となって、 \vec{E} と $\vec{v} \times \vec{B}$ が等しいということになる。 \vec{B} は時間によらないのだから、この電磁場は(3.11)を満たしている。(3.12)も同様である。

² 麻酔薬のエーテルとは同じ名前だが何の関係もない。アリストテレスが天を満たしている元素としてエーテルというものがある、と言っていたのにちなんでいる。ちなみに綴りは Ether で、英語読みだと「イーサ」。これはネットワークのイーサネットの「イーサ」と同じ単語。

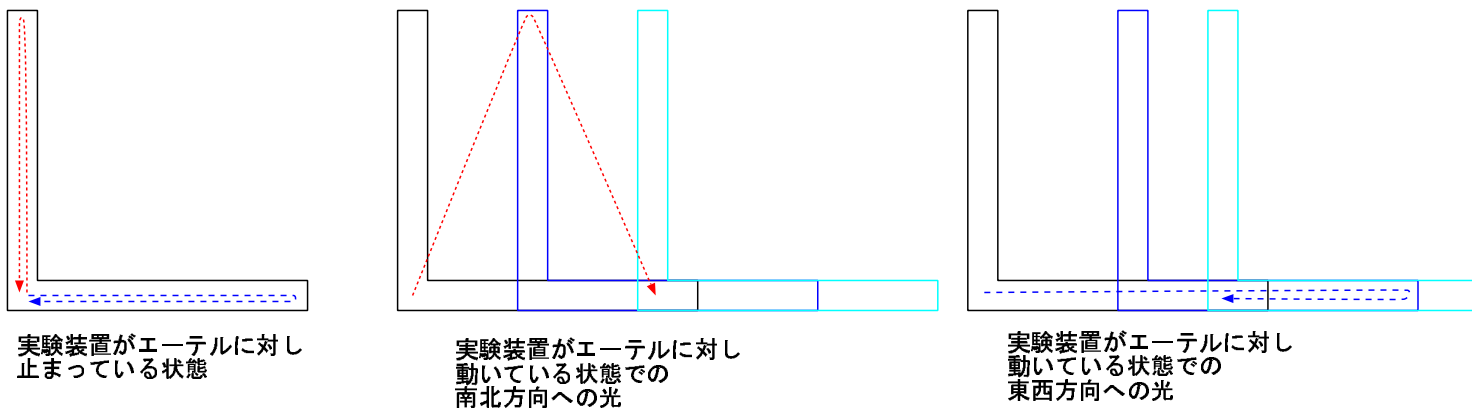
³ 物体が動くとき回りのエーテルもいっしょに動く、という考え方はすぐに否定された。たとえば一定磁場の中で誘電体の円筒を回転させる実験がある。エーテルが円筒といっしょに動いたとすると、ヘルツの方程式の \vec{v} に円筒の回転速度を代入せねばならないが、そのような計算は実験に則さない。

[問い9] 上で確認したのは速度 v がちょうど c の時であったが、そうでない場合、電場や磁場はどう見えるだろう。そして、それはヘルツの方程式を満足しているだろうか。

3.3 マイケルソン・モーレーの実験

ヘルツの考察から、ガリレイ変換が正しいとすれば、電磁気の基本法則はマクスウェル方程式ではなくヘルツの方程式で表されることになる。このヘルツの方程式は結局は間違っていたわけであるが、間違っていると言っても理論的に間違っているわけではない。ヘルツの方程式は実験によって否定されるのである。ヘルツの方程式が正しいかどうか、あるいはエーテルが存在しているのかどうかを確認する実験として、ここではもっとも有名で、かつ直接的な測定であるマイケルソン・モーレーの実験について述べよう。光の速度がエーテルの運動によって変化するかどうかを確認した実験である。光の速さを測定しよう、というのであれば、一番単純な方法は「A地点で光を発射してB地点で受ける。A地点とB地点の距離をかかった時間で割る」というものであろう。原子時計などを用いて精密に時間を測ることができる現代であれば、まさにこの通りの実験ができる。しかし、当時はまだそんな測定はできない。そこで干渉を用いて速度変化を検出しようというのがマイケルソン・モーレーの実験である。

マイケルソンは以下で説明する原理の実験を、1881年に最初に行っている。以後、1887年からはモーレーと協同で装置を改良し、実験精度を上げながら実験を続けている。実験の目的は、南北方向の光と東西方向の光の速度を比較することである。地球が南北方向より東西方向に大きく動いているであろう（太陽が静止していると考えて、太陽から地球の運動を見ていると考えればこれはもっともらしい）ことを考えると、速度には差が出てきそうに思える。また、たとえそうでなく、たまたまエーテルの流れと地球の自転公転の速度が一致していたとしても、地球は1日の間に1自転し、1年の間に1公転する。したがって長い時間実験を行えば、かならずどこか（いつか）エーテルの風が吹く場所がありそうである。



マイケルソンとモーレーの実験では、図のように、同じ長さの腕2本の上を光が往復する。エーテルが静止している（あるいはエーテルと実験装置が同じ速度で動いているとしても話は同じこと）と考え、どちらの方向に進んだ波も、帰ってくるまでにかかる時間は $t = \frac{2L}{c}$ となるだろう。

ではエーテルの風が図で左（西向き）に吹いている場合（あるいはエーテルが静止していて、観測装置が右に動いている場合）を考えよう。断っておくが、以下の計算はガリレイ変換が正しいと仮定した場合の計算である（後でこう考えたのはいけない、ということがわかる）。この仮定のもとでは、2種類の計算ができる。一つはエーテルが静止して実験装置が右（東）に動いているという立場であり、もう一つは実験装置が静止してエーテルの風が西向きに吹いているという立場である。

エーテルが静止している立場： まず、エーテルが静止している立場で考えよう。この立場では、実験装置が右へ動いている、ということになる。その立場で書いたのが上の図の中央と右の図である。実験装置がエーテルに対して速度 v で東（図で右）に運動しているとして、南北方向へ進む光について考える。中央から棒の端まで光が進むのに t かかったとすると、ピタゴラスの定理により $(ct)^2 = (vt)^2 + L^2$ が成立する。光が往復にかかる時間はこの2倍なので、

$$t_{\text{南北}} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (3.16)$$

となる。次に東西である。まず中央から棒の端まで光が進むのに t_1 かかったとする。その間に棒も vt_1 進んでいるので、光は $L + vt_1$ 進まねばならない。逆に棒の端から中央まで戻る時に t_2 かかるとすると、この時進む距離は $L - vt_2$ でよい。以上から

$$L + vt_1 = ct_1 \quad (3.17)$$

$$L - vt_2 = ct_2 \quad (3.18)$$

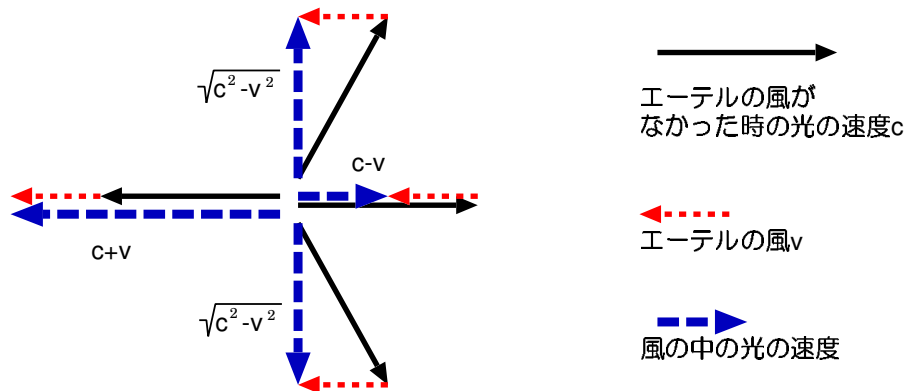
を解くことにより

$$t_{\text{東西}} = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2cL}{c^2 - v^2} \quad (3.19)$$

が求まる。

実験装置が静止している立場

この場合はエーテルの風に乗った方向（西行き）では光速が $c + v$ になり、逆風の方（東行き）では光速が $c - v$ になると考えて計算する。また、エーテルの風と直角の方向（北行きもしくは南行き）の光は、速度が $\sqrt{c^2 - v^2}$ に減る（速さ c で斜めに進んだ光が、速さ v で東に流されると考えれば、ピタゴラスの定理でこうなることがわかる）。



以上、どちらの計算でも $t_{\text{東西}}$ と $t_{\text{南北}}$ が得られる。そして、この二つには差がある。 v は c より十分小さいとして近似を行うと、

$$t_{\text{南北}} \simeq \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots \right), \quad t_{\text{東西}} \simeq \frac{2L}{c} \left(1 + \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots \right) \quad (3.20)$$

つまり、 $\frac{2L}{c} \times \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2$ ぐらいの時間差が出ることになる。 c が自転（秒速 0.46 キロ）や公転（秒速 30 キロ）に比べて非常に大きい（秒速 30 万キロ）ため、 $\frac{v}{c}$ は公転速度をとったとしても 10^{-4} 程度の値になる。最初の実験では $L = 3\text{m}$ ほどだったので、時間差は

$$\Delta t = \frac{2 \times 3}{3.0 \times 10^8} \times \frac{1}{2} (10^{-4})^2 \simeq 10^{-16} \quad (3.21)$$

となり、 10^{-16}s 以上の精度での時間の測定が必要となる。そこで実際の実験では時間を直接測定するのではなく、光の干渉を用いた。二つの光をハーフミラーなどを使って重ねてスクリーンなどにあて

ると、ヤングの実験やニュートンリングの実験などと同様に、二つの光の光路差によって干渉が生じ、スクリーン上に縞模様ができる（実際に使う光はある程度の広がりがある）。エーテルの風が吹いている時と吹いてない時では光路差が違っているので、干渉の（強め合うとか弱め合うとか）の条件が変化する。 10^{-16} という時間は短い、光路差に直すと $c = 3.0 \times 10^8$ がかかって $3.0 \times 10^{-8} \text{m}$ となる。光としてナトリウムランプを使ったとしたらその波長 $6 \times 10^{-7} \text{m}$ に比べ、だいたい20分の1となる。

実験装置は90度回転できるようになっており、回転しているうちに南北と東西が入れ替わる。光路差はプラスからマイナスへと、この倍変化するので、波長の10分の1程度光路差が変化する。ということは明線から明線までの距離の10分の1（明線から暗線までの距離の5分の1）の干渉縞の移動が見られるはずであった。ところが、実際にはそのずれが観測されず、エーテルの風は吹いていない、という結論になった。マイケルソンとモーレー、あるいは別の人々が実験装置を大きくしたり、光を何度も反射させて L を大きくしたりして、いろんな実験を行ったが、結果は常に予想される移動量よりも小さく出た（この移動は誤差の範囲内）。

いくつか、この実験結果への反論（および反論の反論）を紹介しておこう。

運動しながら光を出せばその光の速度は c ではないのでは？ つまり「実験装置が動いている場合の計算で速度を c にしているのが間違いなのではないのか」ということだが、例えば音の場合、音源が動いているからと言って音速は変化しない。音速が変化するとしたら、風が吹く（つまり媒質が運動する）か、観測者が動くことによってみかけの音速が変化するか、どちらかである。今は媒質の運動しているかどうかを観測する実験をやっているのである。なお、 $t_{\text{東西}}$ の計算では $c+v$ や $c-v$ が現れているが、これは光速が変化しているのを意味しているのではなく、棒の両端（光源ではなく、光を受ける方）が動いているために到達時間がのびたり縮んだりしていることのあらわれである。式(3.17)と式(3.18)の作り方をよく見てみよう。

たまたま、エーテルの移動と地球の移動が同じ方向だったのでは？ だとしたら、その6ヶ月後に同じ実験をしたら、公転速度の二倍分、エーテルに対して地球は移動しているはずである。しかし、そんなことはなかった。

エーテルが地球といっしょに運動しているのでは？ この実験だけを説明するのなら、「エーテルは地球表面といっしょに運動しているので、地球上で実験してもエーテルの運動は検出できない」という考え方で説明できる。しかし、そうだとすると地球表面でエーテルが渦巻くような流れを作っていることになり、外から地球にやってきた光は、地表面近くのエーテルの流れに流されることになる。これでは、我々が見ている星の位置は、地上のエーテルの流れに流された分ずれることになってしまう。しかし、そんな現象は確認されていない。

実験の精度が悪かったのでは？ 実験というのは、「これを判定するためにはこれだけの精度が必要である。ゆえにこのように実験装置を組み立てる」という計画を持って行うものである。マイケルソンらも、上に書いたような「光の干渉縞はどれだけ移動するはず」という予想をもって、誤差の精度がその予想より小さくなるように注意して実験を行っている。「古い実験だから精度が悪い」などということはない。また、この実験自体は現在でも（光にレーザーを用いるなど、さまざまな改良をしたうえで）行われているので、「古い実験だから」などという反論は、そもそも成立しない。

3.4 ローレンツ短縮

マイケルソン・モーレーの実験でエーテルの速度が検出されなかったことは、物理学者たちに衝撃と困惑を与えた。ローレンツは $t_{\text{東西}}$ と $t_{\text{南北}}$ が $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ 倍違うことから、「東西方向の棒の長さは

$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ 倍に縮んでいる」という説を唱えた。これが古い意味での「ローレンツ短縮」である。

本によっては、「ローレンツ短縮」を相対論の帰結である、と説明しているが、ローレンツはあくまで実験を説明するために ad hoc⁴にこの短縮を導入したのであって、相対論の帰結として理論的に導き出したわけではない。

もう一つ注意しておく。このローレンツ短縮という考え方では、マイケルソン・モーレーの実験について説明することは可能だが、そのほかの実験を説明するにはこれでは足りない。「ローレンツ変換」はその一部として「ローレンツ短縮」と同様の現象を含んでいるが、より広い意味がある。

「ローレンツ短縮」も「ローレンツ変換」も、アインシュタインではなくローレンツの名前がついている。どちらもアインシュタインより前にローレンツが提出しているからである。しかしローレンツは（同様にこのあたりの研究をしていたポアンカレもそうなのだが）「ローレンツ短縮」を、例えば「エーテルの圧力によって物体が縮む」というような、力学的な意味での短縮だと考えていた。「ローレンツ変換」に関して「こう考えればうまくいく」という提案であって、その意義を理解してはいない。後で出てくるアインシュタインによる考え方とはその点が違うので注意すること。

3.5 現代における光速度不変

マイケルソン・モーレーの実験は100年以上前の実験であり、当時の実験技術の粋をこらして実行されたものとはいえ、現代の技術でならばもっと精密な実験が可能である。もちろんそのような実験も行われており、マイケルソンとモーレーの実験に比べると精度は10万倍に上がっている⁵。もちろん、光速度不変の原理を疑うに足る証拠はまったくない。

しかし、現代ではもっとシンプルな方法で光の速さを測定できる。「A地点で光を発射してB地点で受ける。A地点とB地点の距離をかかった時間で割る」という方法である。マイケルソン・モーレーの実験ではエーテル風の影響は $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ のオーダーであったが、このような直接測定を行えば $\frac{v}{c}$ のオーダーで影響が出る。一方、現在の原子時計が 10^{-7} 秒ぐらいの精度で時間を測ることができる。

逆に、「光がこれだけの遅れで伝わってきたからA地点とB地点の距離はこれこれである」という原理で現在位置を測定する機械がある。カーナビなどで使われているGPS(Global Positioning System)である。GPSは複数の人工衛星からの電波を受信して、その電波が発信源からどれくらい遅れて到着したかということを計算して自分の位置を測る。衛星Aからの電波が衛星Bよりの電波に比べてより遅れているのなら、自分は衛星Bの近くにいと判断する、という具合である。このような機械がうまく動作するためには「光速が一定である」という大前提がなくてはならない。衛星は頭上2万キロぐらいの高さを回っている。カーナビの精度は数メートルぐらいであるから、 10^{-7} の精度で距離が測定できていることになる（誤差の原因は、電波が大気中を通る時の速度変化と、軍事利用されないためにわざと混入されている誤差）。エーテルの風が吹くという考え方がもしも正しいならば、GPSの衛星から来る電波の速度が季節によって 10^{-4} ぐらい変化してしまうことになるので、 10^{-7} の精度で距離を測ることなど、とてもできない。つまり、現在我々の生活に直接関係する部分でも、エーテルが存在しないことを前提とした機械が使われており、しかも何の問題もなく動作しているということになる。すくなくとも現在の実験のレベルにおいて、光速度不変を疑うことはもはやできない。もちろん今後実験精度がさらにあがった時に何か変なことが発見される可能性は零ではな

⁴「その場のしぎ」という意味の言葉。科学でなにかの現象を説明するために急ごしらえで作った説などを「ad hoc 仮説」などと言う。

⁵むしろ、マイケルソン・モーレーの実験器具は干渉を用いて精密に距離を測定する方法として使われることも多い。光速が一定であることを逆手にとって利用して、距離をはかる手段に使うのである。重力波の観測機器にも使われている。

いが、それを言い出せば、もともと物理における全ての法則は実験精度の範囲内では保証されていないのは当然のことである。

第4章 光速度不変から導かれること

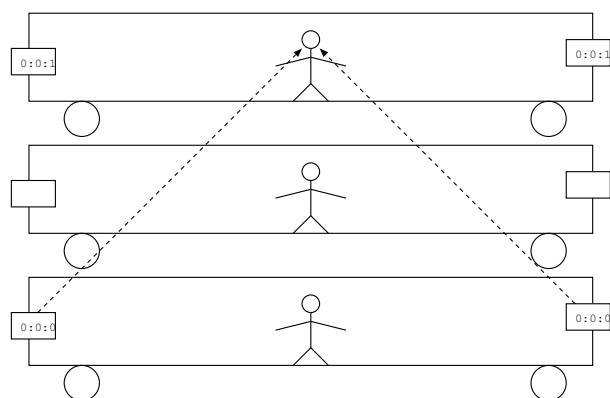
前章で、マックスウェル方程式がガリレイ変換で不変でないということを述べた。この解釈として、

1. マックスウェル方程式は特定の座標系でしか成立しない方程式であると考える。
2. ガリレイ変換が正しくないと考える。

という二つの方向性があり得る。しかし前者は実験により否定されてしまったので、後者を考える必要がある。マイケルソン・モーレーおよびそのほかの実験の結果として「光速はどのように動きながら測っても c である」という事実がある。つまり、マックスウェル方程式は全ての慣性系で成立していると考えべきなのである。だから、それにあうように理論を作らなくてはならない。よってガリレイ変換の方を修正する必要があるのである。

アインシュタインは「物理法則は全ての慣性系で同じである」という要請を特殊相対性原理と呼んだ。この物理法則の中にマックスウェル方程式も入っているとすれば、これは光速度不変の原理を含んだ原理である。そしてこの原理が成立するためには、ガリレイ変換ではない座標変換を作らなくてはならない。

4.1 同時の相対性



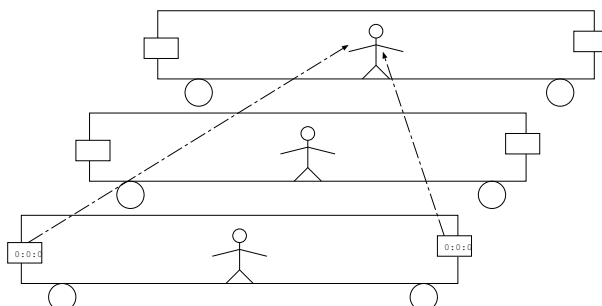
長さ $2L$ の電車を考える。ただし、今はこの電車は動いていない。中央に人間が立っている。前方の端（人間からの距離 L ）と後方の端（人間からの距離は L で同じ）に電光掲示板式の時計があるとする。今、ある時刻（図では0時0分0秒とした）を示す時計の光は、時間 $\frac{L}{c}$ 後（図では1秒後として書いた）に中央の人間に到達する。つまりこの瞬間（図では0時0分1秒である）、中央の人はどちらの時計を見ても0時0分0秒という目盛を読めることになる。

この現象を、動きながら見たらどうであろう。

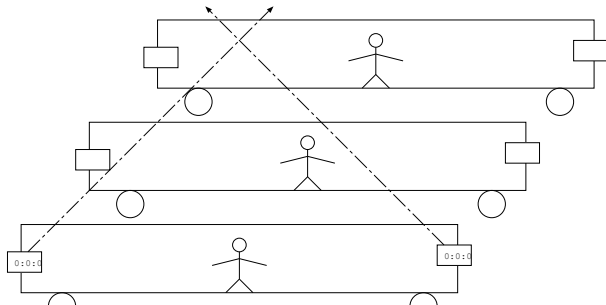
今、電車前方から後方へ向かう方向へと移動して

いる観測者がこの現象を観測したとする。この観測者から見ると、電車は前方に向けて運動しているように見える。

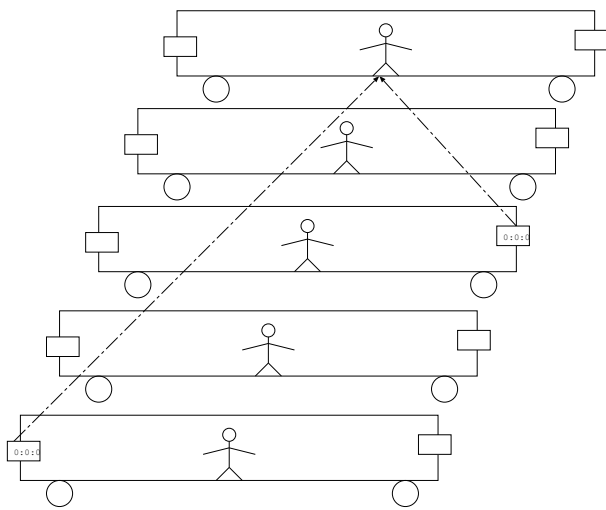
ガリレイ変換的な考え方（つまりは我々の直観に訴える考え方）からすると、前方から出た光は、観測者の運動と同方向に伝播することになるので、観測者の速度の分遅くなる。同様に後方から出た光は観測者の速度の分遅くなる。一方、光が到達するまでの間に電車の中央は前方に移動する。それゆえ、結局は同時刻に出た光が同時刻に中央に到達する、ということにな



る。この二つの図は、どちらも同じ現象を表しているのである。上の図は止まっている電車を見ている図で、下の図は止まっている電車をわざわざ走りながら見ている図である。



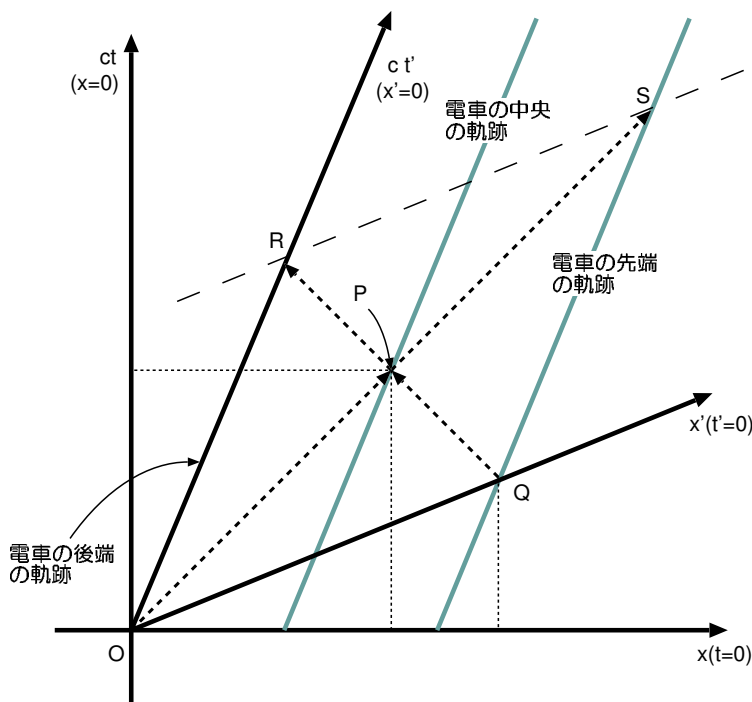
しかし、実験事実はこのような（直観的に正しく思える）考え方を支持しない。実験によれば光速度は一定であるから、「後方から出た光は観測者の速度の分速くなる」などという現象は起きない。では、左図のようになるのだろうか。だが、これもおかしい。なぜなら、この図では光が中央に到着するのは同時ではない。同じ現象を見方（観測者の立場）を変えて見ていただけであるということに注意して欲しい。中央の人は「自分には同時に光が到着した」と思うはずだ。そして、その現象は電車の中の人が見ようが外の人が見ようが変り得ない。



くることを意味する。

満足のいく解釈は、前方と後方で時間がずれていると考える他はない。つまり、「同時刻」という概念は観測者に依存するのである。したがって、動いている人にとっての時刻 t' が一定になる線（1+1次元で考えているので線だが、3+1で考えていれば3次元超平面）は、時刻 t が一定の線に対して「傾く」ということになる。

ガリレイ変換の時は、 t 軸（ $x = \text{一定の線}$ ）と t' 軸（ $x' = \text{一定の線}$ ）は傾いたが、 x 軸と x' 軸は同じ方向を向いていた。しかし、相対論的な座標変換においては、 t 軸も x 軸も、両方が傾かなくては行けない。そうでないと、光速度一定を満たすことができない。式で考えると、これは t' の式の中に x, t の両方が入って



そのまま突き抜けて、後端に達した時空点を R とする。

では次に、どれくらい座標系が傾かなくては行けないかを作図で示してみよう。作図を楽にするために、縦軸は t, t' ではなく、これに光速度 c をかけた ct, ct' とする。こうすると、縦軸と横軸は同じ次元になると同時に、光の進む線がグラフの上ではぴったり 45 度の線になる（光は単位時間に c 進むから）。

図の (x', t') 座標系が電車の静止系である。 $x' = 0$ の線、すなわち $t' = 0$ の線が電車の後端の軌跡に重なるようにした。光が中央で出会ったのは時空点 P であるとする。電車の前端からも光が出た P に到達したわけだが、前端から光が出たその瞬間の時空点を Q とした。電車の静止系で見ると、前端と後端から光が出た瞬間（O または Q）は同時刻である。ここで、 $Q \rightarrow P$ と来た光がそのまま突き抜け

て、前端に達した時空点を S とする。OR と QS は、どちらも同じ電車の一部の運動を表しているの
 で、平行線である。また、RS と OQ は、どちらも電車にとっての「同時刻」線であり、電車は一様
 な運動をしているのだから、平行線である。よって ORSQ は平行四辺形なのだが、ここで P 点での
 QR と OS の交わりを考える。この二つの線分はどちらも 45 度の斜め線であるから、直交している。
 対角線が直交する平行四辺形は菱形である。このことは、このグラフ上における x' 軸と x 軸の角度
 が、 ct' 軸と ct 軸の角度と等しいことを意味する。つまり、この図は $x \leftrightarrow ct$ という取り替え（図で言
 うと、45 度線を対称軸とした折り返し）で対称である。

ct' 軸状では $x - vt = 0$ が成立するのだから、

$$x - \frac{v}{c}(ct) = 0 \leftrightarrow ct - \frac{v}{c}x = 0 \tag{4.1}$$

という対称変換をほどこすことで、 x' 軸の上では $ct - \frac{v}{c}x = 0$ が成立していることがわかる。

ゆえに、

$$x' = A \left(x - \frac{v}{c}ct \right) \tag{4.2}$$

$$ct' = B \left(ct - \frac{v}{c}x \right) \tag{4.3}$$

となることがわかる。さらに、どちらの座標系でも光速が c であるということから $A = B$ であるこ
 とがわかる。なぜならば、 x 座標系で原点から右へ進む光の光線上では、 $x = ct$ が成立する。この式
 が成立する時、 x' 座標系では $x' = ct'$ が成立しなくてはおかしい（光速度不変）。(4.2) と (4.3) に、
 $x = ct$ と $x' = ct'$ を使うと、

$$A \left(ct - \frac{v}{c}ct \right) = B \left(ct - \frac{v}{c}ct \right) \tag{4.4}$$

となる。つまり、 $A = B$ でなくてはならない。ここまでの結果は、

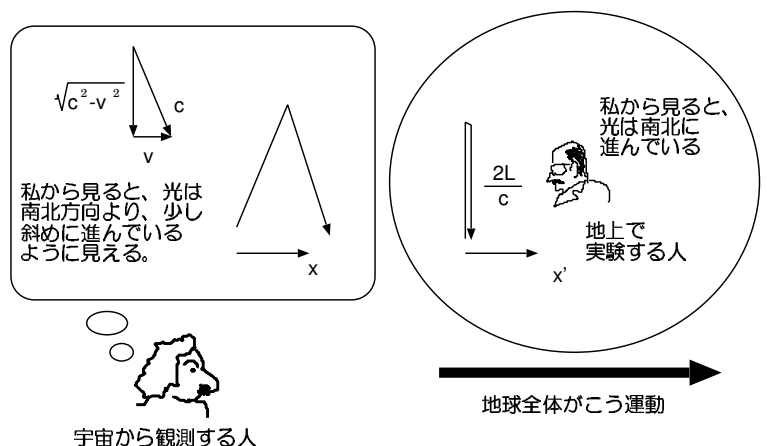
$$x' = A \left(x - \frac{v}{c}ct \right) \tag{4.5}$$

$$ct' = A \left(ct - \frac{v}{c}x \right) \tag{4.6}$$

である。相対論以前の「常識」に従えば、 $A = 1$ と言いたいところである（ $A = 1$ ならば、 x' の式に関
 してはガリレイ変換と一致することになる）。しかし、そうはいかない。この A の値は、次の節の考
 察によって決まる。

4.2 ウラシマ効果

マイケルソンとモーレーの実験における、
 南北方向の光について思い出す。実験装置
 が動いていないという立場（地上にいる人
 の立場）で観測すると、距離 $2L$ を光が進
 むので、往復に $\frac{2L}{c}$ かかる。一方同じ現象
 を、装置が速さ v で東に動いているという
 立場（地球外の人々の立場）で観測する。こ
 の人にとっては光は南北方向にはではなく、
 少し斜めに（光の速度ベクトル c と地球の



速度ベクトル v が図に書いたような関係に

なるように) 進んでいる。この人にとっての光の速度の南北方向成分は $\sqrt{c^2 - v^2}$ になる (当然 c より遅い)。

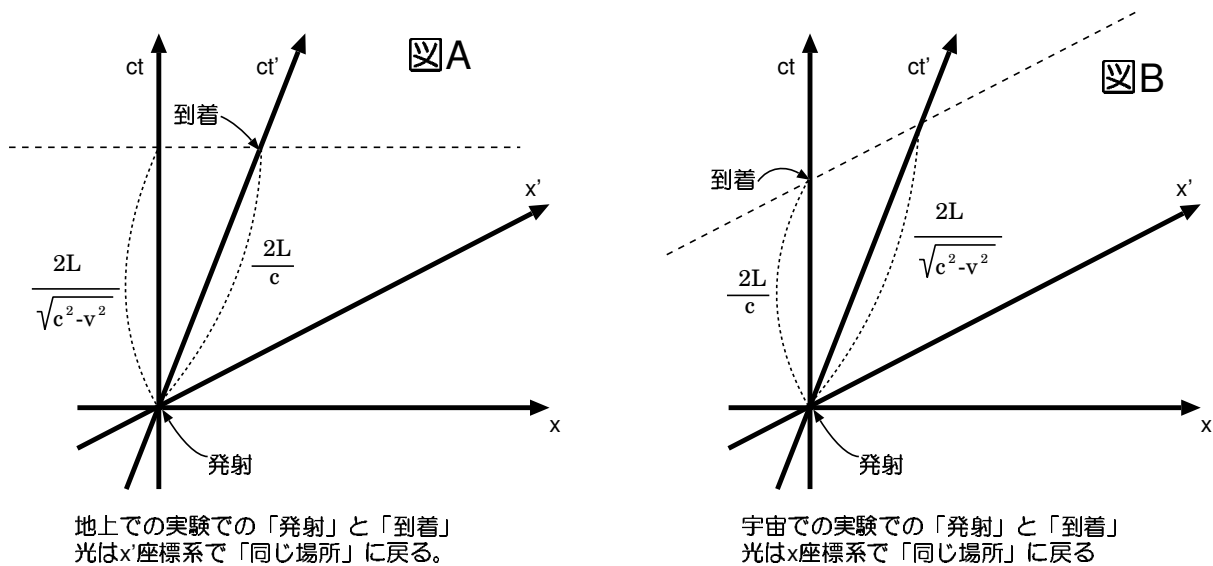
ゆえにこの時に光が発射されてから到着するまでの時間は $\frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ となる (L は南北方向の距離であることに注意せよ)。つまり、地球外の人の方が同じ現象にかかった時間を $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 倍だけ、長く感じることになる。

このように、動いている人 (この場合は地球上にいる人) の時間は止まっている人 (この場合は宇宙から観測する人) の時間より遅くなることになる。これを浦島太郎の昔話になぞらえて、ウラシマ効果と呼ぶ。

今、地上の立場を x' 座標として考えると、発射は $x' = 0, t' = 0$ であり、到着は $x' = 0, t' = \frac{2L}{c}$ となる。これを (4.5) と (4.6) に代入して考えると、地球外の立場 (x 座標系) では発射が $x = 0, t = 0$ であり、到着が $x = A'v \times \frac{2L}{c}, t = A' \times \frac{2L}{c}$ となる。ゆえに、 $A' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ということになる。

なお、立場を逆にして、宇宙の方で南北方向に光を往復させたとすると、宇宙ではその時間を $\frac{2L}{c}$ と感じ、地上では $\frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ と感じるということになる。これを使えば同様の計算により、 $A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ とわかる。

ここで、地上でも宇宙でも相手の方が時間が遅いと感じるなんておかしい、と思うかもしれないが、次のように考えるとおかしいところは何も無い。



地上での実験での「発射」と「到着」
光は x' 座標系で「同じ場所」に戻る。

宇宙での実験での「発射」と「到着」
光は x 座標系で「同じ場所」に戻る

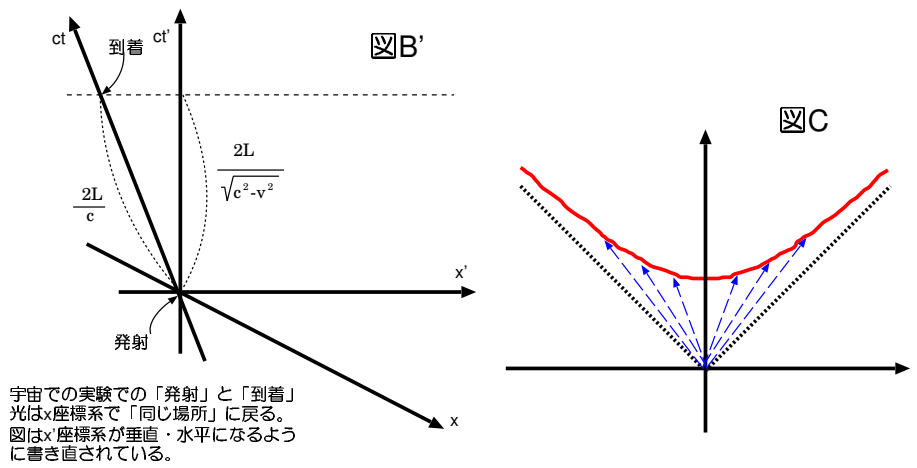
地上で実験する場合、光の発射と到着は図 A に矢印で「発射」と「到着」と示した 2 つの時空点である。この場合、 x' 座標系で見て同じ場所に光が戻っている。 x 座標系でみれば、同じ場所に光は戻っていないことになる。一方、宇宙で実験する場合 (図 B) の「発射」と「到着」は、 x 座標系で見て同じ場所に光が戻る (x' 座標系では同じ場所に戻らない)。

どちらで実験する場合も、実験装置と共に動いている方は、 $\frac{2L}{c}$ という時間を観測する (これは相対性原理からして当然)。もう一方は、その時間を、「自分の時間」を使って測定するのだが、互いの同時刻面は相手に対して傾いている。その傾きがゆえに、双方が「おまえの時間の方が遅い」と判断することになるのである。

図B'は、図Bを、 $x'-t'$ 座標系が垂直になるように書き直したものである。 ct 軸に関しては図Bを左右逆転したような図になっている(速度逆向きの座標変換だから)。

また、図C中の点線は原点からいろんな速度で出発した人の時計が同じ時刻を刻む時空点を線をつないだものである。速く動く人ほど持っている時計は遅く進むので、垂直に対して傾いた軌道をとっている人ほど、止まっている人との時間差が大きくなる。

結局、 $x'-t'$ 系での同時が $x-t$ 座標系から見ると傾いていて $x-t$ 座標系での同時と同じではないため、このように「互いに相手の時間を短く感じる」という一見矛盾した結果が出る。



宇宙での実験での「発射」と「到着」
光はx座標系で「同じ場所」に戻る。
図はx座標系が垂直・水平になるように書き直されている。

4.3 (新しい意味での) ローレンツ短縮

以上をまとめて、

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \tag{4.7}$$

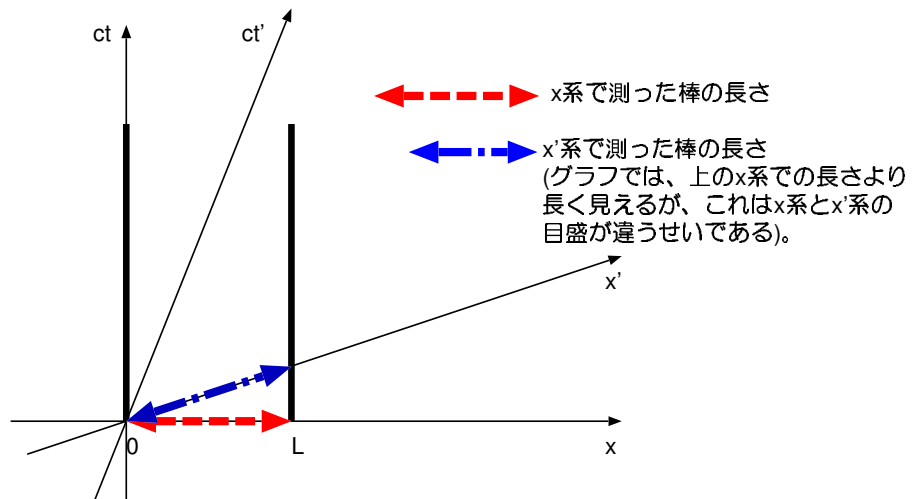
$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \tag{4.8}$$

(ただし、 $\beta = \frac{v}{c}$ 、 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$) という形の座標変換をすれば、どの座標系でも光速は一定値 c を取ることがわかった。

[問い10] この逆変換の式 ((x', t') から (x, t) を求める式) を求めよ。

この座標変換を最初に導いたのはアインシュタインではなくローレンツなので、これを「ローレンツ変換」と呼ぶ。ただし、ローレンツはこの変換における新しい座標での時間 t' を「局所時」と呼んで、本当の意味の時間ではないと考えていたらしい。

ローレンツが ad hoc に導いたローレンツ短縮と似た現象が、この座標変換でも導かれることを示そう。今、一つの棒を $x-t$ 座標系で見ると静止するように置いたとする。棒の長さを L として、一方の端を $x = 0$ 、もう一方の端を $x = L$ に置いたとする。時間 t が経過してもこの x の値は変化しない。では、これを x' 座標系で見るとどうか。棒の一方の端の時空座標を (x_1, t_1) または (x'_1, t'_1) で、もう一方の端の時



空座標を (x_2, t_2) または (x'_2, t'_2) で表すとすれば、

$$(x_1, t_1) = (0, t) \leftrightarrow (x'_1, t'_1) = (-\gamma\beta ct, \gamma ct) \tag{4.9}$$

$$(x_2, t_2) = (L, t) \leftrightarrow (x'_2, t'_2) = (\gamma(L - \beta ct), \gamma(ct - \beta L)) \tag{4.10}$$

となる。

ここで x' 座標系で棒の長さを測るとしよう。「 x' 座標系での棒の長さ」は $t'_1 = t'_2$ にした時の $x'_2 - x'_1$ で計算される。上の表の (x'_1, t'_1) と (x'_2, t'_2) では、 $t'_1 \neq t'_2$ なので、 t_2 の方の時間を $t \rightarrow t + \frac{\beta}{c}L$ とずらして、

$$(x_2, t_2) = (L, t + \frac{\beta}{c}L) \leftrightarrow (x'_2, t'_2) = (\gamma(L - \beta ct - \beta^2 L), \gamma ct)$$

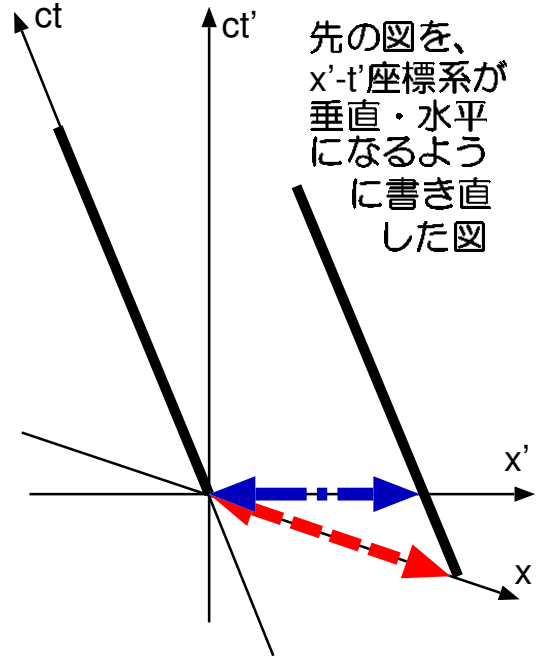
とすれば、 $t'_1 = t'_2$ になる。この時の $x'_2 - x'_1$ を計算すると、

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(L - \beta^2 L) = L \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = L\sqrt{1 - \beta^2} \tag{4.11}$$

となり、 x 系での長さ L に比べ、 $\sqrt{1 - \beta^2}$ 倍になっている（縮んでいる）ことがわかる。

この式は形としてはローレンツがマイケルソン・モーレーの実験結果を説明するために導入した短縮と同じであるが、根本的に意味が違う。まず、ローレンツはエーテルとの相対運動が理由で機械的に短縮が起こると考えたが、ここでの短縮は座標変換によって生じたものであって、力が働いて起こる短縮とは全く意味が違う。また、図で説明してあるように、座標系が違うことによって「同時刻で空間的に離れた2点」という2点の定義の仕方そのものが変わってくる。ガリレイ変換ではこんなことは生じない。古い意味のローレンツ短縮はガリレイ変換を使った物理の中で考えられたものだから、同様に「座標系が違えば同時刻が違う」ということを考慮せずに単に短縮すると仮定している。

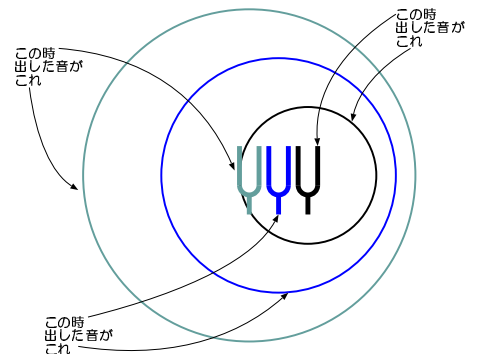
何よりここで導かれた短縮は光速度不変の原理と特殊相対性原理から自動的に導出されたもので、筋道だった説明が与えられていることが大きな違いである。



4.4 ドップラー効果

ドップラー効果については音の方が有名である。まず音の場合のドップラ 効果がどのような現象であるかを思い出す。そこでまず気をつけて欲しいのは、「ドップラ 効果」と呼ばれている現象は実は二つの現象を合わせたものだということである。それは

1. 音源が移動していることによって、波長が変化し、結果として振動数が変化する。
2. 観測者が移動していることによって、見掛けの音速が変化し、結果として振動数が変化する。

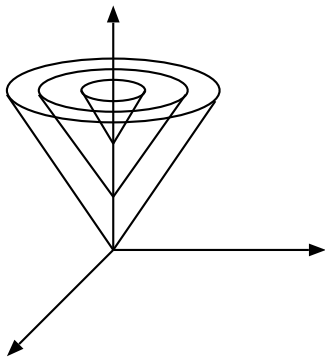


振動数 f は波長 λ と音速 V によって、 $f = \frac{V}{\lambda}$ と書かれる。1. は、この式の分母の変化である。図で書けば右のようになる。これは音源が動きながら音を出している様子である。音源が動いても、まわりの空気（音の媒質）はいっしょに動いているわけではないので、音を出した場所を中心として球状に（図では円状になっている）広がる。音が広がるまでの間に音源が移動しているの、前方では波がつまり（波長が短くなり）、後方では波が広がる（波長が長くなる）。

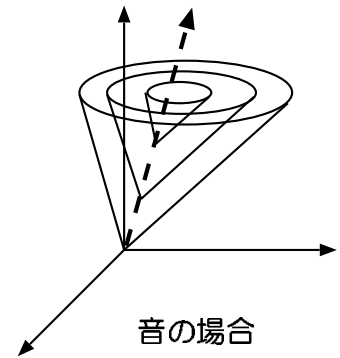
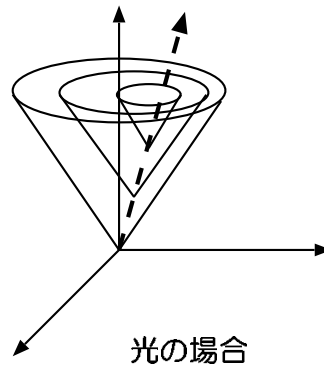
これに対して2. は、 $f = \frac{V}{\lambda}$ の分子の方の変化である。同じ波長の波が来たとしても、自分が波に立ち向かっていくなれば、1秒間に遭遇する波の数が増える。逆に波から遠ざかるならば、波の数が減る。

しかしこのような説明を聞いた後で、「さて光の場合のドップラー効果はどうなるのか」と考えると、ちょっと不思議なことに気づくだろう。音の場合、観測者の運動によって音速が変わる（2の場合）、だから音の振動数が変化するわけである。しかし光の場合、そんなことは起きない（光速不変の原理！）。では光の場合、「観測者が運動している場合のドップラー効果」は存在しないのか。もちろんそんなことはない。以下で、まず図を書いて考えてみよう。

静止した物体の出す波



同じ現象を動きながら見ると?

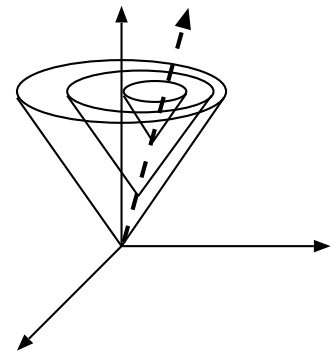


上左の図は、静止した波源から波（光もしくは音）が出ている状況の時空図である。波は上下左右前後に（図では例によって空間軸を一つ省略している）均等に広がっていく。それゆえ、異った時刻に発生した波の波面は同心球（図では同心円）を描く。

これを動きながらみたらどのように見えるかを表したのが上中、上右の図であり、それぞれ光の場合と音の場合である。光の場合、光速不変により、光円錐は傾かない。しかし、波源（光源）が刻一刻動いているので、今度は同心球とはならず、進行方向の前では波がつまり、後ろでは波が広がる。

音の場合はどうかというと、波源（音源）の動きと同じ速さで空気も動いているので、音の球はいわば、風に流される状態になる。ゆえに「音円錐¹」は風に流される分、傾く。音源と媒質が同じ速度で動いているので、波面は球状に広がりながら流されていき、同心球はたもたれる。つまりこの場合、波長は変化しない。しかし前方では波がそれだけ速くなっており、同じ波長でも速さが速い分振動数が多くなっている²。

今考えた二つ（上中、上右図）は同じ現象を動きながら見た場合であった。そのため、音の場合、音源と同じ速度で媒質（空気）



音源が動くが空気が動かない場合

¹実際にこんな言葉はない

²以上の音に対する計算では、座標変換にガリレイ変換を使っている。ほんとうはここもローレンツ変換を使うべきなのだが、音のようなせいぜい数百 m/s の話をしている時には、ローレンツ変換とガリレイ変換の差は非常に小さく、わざわざ計算が面倒なローレンツ変換を使う意味はあまりない。

が動いていた。では空気の中を音源が動くとうなるかを書いたのが右の図である。この場合、音円錐は傾かないが音源の動きのせいで波面が同心球にならない。つまりこの場合、波長が変化することで振動数が変化している（音速は変化していない）。

波の振動数 ν は波長 λ と波の伝わる速さ v で表すと $\nu = \frac{v}{\lambda}$ であるが、音の場合、波源が動いたならば λ が変化し、観測者が動いたら音速 v が変化する。光の場合、速さ v は変化しないので、変化は全て波長の変化に帰着される。しかし、その波長が変化する理由は実は二つある。一つは図に現れている、波と波の間隔が詰まるという現象である。もう一つ、いわゆるウラシマ効果によって、波源（光源）が波を出してから次に波を出すまでの間隔がのびる。この二つの効果によって光の波長が変化し、ゆえに振動数が変化するのである。このように、光速度不変（ c は観測者の速度によって変化しない）であっても、振動数や波長は観測者の速度によって変化する。

では、どのように光のドップラー効果が起こるかを、ローレンツ変換の式を使って計算してみよう。光の振動数（ただし、音源が静止している場合に出す光の振動数）を ν_0 とする。光源の静止系（ x' 系とする。）では、「山」を出してから次に「山」を出すまでの時間は $\frac{1}{\nu_0}$ であるから、光の「山」が出た時空点を $(x', y', z', ct') = (0, 0, 0, \frac{nc}{\nu_0})$ (n は整数) と考えることができる。これをローレンツ変換すると、 $(x, y, z, ct) = (\gamma\beta\frac{nc}{\nu_0}, 0, 0, \gamma\frac{nc}{\nu_0})$ となる。つまりこれが光源が動いている座標系において光の「山」が出た時空点である。

もっとも簡単な場合として、光源の進んでいく先にあたる場所 $(x, y, z) = (L, 0, 0)$ (L は大きく、まだ光源はここまで達していないと考える) でこの光を観測したとすると、光は出てから $L - \gamma\beta\frac{nc}{\nu_0}$ の距離だけ走ってこの場所に到達することになる。その時刻は

$$\underbrace{\gamma\frac{n}{\nu_0}}_{\text{山が出た時刻}} + \underbrace{\frac{L - \gamma\beta\frac{nc}{\nu_0}}{c}}_{\text{光が到着するのにかかる時間}} = \frac{L}{c} + \gamma(1 - \beta)\frac{n}{\nu_0} \quad (4.12)$$

である。 n が1違うと、この時刻は $\gamma(1 - \beta)\frac{1}{\nu_0}$ だけ違う。ゆえに、振動数は

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{\gamma(1 - \beta)} = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (4.13)$$

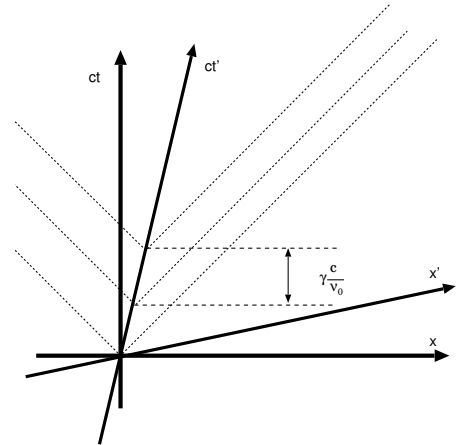
と変化していることになる。より一般的に、 $(L \cos \theta, L \sin \theta, 0)$ に来た光の振動数を考えよう。この場所に「山」がやってくる時刻は L が大きいとして近似すると、

$$\begin{aligned} \gamma\frac{n}{\nu_0} + \frac{1}{c}\sqrt{\left(L \cos \theta - \gamma\beta\frac{nc}{\nu_0}\right)^2 + (L \sin \theta)^2} &\simeq \gamma\frac{n}{\nu_0} + \frac{1}{c}\sqrt{L^2 - 2L \cos \theta \gamma\beta\frac{nc}{\nu_0}} \\ &\simeq \gamma\frac{n}{\nu_0} + \frac{1}{c}\left(L - \cos \theta \gamma\beta\frac{nc}{\nu_0}\right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる。 n が1変化するとこの時刻は $\frac{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}{\nu_0}$ 変化するので、振動数は

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \quad (4.15)$$

となる。



(ガリレイ変換を使った場合の)音のドップラー効果との顕著な違いは、進行方向に対して真横の方向へ進む光(上の式で $\cos \theta = 0$ に対応する)にも振動数変化があらわれることである。これはウラシマ効果によるもので、音ではそのような結果は出ない。これを「横ドップラー効果」と呼ぶ。銀河のいくつかはその中心核から「宇宙ジェット」と呼ばれる亜光速のガス流を出しているが、そのガスが出す光が横ドップラー効果を起していることが確認されている。

第5章 ローレンツ変換と4次元時空

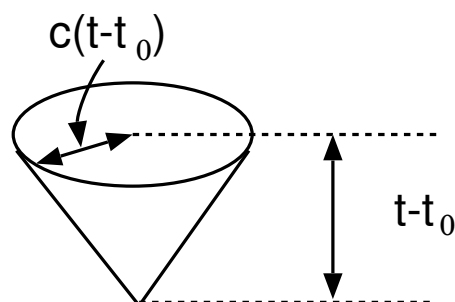
5.1 ローレンツ変換の数式による導出

この章ではローレンツ変換に関してグラフで行った議論を数式でもう一度まとめ、その物理的および幾何学的内容について考えていく。

まず、ローレンツ変換を計算により求めよう。ローレンツ変換が満たすべき条件として、次の3つを取る。

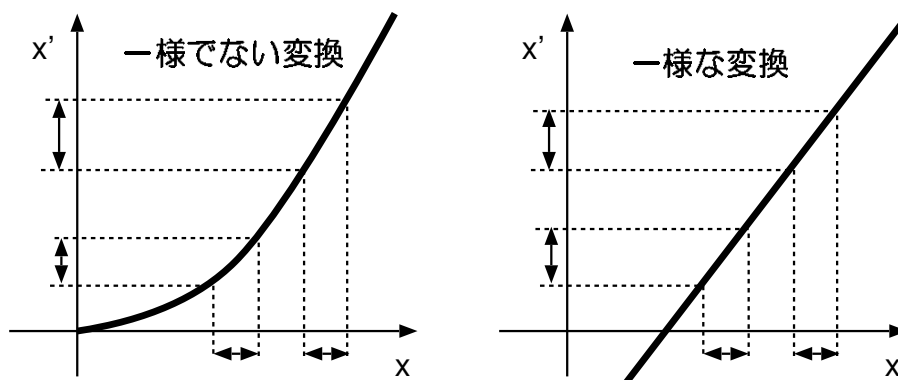
1. この変換によって、古い座標系での光円錐 $((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0)$ は新しい座標系でも光円錐 $((x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 - c^2(t' - t'_0)^2 = 0)$ へと移る (光速不変の原理)。
2. この座標変換において特別な点はない (一様性)。
3. この座標変換において特別な方向はない (等方性)。

1. が主張しているのは、光速不変の法則を満足せよ、ということである。ある時空点 (t_0, x_0, y_0, z_0) (x' 座標系では (t'_0, x'_0, y'_0, z'_0)) から光が出て、時空点 (t, x, y, z) (x' 座標系では (t', x', y', z')) にたどりついたとする。時刻 t (あるいは時刻 t') には、その光は $c(t - t_0)$ (あるいは $c(t' - t'_0)$) 広がっている。ゆえに $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0$ が成立するならば、 $(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 - c^2(t' - t'_0)^2 = 0$ も成立せねばならない。光速はどちらの座標系でも c なのだから (くだいようだがもう一度書く。これは実験事実である)。



2. が主張しているのは、この変換が一様であれ、ということである。

たとえば $x' = ax^2$ のような変換をしたとすると、 $x = 0$ 付近と、そこから遠い場所では、 x が変化した時の x' の変化量が違う。これはつまり、 x 座標系で測った1メートルが、 x' 座標系では場所によって10センチになったり3メートルになったりと、違う長さになるということである。しかし今考えているのは座標系の一様な運動であるから、こんなことは起こらない。この条件を満たすためには、 (x, y, z, ct) と (x', y', z', ct') が一次変換で結ばれなくてはならない。



3. が主張しているのは、たとえばこういうことである。 x 軸の正方向へ速さ v で運動している場合と、 x 軸の負方向へ速さ v で運動している場合を比べたとする。この二つは、最初に x 軸をどの方向

にとったかというだけの違いであって、物理の本質的な部分は変わらないはずである。つまり、ある方向へ移動する座標系だけが特別扱いされるようなことはあってはならない。

以下で、これらの要請だけからガリレイ変換に替わる新しい座標変換を導く。

x' 系の空間的原点 $x' = y' = z' = 0$ が、 x 座標系で見ると速度 v で x 軸方向に移動していて、時刻 $t = 0$ では原点が一致しているとする。このことから、 $x' = 0$ という式を解くと、 $x = \beta ct$ という答えが出るようになっていくことがわかる。この条件はガリレイ変換 $x' = x - vt$ でも成立する。2. の条件があるので、

$$x' = A(x - \beta ct) \quad (5.1)$$

という形でなくてはならないことがわかる。 y 方向、 z 方向には座標軸は移動していない。つまりこの座標変換で、 $y = 0$ である場所は $y' = 0$ である場所に移る。 z についても同様なので、

$$y' = By, \quad z' = Bz \quad (5.2)$$

となるべきだろう。ここで、簡単のために y 軸や z 軸の方向も変わらないとした。この二つの式の係数がどちらも B なのは、空間の対称性から判断した。

しかし、要請 3. から、 B は 1 でなくてはならないことがわかる。 B が 1 でなかったとすると、この座標変換によって y 軸や z 軸方向の長さが伸びたり ($B > 1$ の場合)、縮んだり ($B < 1$ の場合) することになる。運動方向を反転 ($v \rightarrow -v$) したとしよう。この時の変換は元の変換の逆変換であるから、 $y'' = \frac{y}{B}$, $z'' = \frac{z}{B}$ という形になる。つまり $+x$ 方向では B 倍になったとしたら、 $-x$ 方向では $\frac{1}{B}$ 倍でなくてはならない。 $B \neq 1$ だと、この現象は要請 3. に反する。

時間座標に関しては、

$$ct' = C(ct - Dx - Ey - Fz) \quad (5.3)$$

と置いてみる。以上の座標変換に対して、要請 1. すなわち「 $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ の時に $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2 = 0$ になれ」という条件が成立するためには A, C, D, E, F がどうならなくてはいけないかを考える。そのためにまず $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (ct')^2$ を計算しよう。

$$\begin{aligned} (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (ct')^2 &= A^2(x - \beta ct)^2 + y^2 + z^2 - C^2(ct - Dx - Ey - Fz)^2 \\ &= (A^2 - C^2D^2)x^2 + y^2 + z^2 + (A^2\beta^2 - C^2)(ct)^2 \\ &\quad - (2A^2\beta - 2C^2D)xct - 2C^2Eyct - 2C^2Fzct \\ &\quad + \dots (y, z \text{ の 1 次, 2 次を含む項}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

ここで、条件 $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ であることを思い起こす。よってここでは x, y, z が独立な変数であって、 ct は $ct = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であるとして扱う。 x, y, z は各々独立に動かせるから、 xct, yct, zct の係数は零でないと困る。これから、 $E = F = 0$ と $A^2\beta - C^2D = 0$ がわかる。そこで $D = \frac{A^2\beta}{C^2}$ と代入して、

$$\begin{aligned} 0 &= \left(A^2 - \frac{A^4\beta^2}{C^2}\right)x^2 + y^2 + z^2 + (A^2\beta^2 - C^2)(ct)^2 \\ 0 &= \left(A^2 - \frac{A^4\beta^2}{C^2}\right)x^2 + B^2y^2 + B^2z^2 + (A^2\beta^2 - C^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ 0 &= \left(A^2 - \frac{A^4\beta^2}{C^2} + A^2\beta^2 - C^2\right)x^2 + (1 + A^2\beta^2 - C^2)y^2 + (1 + A^2\beta^2 - C^2)z^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

ここで x^2 の係数は 0 にならなくてはならないが、

$$\begin{aligned} A^2 - A^4\beta^2C^2 + A^2\beta^2 - C^2 &= 0 \\ A^2 - C^2 - \frac{A^2\beta^2}{C^2}(A^2 - C^2) &= 0 \\ (A^2 - C^2)\left(1 - \frac{A^2\beta^2}{C^2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

となるから、 $A^2 = C^2$ か、 $\frac{A^2\beta^2}{C^2} = 1$ かが成立せねばならない。しかし $\frac{A^2\beta^2}{C^2} = 1$ だと、 y^2 の前の係数が1になってしまい、けっして0にならない。そこで、 $C^2 = A^2$ として、

$$1 = C^2 (1 - \beta^2) \quad (5.7)$$

という式が成立する。これで座標変換は

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x - \beta ct), y' = y, z' = z, ct' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(ct - \beta x) \quad (5.8)$$

とまとめられる。当然ながら、図から求めたものと一致する。

なお、ここまでの計算では簡単のために運動方向を x 方向に限ったし、 y, z 座標に関しても同じ方向を向いているとした。よって一般的には運動方向が任意の方向を向いたものや、これに座標軸の回転が組み合わさったものが出てくる。

5.2 行列およびテンソル式で書くローレンツ変換

座標変換を

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0^0 & \alpha_0^1 & \alpha_0^2 & \alpha_0^3 \\ \alpha_1^0 & \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^0 & \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^0 & \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

と書いて、 α^μ_ν (μ, ν は 0, 1, 2, 3 を取る) の満たすべき条件を考えていこう。

短く書くならば、

$$(x')^\mu = \alpha^\mu_\nu x^\nu \quad (5.10)$$

である (アインシュタインの規約をつかった)。このように足し上げられている (つまりほんとうは \sum があるのに省略されている) 添字は「つぶされている添字」と言ったり「ダミーの添字」と呼んだりする。

なぜ「ダミー」などと、一人前の添字扱いしてもらえないかという、これは $A_0B^0 + A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3$ と書くのが面倒なので $A_\mu B^\mu$ と書いているだけであって、 μ という添字はあってなきがごときものだからである。またこれを「つぶれている」と表現するにも理由があるが、それは後で述べる。

前章で求めた座標変換の場合、

$$\begin{pmatrix} \alpha_0^0 & \alpha_0^1 & \alpha_0^2 & \alpha_0^3 \\ \alpha_1^0 & \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^0 & \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^0 & \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

である。例によって、 $\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ という記号を使った。

要請 1. の条件は

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 0 \text{ の時、 } \eta_{\mu\nu} (x')^\mu (x')^\nu = \eta_{\mu\nu} \alpha^\mu_{\mu'} x^{\mu'} \alpha^\nu_{\nu'} x^{\nu'} = 0 \quad (5.12)$$

と書くことができる。ただし、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

である。

ここで具体的な例について $\eta_{\mu'\nu'}\alpha^{\mu'}\alpha^{\nu'}$ を計算してみよう。そのため、これを行列の計算に書き直す。2行2列の行列の計算が

$$\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^1_1 & B^1_2 \\ B^2_1 & B^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1B^1_1 + A^1_2B^2_1 & A^1_1B^1_2 + A^1_2B^2_2 \\ A^2_1B^1_1 + A^2_2B^2_1 & A^2_1B^1_2 + A^2_2B^2_2 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

で表されることと、掛け算の結果を行列 $\begin{pmatrix} C^1_1 & C^1_2 \\ C^2_1 & C^2_2 \end{pmatrix}$ で表すならば、この式は

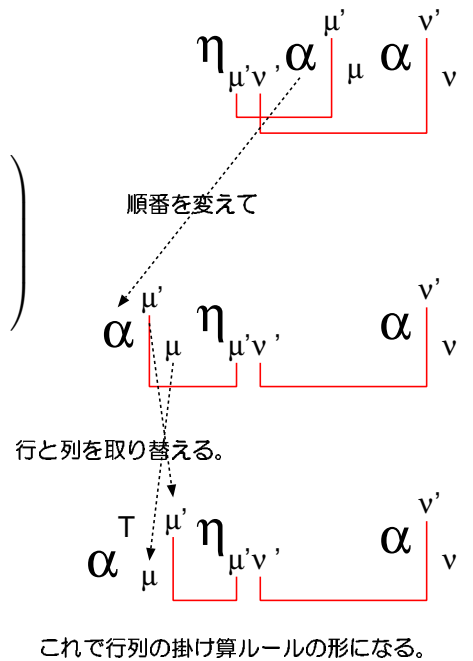
$$C^i_j = A^i \underbrace{B^1}_j + A^i \underbrace{B^2}_j = A^i \underbrace{B^k}_j$$

ダミーの添字

のように書けることを使う。つまり「前の行列の後ろの添字（列の添字）と、後ろの行列の前の添字（行の添字）が同じもの同志を掛け算し、その和を取る」というのが行列の掛け算のルールである。説明は2行2列の行列で行ったが、これらの計算ルール自体は、4行4列の行列であっても同様に使える。

ここで、 $\eta_{\mu'\nu'}\alpha^{\mu'}\alpha^{\nu'}$ の計算をする。掛け算のルールに合うようにするためには、1番左側にある α の行列が転置されていること、掛け算の順番が α^T, η, α の順であることを注意せよ。具体的に求めた (5.11) をこの式に代入してみると、

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -\gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.15} \end{aligned}$$



となる。つまりこの場合、 $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = 0$ という条件は必要でなく、一般的に

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'}\alpha^{\mu'}\alpha^{\nu'} \tag{5.16}$$

が成立していることがわかる。なお、 x, y 面内における回転を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

であるが、これらについても同様であることは、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

のような具体的計算で確かめることができる（反転に関しても同様）。一般のローレンツ変換は、 x 軸方向へのローレンツ変換に回転や反転を組み合わせることで表現できるので、全てのローレンツ変換でこれは成立する。

ここでわかった非常に大事なことは

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \quad (5.19)$$

ということ。すなわち、

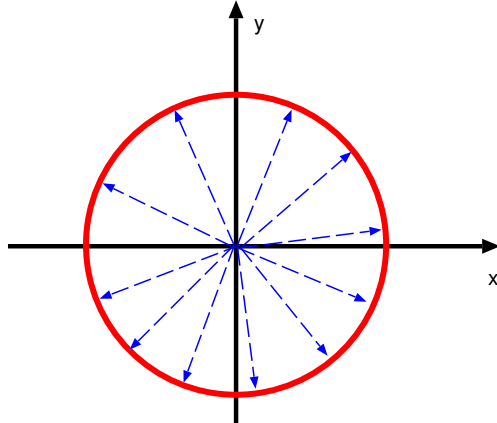
$$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (5.20)$$

がローレンツ変換の不変量である、ということである。このうち時間成分を除いた $x^2 + y^2 + z^2$ は3次元空間における距離の自乗であって、これは回転（および反転）という座標変換に対して不変であった。「距離の自乗」の4次元バージョンである $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ は回転・反転だけでなく、ローレンツ変換に対して不変となっている。なお、4次元的な距離の自乗を不変にする変換を（3次元的な回転や反転もひっくるめて）「ローレンツ変換」と呼ぶ場合もある。上で求めたような $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'} \alpha^{\mu'}_{\mu} \alpha^{\nu'}_{\nu}$ を満たす行列 $\alpha^{\mu'}_{\nu}$ で表される変換は、すべて広い意味でのローレンツ変換である。

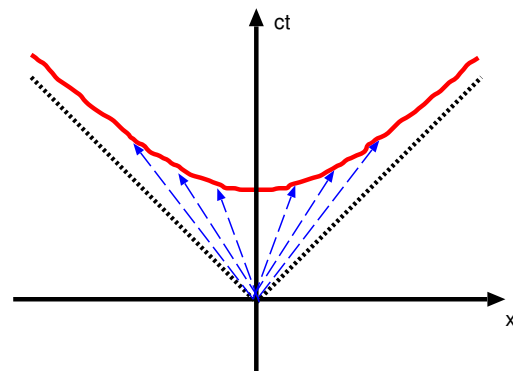
もともとローレンツ変換を求める時においた要請 1. は $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ の値の不変性ではなく、「 $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$ であれ」という条件の不変性であったが、要請 2. と要請 3. のおかげで、 $-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ そのものが不変でなくてはならなくなったのである。

下の図は、 (x, y) 面において $x^2 + y^2 = \text{一定}$ となる線と、 (x, ct) 面において $-(ct)^2 + x^2 = \text{一定}$ となる線を書いたものである。右の図は「等距離の点」には見えないが、4次元的な意味で「等距離の点」なのである。

原点から空間的な距離が一定の点



原点から時間的な距離が一定の点



5.3 ミンコフスキー計量

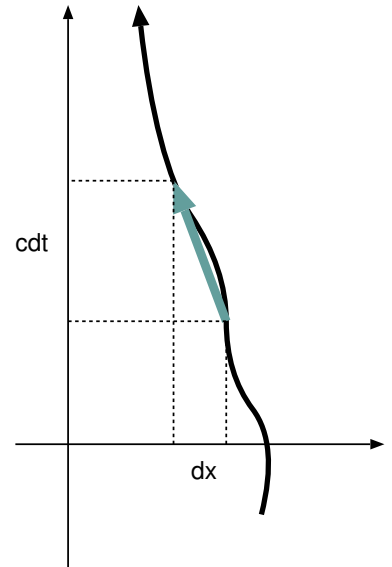
ローレンツ変換によって保存される量は3次元の意味での長さであるところの $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ではなく、4次元の意味での長さである。ある点 (t, x, y, z) と、それから(時間的にも空間的にも)微小距離だけ離れた点 $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ との間の距離を ds とした時、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{5.21}$$

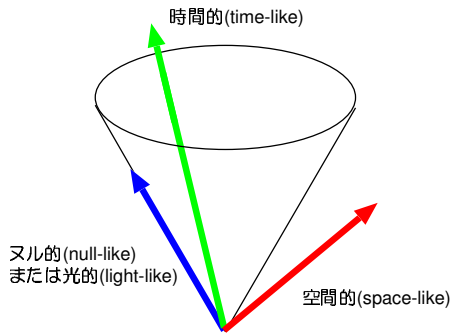
として、4次元の微小長さ(「線素」と呼ぶ)を定義する。

ds^2 はいろんな符号がありえる。符号によって

$ds^2 > 0$	$(cdt)^2 < dx^2 + dy^2 + dz^2$	空間的 (space-like)	(5.22)
$ds^2 = 0$	$(cdt)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$	ヌルの (null-like)	
$ds^2 < 0$	$(cdt)^2 > dx^2 + dy^2 + dz^2$	時間的 (time-like)	



のように4次元距離を分類する。「ヌルの」は「光的 (light-like)」と言う場合もある。



本によって、上の式を $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ と定義する場合 (timelike convention) と、 $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ と定義する場合 (spacelike convention) がある。前者は、通常の粒子の場合 $ds^2 > 0$ となる点が好ましい。後者は、3次元部分だけを見るとユークリッド空間での線素の長さ $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ と等しい点が好ましい。どちらを使うかはその人の流儀であって、どちらを使っても物理的内容に違いはない。ここでは spacelike convention の方を使う。

このようにして距離が定義された空間をミンコフスキー空間といい、この空間での距離の計算の仕方を示す $\eta_{\mu\nu}$ という記号のことを「ミンコフスキー計量」と言う。ちなみに、普通の、距離が

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{5.23}$$

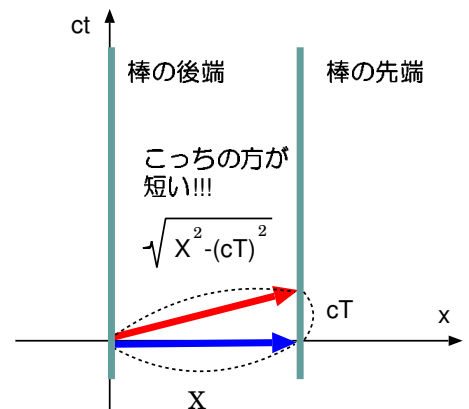
で定義された空間は「ユークリッド空間」(正確には「3次元ユークリッド空間」)と呼び、行列

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ はユークリッド計量と呼ぶ。}$$

この「4次元の距離」という考え方をすると、ローレンツ短縮やウラシマ効果を別な形で理解することができる。ローレンツ短縮は、「動いている棒は長さが縮む」という現象である。右の図は、棒が静止している座標系で、棒の先端と後端の軌跡を示した。図の水平矢印は、棒と同じ動きをしている人が観測する「棒の長さ」である。

次に、棒に対して動いている人を考える。同時の相対性により、この観測者の同時刻は傾いている。この人が棒の長さを測る時には、自分にとっての同時刻を基準に測るのであるから、「棒の長さ」は図の斜め矢印であると認識する。

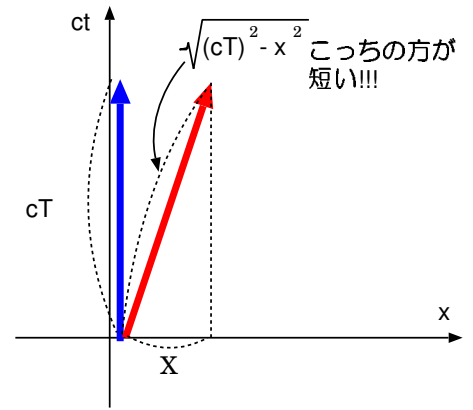
水平矢印と斜め矢印は、グラフ上の見た目では斜めの方が長く見えるが、4次元の長さの自乗の定義が $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ であることを思い出すと、水平矢印の長さ X に対し、斜め矢印は長さが $\sqrt{X^2 - (ct)^2}$ となる(普通のピタゴラスの定理とは $(ct)^2$ の前の符号が変わっていることに注意)。



ウラシマ効果は、動いている方が経過する時間が短いという効果であるが、それは図の斜め線の方が垂直な線より短いということで理解できる。

グラフを見ると斜め線の方が長く見えるが、今長さの定義が4次元的距離で定義されていることに気をつけなくてはならない。そのため、真っ直ぐな線の4次元的距離の自乗は $-(cT)^2$ であり、斜め線の4次元的距離の自乗は $-(cT)^2 + X^2$ となる。「距離の自乗」がマイナスになるのは「自乗」という言葉の本来の意味からすると奇妙であるが、今「距離の自乗」は $-(cT)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ と定義されているのでこれでよい。

マイナスになるのが気になるのであれば、「時間的な距離を測る時には距離の自乗は $(cT)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ と定義する」と決めておいてもよい。



5.4 世界線の長さとは固有時

4次元的な曲線のうち、粒子の軌跡になっているような線を「世界線」と呼ぶ。世界線の長さを上で定義した ds を使って測定する。 ds はローレンツ変換によって不変な量である。適当なローレンツ変換をしても値は変わらないのだから、計算しやすい座標系で計算すればよいことになる。そこで今考えている粒子がちょうど静止しているような座標系を採用したとする。その座標系を (T, X, Y, Z) とすると、明らかに粒子の運動した線に沿っていけば $dX = dY = dZ = 0$ であるから、

$$ds^2 = -c^2 dT^2 \quad (5.24)$$

となる。つまり、 ds はその物体が静止している座標系で測った時間経過に比例する。比例定数は ic である (i がついてしまうのは、 ds^2 を spacelike convention で定義したためである)。 $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ と書くと、この τ がまさに、その物体が静止している座標系で測った時間である。つまり、この物体が持っている時計の刻む時間であると考えて良い。そこで τ を固有時と呼ぶ。

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (5.25)$$

となる¹。この式の両辺を dt^2 で割って平方根を取ると、

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right)} = \sqrt{1 - \beta^2} \quad (5.26)$$

となる。つまり、固有時の増加は座標時の増加の $\sqrt{1 - \beta^2}$ 倍である。

固有時は、各物体ごとに違う進み方をする。上の式からわかるように、寄り道をすると dx^2 が多くなり、結果として固有時の進みは遅れる（ウラシマ効果）。双子のパラドックスの計算なども、運動している物体の固有時が短くなる、と考えれば簡単である。

我々の知っている粒子の世界線は time-like であるか null-like であるか、どちらかである。世界線が space-like だということは超光速で運動している粒子であるということで、そんなものは見つからない。もし見つかったら、そのような粒子は見る人の立場によっては未来から過去に向かって走ることになるので、因果律に抵触することになるだろう。

世界線が null-like になると、固有時の変化 $d\tau$ は0になってしまう。よって光のように光速で動くものに対しては固有時が定義できない（あるいは定義してもそれは変化しない）。

¹固有時の定義の符号は常にこの形。座標時 t の符号に合わせる。

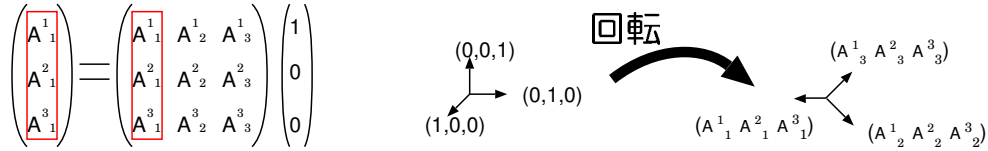
5.5 4元ベクトルの前に：3次元ベクトルの回転の復習

次の節で4次元時空内でのベクトルを考える。ローレンツ変換は4次元時空間での「回転のようなもの」と解釈できるので、4次元に行く前に3次元空間における回転を復習しておく。

3次元の座標 $x^i (i = 1, 2, 3)$ を回転させる座標変換は、

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

のように行列で書ける。



これをテンソルで書けば $x'^i = A^i_j x^j$ となる。Aには具体的には例えば $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のような行列が入る。

このように座標系が回転した時、3次元空間のベクトル $V^i (i = 1, 2, 3)$ は、

$$\begin{pmatrix} V'^1 \\ V'^2 \\ V'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

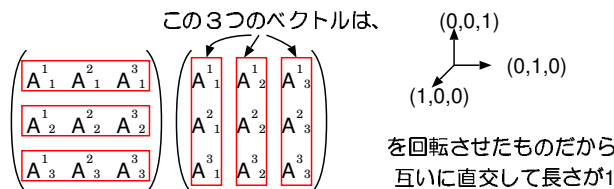
(テンソルで書けば $V'^i = A^i_j V^j$) のように、同じ行列を使って回転される。そして、二つのベクトル V^i, W^i があった時、その内積 $\begin{pmatrix} V^1 & V^2 & V^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{pmatrix} = V^i W^i = V^1 W^1 + V^2 W^2 + V^3 W^3$ は保存する。そのことは、行列 A^i_j の性質

$$\begin{pmatrix} A^1_1 & A^2_1 & A^3_1 \\ A^1_2 & A^2_2 & A^3_2 \\ A^1_3 & A^2_3 & A^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

からわかる。この式をテンソルで書けば $A^i_j A^i_k = \delta_{jk}$ である。この式の左辺の掛け算は、 A^i_j の前の足どうしが同じ添字で足し上げられていることに注意。つまり行列の掛け算ルールに即するためには前の方を転置せねばならない(上の行列での表現もそうになっている)。

また、回転の行列ならばこのような性質を持っていることは、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を

この行列で回転させると $\begin{pmatrix} A^1_1 \\ A^2_1 \\ A^3_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^1_2 \\ A^2_2 \\ A^3_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^1_3 \\ A^2_3 \\ A^3_3 \end{pmatrix}$ となることからわかる。



5.6 4元ベクトル

3次元のベクトル $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ は座標変換の時に、座標 $\vec{x} = (x, y, z)$ と同じ行列で変換される。その時二つのベクトルの内積が不変量であった（内積のもともとの定義は二つのベクトルの長さ、その間の角の \cos の積である。回転によって長さや角度は不変）。

同様に、4成分のベクトル $V^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ を考える²。

座標がローレンツ変換 ($x'^\mu = \alpha^\mu_\nu x^\nu$) された時、このベクトルは $V'^\mu = \alpha^\mu_\nu V^\nu$ と同様のローレンツ変換を受けるとしよう。このような変換にしたがうベクトルを4元ベクトルと言う。後で出てくる4元速度、4元加速度、4元力などは全て4元ベクトルである。二つの4元ベクトル V^μ, W^μ を考える。では、このようなベクトルによって作られる、座標変換（この場合ローレンツ変換）の不変量はどのようなものだろう。

この二つのベクトルの内積を3次元でと同じように $V^0W^0 + V^1W^1 + V^2W^2 + V^3W^3$ と定義したとすると、これはローレンツ変換で保存しない。保存するのは、

$$\eta_{\mu\nu}V^\mu W^\nu = -V^0W^0 + V^1W^1 + V^2W^2 + V^3W^3 \quad (5.30)$$

である（これを4次元的な内積と考えよう）。これが保存することは、

$$\eta_{\mu\nu}V'^\mu W'^\nu = \eta_{\mu\nu}\alpha^\mu_\rho V^\rho \alpha^\nu_\lambda W^\lambda = \underbrace{\eta_{\mu\nu}\alpha^\mu_\rho \alpha^\nu_\lambda}_{=\eta_{\rho\lambda}} V^\rho W^\lambda = \eta_{\rho\lambda}V^\rho W^\lambda \quad (5.31)$$

からわかるし、そもそも V と同じ変換をする x で作られた $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ が不変量であったことからわかる。

このように4元ベクトルどうしの「内積」を取る時には $\eta_{\mu\nu}W^\nu$ という組み合わせがよく出てくるので、

$$W_\mu = \eta_{\mu\nu}W^\nu \quad (5.32)$$

という量を定義する。上付きの添字を持つベクトルを「反変ベクトル」、下付きの添字を持つベクトルを「共変ベクトル」という。 $\eta_{\mu\nu}$ の内容を考えれば、 $W_0 = -W^0, W_1 = W^1, W_2 = W^2, W_3 = W^3$ ということである。つまり、 W^μ と W_μ の違いは第0成分（時間成分）の符号だけである。このようにミンコフスキー空間の直線座標系では反変ベクトルと共変ベクトルの差は時間成分の符号だけで、大きな差はないが、曲線座標系などではそうではなくなるし、特に一般相対論では大きな差になる。この講義ではそこには触れない。

$\eta_{\mu\nu}$ の逆行列を $\eta^{\mu\nu}$ と書くことにする。つまり、

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho \quad (\delta_\mu^\nu \text{ は } \mu = \nu \text{ の時 } 1 \text{ でそれ以外 } 0 \text{ という記号}) \quad (5.33)$$

ということである（注：この二つの行列の中身は同じ）。この時、

$$W^\mu = \eta^{\mu\nu}W_\nu \quad (5.34)$$

も成立する。つまり添字は η を使って上げたり下げたりできる。そういう意味でも、この二つのベクトルは中身は同じであって、表現が違うだけである。

共変ベクトルのローレンツ変換は、

$$W'_\mu = \eta_{\mu\nu}W'^\nu = \eta_{\mu\nu}\alpha^\nu_\rho W^\rho = \eta_{\mu\nu}\alpha^\nu_\rho \eta^{\rho\lambda} W_\lambda \quad (5.35)$$

²少し前から使っているが、 i, j, k, \dots などのアルファベットは1,2,3（3次元空間）の添字として、 μ, ν, ρ, \dots などのギリシャ文字は0,1,2,3（4次元時空）の添字として使う、というのが相対論の本でよく使われる約束である。

となるので、その変換行列は $\eta_{\mu\nu}\alpha^\nu_\rho\eta^{\rho\lambda}$ である。よくみるとこれは α^ν_ρ の添字を η を使って上げたり下げたりしていることになるので、

$$\eta_{\mu\nu}\alpha^\nu_\rho\eta^{\rho\lambda} = \alpha_\mu^\lambda \quad (5.36)$$

と書く。この記号を使えば、共変ベクトルのローレンツ変換は $B'_\mu = \alpha_\mu^\nu B_\nu$ となる。

共変ベクトルも反変ベクトルも、「 α の後ろの添字とベクトルの添字をそろえて和を取る。この添字は一方が上付きならもう一方は下付きである」と考えれば変換ルールを覚えやすい。

また、 $\eta_{\mu\nu}\alpha^\mu_\rho\alpha^\nu_\lambda = \eta_{\rho\lambda}$ から、

$$\alpha^\mu_\rho\alpha_\mu^\lambda = \delta_\rho^\lambda \quad (5.37)$$

ということもわかる。

座標と同じ変換をする方が反変で、少し違う変換をする方が共変なのは気持ちが悪いが、数学では微分演算子の方が基本的な量なので、こういう命名になっている。つまり微分演算子 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ は共変ベクトルなのである。それは、 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}x^\nu = \delta_\mu^\nu$ と $\frac{\partial}{\partial x'^\mu}x'^\nu = \delta_\mu^\nu$ が両方成立するべきであることからわかる。

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \alpha_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (5.38)$$

であれば、

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu}x'^\rho = \alpha_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\alpha^\rho_\lambda x^\lambda) = \alpha_\mu^\nu \alpha^\rho_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\nu}x^\lambda = \alpha_\mu^\nu \alpha^\rho_\lambda \delta_\nu^\lambda = \alpha_\mu^\nu \alpha^\rho_\nu = \delta_\mu^\rho \quad (5.39)$$

である。最後に、 $\alpha_\mu^\nu \alpha^\rho_\nu = \delta_\mu^\rho$ という式を使った。この式では α の後ろの添字同志で足し上げられている。先で求めた式は $\alpha^\mu_\nu \alpha^\rho_\mu = \delta_\nu^\rho$ であって、前の添字同志を足し上げた式だから少し違うが、この二つを行列の掛け算と解釈すると、

$$\begin{aligned} \alpha_\mu^\nu \alpha^\rho_\nu &\leftrightarrow \alpha_\mu^\nu (\alpha^\rho_\nu)^T \\ \alpha^\mu_\nu \alpha^\rho_\mu &\leftrightarrow (\alpha^\mu_\nu)^T \alpha^\rho_\mu \end{aligned} \quad (5.40)$$

となり、行列の計算において $AB = I$ ならば $BA = I$ であるということを使っている。

反変ベクトル A^μ と共変ベクトル B_μ の内積のローレンツ変換は

$$(A')^\mu (B')_\mu = A^\nu \underbrace{\alpha^\mu_\nu \alpha^\rho_\nu}_{=\delta_\nu^\rho} B_\rho = A^\mu B_\mu \quad (5.41)$$

である。つまり、反変（上付き）添字と共変（下付き）添字が足し上げられていると、ローレンツ変換した結果、それぞれのローレンツ変換が消し合って、まるで最初から添字がついていないかのごとく変換を受けない。つまり添字の意味がなくなっている。それゆえこのように添字が足し合わされている状況を「つぶれている」と称するのである。

なお、 $C_{\mu\nu}, A^{\rho\lambda}, D^\tau_{\sigma\mu\nu}$ のように添字を複数個もち、上付き（反変）添字が α^μ_ν で、下付き添字が α_μ^ν で変換されるような量を「テンソル」と言う。反変ベクトルは上付き添字が一つのテンソル、共変ベクトルは下付き添字が一つのテンソルである。例えば

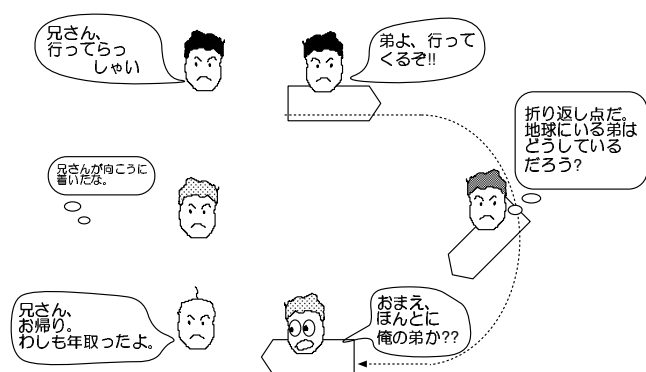
$$(D')^\tau_{\sigma\mu\nu} = \alpha^\tau_{\tau'} \alpha_{\sigma'}^{\sigma} \alpha_{\mu'}^{\mu} \alpha_{\nu'}^{\nu} D^{\tau'}_{\sigma'\mu'\nu'} \quad (5.42)$$

のように変換される。 $\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}$ あるいは δ_ν^μ は添字が二つあるテンソルの例でもある（座標変換で変化しないので、不変テンソルと呼ぶ）。

第6章 パラドックス

相対論に関しては、いくつかのパラドックス（逆説）と呼ばれるものが存在する。これらは一見パラドックスではあるが、相対論をよく理解していれば実は不思議なものでもなんでもない。

6.1 双子のパラドックス



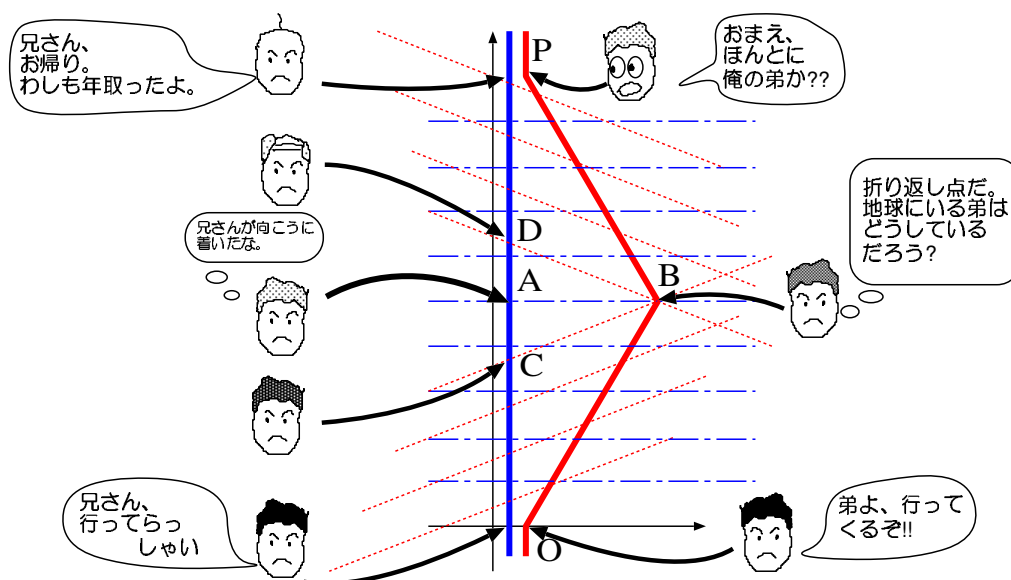
相対論で一番有名なパラドックスであろう。ただ、このパラドックスにはいくつかのレベルがあり、深いレベルまで考えると一般相対論を使って解くことが必要になる。ここではそこまで立ち入らずに、浅いレベル（でも充分難しいし面白い）だけを考えよう。

まず素朴にパラドックスの概要を述べよう。双子の兄と弟がいるとする。兄が亜光速で飛ぶことができるロケットに乗って宇宙の彼方まで旅をして、地球に帰ってきたとしよう。弟はずっと地球で待っている。

運動していると固有時が短くなる（ウラシマ効果）ことから、帰ってきた兄は弟より若い。そこでこのような主張を誰かがしたとしてみよう。

弟および地球から見れば確かに兄は運動して帰ってきた。しかし相対的に考えて兄が静止する立場で見たならば弟と地球の方こそ運動して、兄の元に帰ってきたと考えられるのではないのか。その場合弟の方が若くあるべきだ。これは矛盾である。

確かにこれは（一見）矛盾に思える。しかし具体的に図を書いて考えてみると、そうではない。まず、兄と弟がお互いにお互いの時間を遅く感じるということ、図で表してみると以下ようになる。



兄が弟（地球）から一番遠くまで行って、今まさにUターンしている時の時空点は図のBである。弟にしてみれば、この時間、自分は図のAにいる。弟の同時刻線は図の水平線（一点鎖線）であることに注意。つまり、

【弟の主観】兄がOBと移動している間に、自分はOAと移動した（空間的には移動していない）。

なのである。そして、図で見ると $OB > OA$ に見えるだろうが、兄の座標系と弟の座標系で時間の目盛りが γ 倍違うことを考慮すると $OA > OB$ となる。

一方、兄にとっての同時刻線は図の破線（斜め線）であるから、

【兄の主観】自分がOBと移動している（空間的には移動していない）間に、弟はOCと移動した。

となる。この場合は目盛りの違いを考慮しても、 $OB > OC$ であるので、まとめて、 $OA > OB > OC$ となっている。つまり、互いに互いの時間を「遅い」と感じる。ここまでは、問題は完全に「相対的」である。

問題は兄がUターンした時に何が起こるかである。この時、兄の速度が変わったことに応じて、「同時刻線」が傾きを変える。つまり、B点で一瞬で加速が終わったとすると、加速前はB点とC点が「同時刻」だったのに、加速後はB点とD点が「同時刻」なのである。兄の主観では、一瞬で弟の時間がC点からD点までいっきに経過したように感じることになる。弟の主観では、このような一瞬の時間経過はない。この不平等性のおかげで、兄の方が時間が遅くなるという不平等性が生じる。

帰りについて考えると、

【弟の主観】兄がBPと移動している間に、自分はAPと移動した（空間的には移動していない）。

に対し、

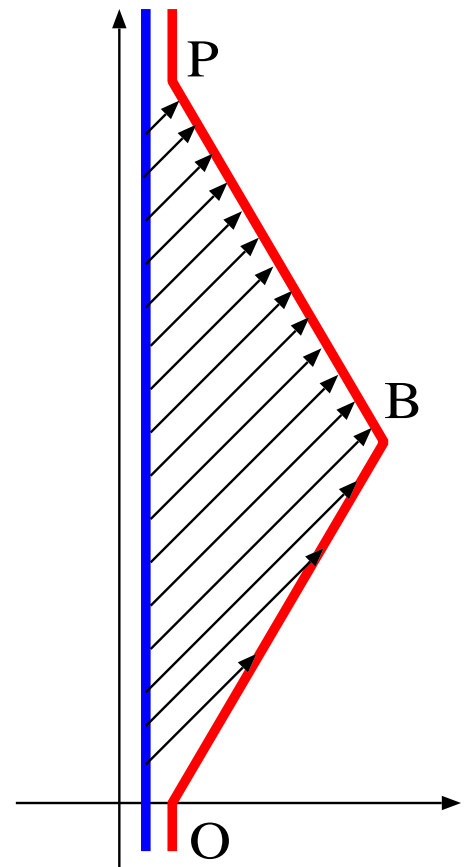
【兄の主観】自分がBPと移動している（空間的には移動していない）間に、弟はDPと移動した。

であって、 $AP > BP > DP$ となって、やはり問題は相対的である。つまり、兄の加速という一瞬の間だけ、相対性が崩れているのである。

ここで、「経過したように感じる」ということをもう少しまじめに検証してみよう。実際には、兄は弟から光がこない限り、「弟の時計が指している時刻」を知ることはできない。そこで弟から時報を乗せた信号が電波で兄に向けて送られていたとしよう。この電波の様子を描いたのが右の図である。図でわかるように、B点（兄のUターン地点）までは、兄が聞く時報の間隔は、弟が時報を出す間隔よりもずっと空いている。兄は「ずいぶん間延びした時報だなあ」と思うはずである。兄が弟から遠ざかっているために、光が到達するのに余分に時間がかかるせいである。

逆に、B地点を過ぎてからは、兄が受け取る時報の間隔は弟が出す時報の間隔よりも、ずっと短くなる。兄が近づくことによって時報が速く着くのである。よって、兄が自分の見た目だけで判断したとしたら、

折り返し点（B点）に着くまでは弟はゆっくり年をとっていたのに、折り返してからは弟の方が速く年を取るようになった。戻ってきたら弟の方が年をとっていた。



と判断することになるだろう。つまり、兄が弟を目でみている限りにおいて、瞬間的に時間がたつなどということはない。最初に述べた考え方の場合は、兄が「今見ている弟の姿は 年前に出た光の姿は 年。ということは今の弟の年齢はこれくらい」という計算をやって自分と弟の時計を比較しているのである。そしてこの計算法が、Uターンする前とした後でがらっと変わってしまう（同時刻がずれるから）ために、一瞬で弟の時間がたってしまふという結果になる。

別の言い方をすると、弟は常に一つの慣性系の上に乗っているが、兄はそうではない。往路の慣性系と復路の慣性系は別の座標系であり、加速する時に兄は「座標系の乗り換え」を行う。その時に時間がずれるのである。

ここで、もう一步つっこんだ主張を試みよう。

相対論の本質は「物理は相対的であって、どっちが静止しているかを定めることはできない」というものではなかったか。ならば兄の方が動いたと考えなくては問題が解けないというのは、相対論の本質にもとるのではないか。

ところがそうではない。大事なことは、兄が途中で「減速+加速」をしているということである。「(二つの慣性系のうち)どっちが静止しているか決められない」とずっと述べてきたが、加速をしている間の兄は慣性系にはいない。物理的には、この間大きな慣性力を受けているはずである(急ブレーキと急発進をしているのだから)。この慣性力が働くか否かという物理的な違いによって、兄は自分が慣性系にはいないことを実感できる。弟にはもちろんそんなことはない。つまり、兄と弟の立場はこのような意味で(物理的に)対等ではないのである。

さらにこのパラドックスに対して深く考えると、次のような主張もできる。

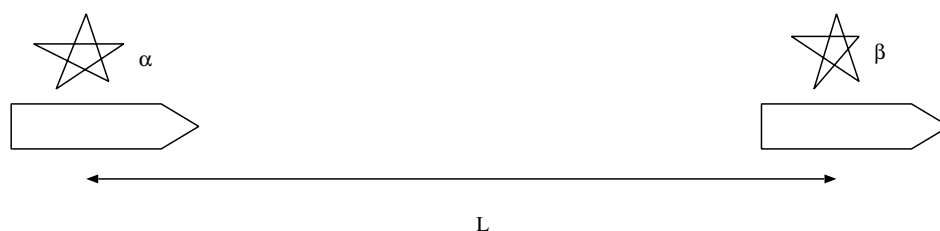
なるほど、兄は慣性力を感じるから自分が慣性系にいないことがわかる、というのはもっともらしい。しかし兄はそれを慣性力と考えず「やっ、突然宇宙全体に重力が発生したぞ」と解釈することも可能であるはずだ。そう考えたとしたら、やはり動いているのは弟の方になるのではないか。

運動が相対的かどうか、という話が「宇宙全体に力が発生したとしたら?」という疑問にまで拡大するあたり、マッハによる「ニュートンのバケツ」問題を思い出させる。残念ながら、ここまでつっこんだ質問をしてこられると、この講義の範囲内では解答は出せない。一般相対論を使うと「重力が発生した」という立場で問題を解き直すことができ、この立場で計算すると重力の影響で時間にずれが生じるので、やはり兄の方が若くなる。

6.2 2台のロケットのパラドックス

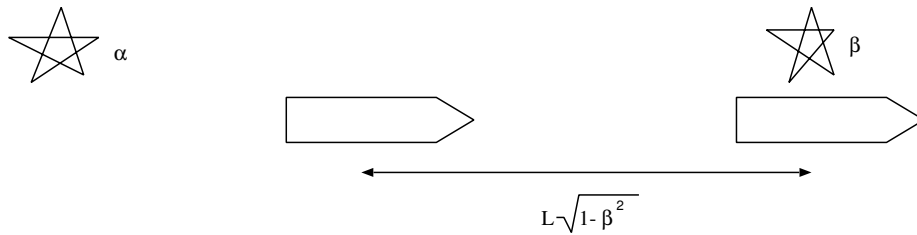
続いて、ローレンツ収縮(もちろん新しい意味の方)に関するパラドックスを紹介しよう。

今、2台のロケットAとBが、それぞれ星 α と星 β の近くにいる。

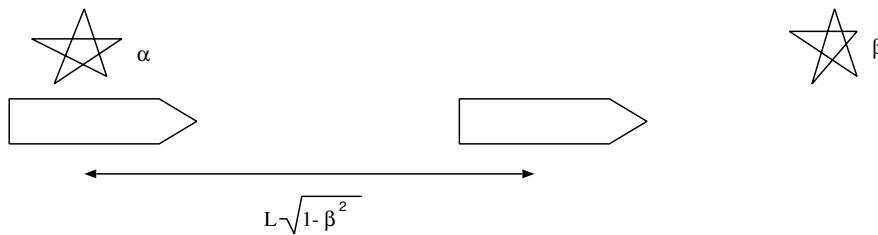


2台のロケットの距離（星と星の距離）は L であるとする。ここでこのロケットが同時に加速して、瞬時に速度 v に達したとする。すると、ロケットとロケットの間隔はローレンツ収縮して、 $L\sqrt{1-\beta^2}$ ($\beta = \frac{v}{c}$) となるはずである。ではいったいこの2台のロケットの位置関係はどのようになるのだろうか？

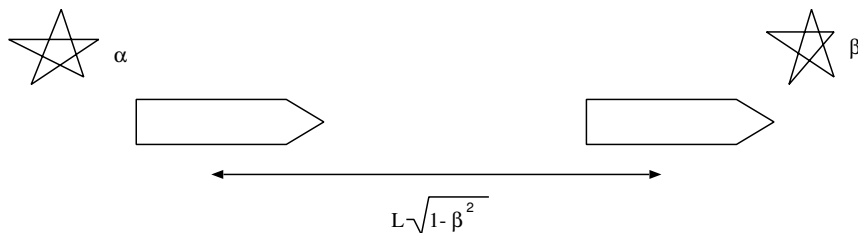
たとえば $L = 10$ 光年として、 $\beta = 0.8$ とすると、 $\sqrt{1-\beta^2} = 0.6$ なので、 $L\sqrt{1-\beta^2}$ は6光年となる。「瞬時に加速したんだから、まだBはの近くにいるだろう」と考えると、



となる。しかしこれでは、Aが一挙に4光年もから離れてしまっている。しかし、「まだAはの近くにいるだろう」と考えると



となって、今度はBが4光年もバックすることになる。「じゃあきつと真ん中でしょ」と考えると、



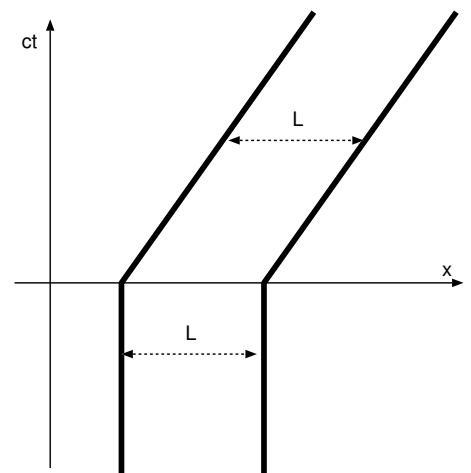
となってAが一瞬で2光年進み、Bが一瞬で2光年バックすることになる。そんなばかなことはないだろう。

実際にどうなるかという解答は、わかりきっている。「Aはの近くにいるし、Bはの近くにいる」というものである。一瞬で加速したというのだから、まだ遠くまで行っていないのは当然である。

相対論で何かの運動を考えてよくわからなくなった時は、 (x, ct) のグラフを書いてみるのがよい。2台のロケットの動きを (x, ct) グラフに書き込めば、右のようになるだろう。当然、ロケットとロケットの間隔は L のままである（もしロケットの間隔が $L\sqrt{1-\beta^2}$ に変化するとしたら、どんな変な図を書かなくてはいけないか、考えてみるとよい！）。

では、動いている物体は長さが縮むという、（新しい意味での）ローレンツ短縮の話は間違いなのだろうか？

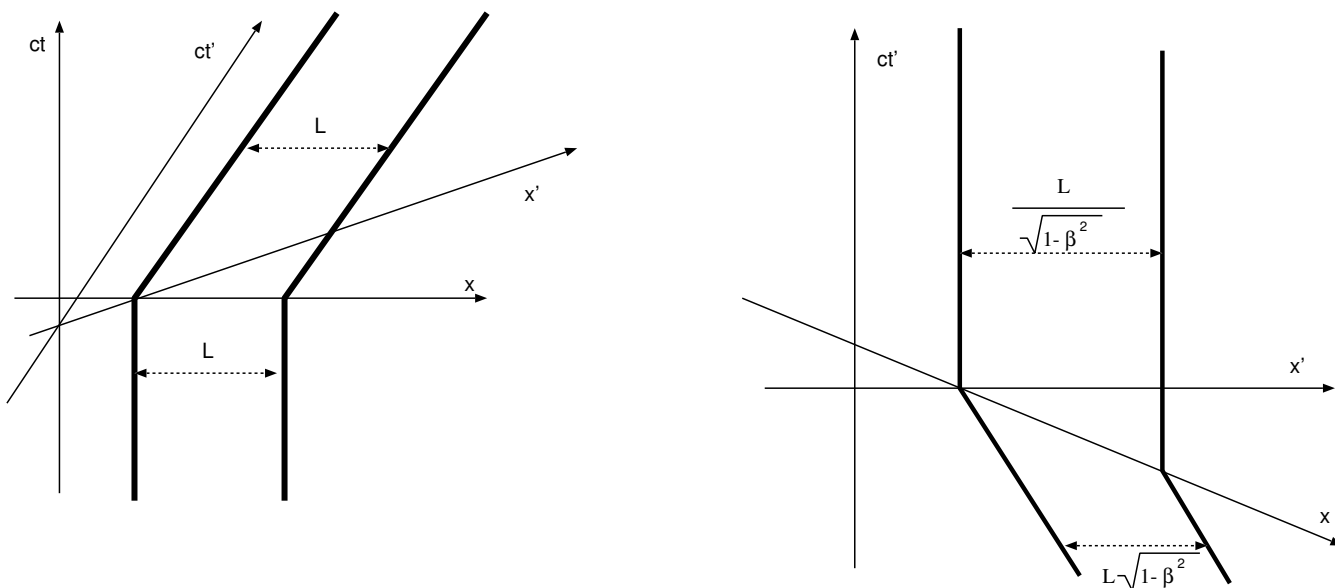
ここでもう一度前章の（新しい意味での）ローレンツ短縮について考えてみよう。長さ L の棒を、棒に対して動いている座標系から見ると、長さが $L\sqrt{1-\beta^2}$ に



見える。今は棒がロケット間の距離に変わっているが、本質的な内容は同じである。ここで上の考察と、ローレンツ短縮の両方が満足されるとしたら、「ロケットが加速し終わった後のロケット静止系では、ロケット A とロケット B の間隔は $\frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}}$ になっていて、それがローレンツ短縮して L になっている」と考える他はない。

しかし、静止していた時に L だったロケットの間隔が、動き出すと伸びるというのはなぜだろう???

そこで、このパラドックスの問題文を読み直してみよう。相対論を考えるときには注意深く使わなくてはいけない言葉が無造作に使われているのに気が付くはずである。それは、「ここでこのロケットが同時に加速して、瞬時に速度 v に達したとする。」というところの‘同時’である。相対論において、ある座標系で同時に起こることは別の座標系では同時に起こらない。



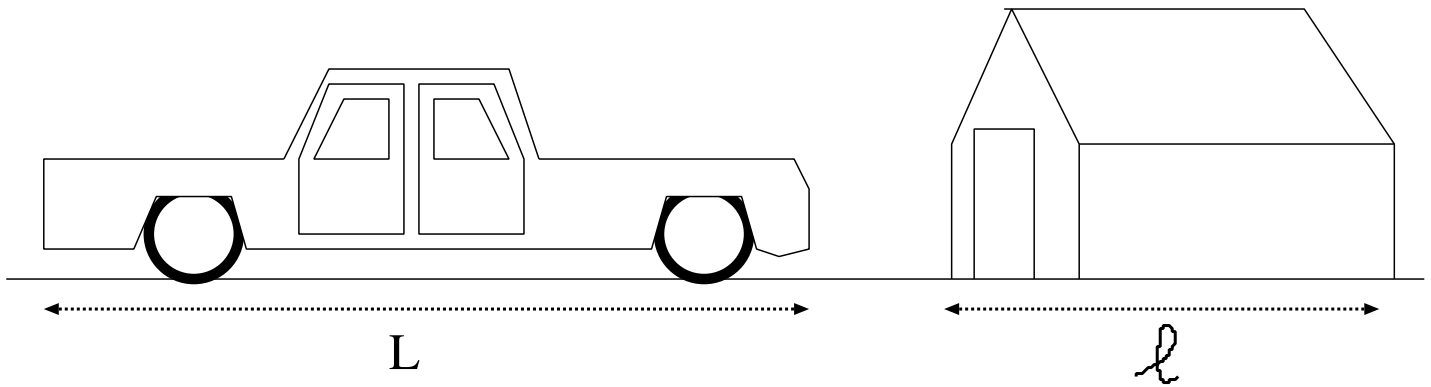
ということ思い出して、さっきの時空図に、ロケットが加速し終わった後のロケット静止系を書き込んでみよう。結果は上左の図のようになる。この座標系 (x', ct') での同時刻面は x' 軸が示すように斜めに傾く。それゆえ、この座標系で見ると、ロケットの先端の方が先に加速し始めたことになる。

これをよりよく見るために、 (x', ct') 座標系が水平・垂直になるように書き直したのが上右図である。このように、加速後の座標系を基準にとって考えると、ロケットは先端が先に加速を始めるので、結果として「伸びる」ということになる。

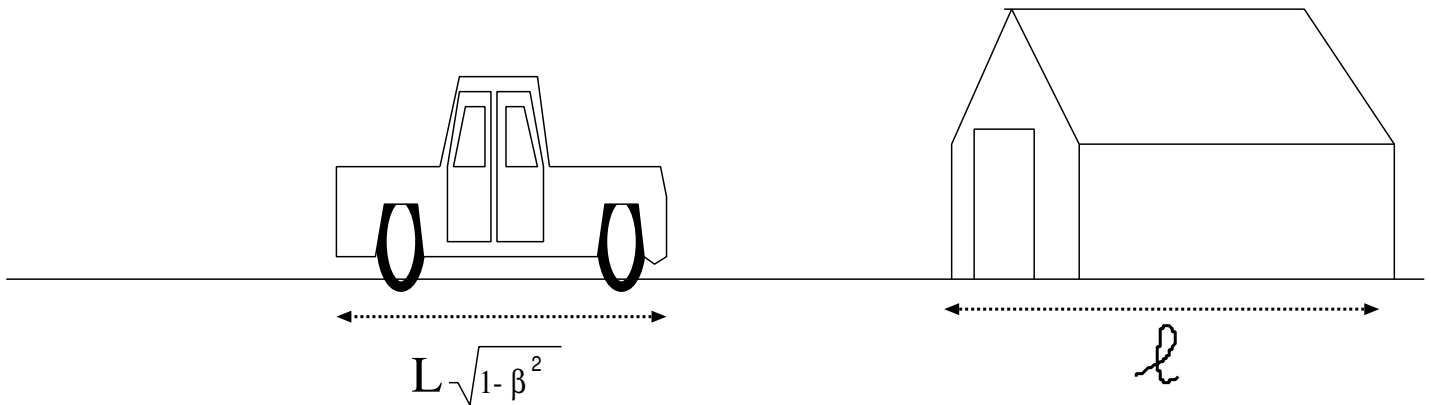
相対論では離れた場所の「同時」は座標系が変わればどんどん変化する。それゆえ、「2台のロケットが同時に発進する」などという表現には注意が必要なのである。同じ理由で、相対論においては「変形しない物体(剛体)」などというものはあり得ない(もっとも、全く動かないか等速運動を続けるのなら話は別)。何かの加速を受けると必ず、その物体内の別の場所は(座標系によっては)別のタイミングで加速させられてしまうからである。

6.3 ガレージのパラドックス

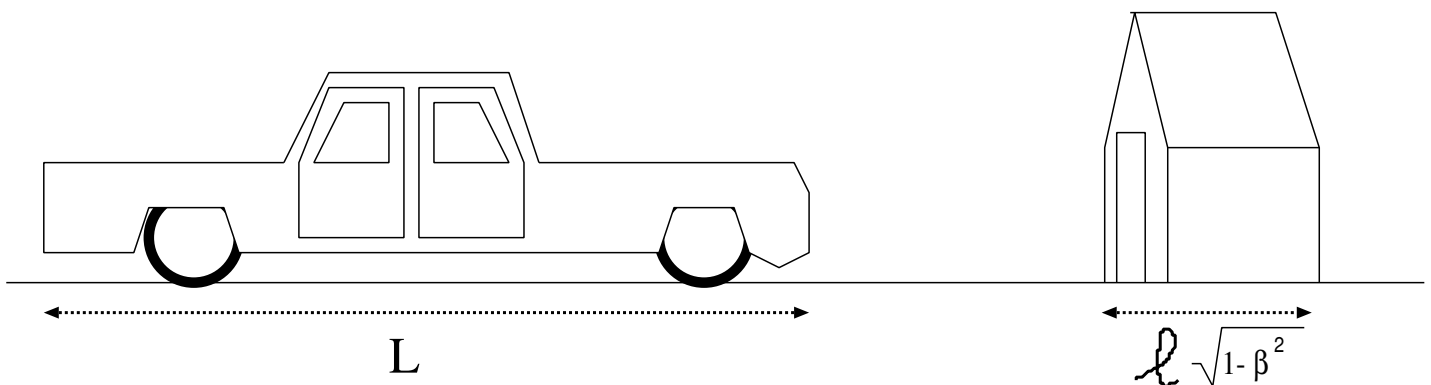
2台のロケットのパラドックスに似た問題である。簡単に言うと「固有長さ L の車を固有長さ ℓ ($L > \ell$) のガレージに入れることができますか」という問題である。



常識的に考えればできないに決まっているが、車の方が亜光速で走っているとすれば、その長さは $L\sqrt{1-\beta^2}$ に縮む。だからガレージの中に車が亜光速でつっこんできて、中に入ってしまった時にさっとドアを閉めれば車はガレージの中に入る。そのまま亜光速で走り続ければ壁に激突して壊れるだろうが、今は壊すかどうかは関係なく、入るかどうかだけを問題にしている。「壊して入れるのは入れるうちに入らない」という反論は却下である。



これがなぜパラドックスかという、相対論的思考方をして、車が止まっていてガレージが走ってくる座標系で考えてみると、入らないように思えるからである。この場合はガレージの方が $l\sqrt{1-\beta^2}$ に縮んでいるのであるから。



このパラドックスがどのように解決されるか、正解は述べないが、ここまでの講義で「相対論的思考方」を身につけることができている人なら、上の文章の中に相対論的に考える時に注意しなくてはいけない表現が混じっていることに気づくだろう。

第7章 相対論的力学

7.1 ニュートン力学を相対論的に再構成する

	ガリレイ変換	ローレンツ変換	実験的検証
ニュートン力学		×	19世紀まで
ヘルツの方程式		×	×
マックスウェル方程式	×		
相対論的力学？	×		

ここまでの流れを整理しよう。ここまで、相対性原理（絶対空間は存在しないということ）を一つの原理として捉えてきた。そして、電磁気の基本法則であるマックスウェル方程式が相対性原理を満たしていないように見える（ガリレイ変換で不変でない）ことから、マックスウェル方程式を破棄するか、ガリレイ変換を破棄するかの二者択一を迫られることになった。マイケルソン・モーレーをはじめとする実験事実から、破棄されるべきなのはガリレイ変換であり、ローレンツ変換へと修正すべきであることがわかった。また、時間と空間を別物と考えるのではなく、合わせて4次元の時空を考えて、その4次元を混ぜ合わせるような変換としてローレンツ変換を捉えればよいことがわかった。

そこでもう一度元にもどって考えると、そもそも相対性原理が考えられたのは、ニュートン力学はガリレイ変換で不変であったからである。しかし電磁気に対する考察からガリレイ変換はローレンツ変換へと修正されたのだから、今度はニュートン力学をローレンツ変換で不変になるように作り直さなくては行けない。この章で考えるのはローレンツ変換で不変になるように作り直された新しい力学、すなわち相対論的力学である。

そこで、どのようにして相対論的力学を作るか、その概要を述べる。ニュートン力学の基本である運動方程式は

$$\frac{dp^i}{dt} = f^i \quad (7.1)$$

という形をしている。 p^i は運動量で、具体的には $p^i = m \frac{dx^i}{dt}$ である。ニュートン力学では、ある時刻 t において、物体の位置 $x^i(t)$ を時間の関数として与え、時間がたつにつれてこれらがどのように変化していくかを運動方程式を使って追い掛ける。ニュートン力学では時間というものが特別なパラメータとなっている。しかし、時間というものを特別視しては、相対論的に不変な方程式にはならない。運動のパラメータとしては座標時間 t を使うのではなく、固有時 τ を使うべきである。 τ は「その物体が静止している座標系で測った時間」という定義になっているので、物体を決めれば一意的に決まり、ローレンツ変換しても変わらない。以下で、

1. 座標時間による微分 $\frac{d}{dt}$ は全て固有時微分 $\frac{d}{d\tau}$ に置き換える。
2. 3次元ベクトル $x^i = (x(t), y(t), z(t))$ で表されている量は4元ベクトル $x^\mu = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ に拡張する。
3. 方程式の両辺はローレンツ変換した時に同じ変換をされるものではない。

という方針で相対論的力学を作っていこう。

7.2 4元速度

まず、ニュートン力学における3次元速度 $\frac{dx^i}{dt}$ を $V^\mu = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right)$ に置き換える。固有時 τ はローレンツ変換で変化しないため、 x^μ が $\alpha^\mu{}_\nu x^\nu$ とローレンツ変換される時、 $V^\mu \rightarrow \alpha^\mu{}_\nu V^\nu$ とローレンツ変換される。すなわち V^μ は4元ベクトルであり、「4元速度」と呼ばれる。

物体の4元速度の自乗を計算すると、

$$\left(-c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right) = -c^2 \quad (7.2)$$

となる。つまり、4元速度は常に時間的（自乗がマイナスになるベクトル）であって、4元速度の自乗は一定値なのである。3次元的に見ると物体はそれぞれ固有の速さを持って運動しているように見えるが、4次元的に見れば全て同じ速さで運動している、と考えることもできる。ただし、

$$(\text{4元速度の自乗}) = ((\text{空間的速度の自乗}) - (\text{時間的速度の自乗})) \quad (7.3)$$

という形になっているので、空間的方向の速度が速くなると時間的方向の速度も速くならなくては行けない。

「時間方向の速度が増える」というのは変な表現だが、今考えている「速度」というのは「単位固有時あたりの変化」という意味であるから、「 τ (固有時) が1変化する間に t (座標時) はどれだけ変化するか」ということである。動いているとこれが増える、というのはどういうことかということ、「小さい τ の変化に対し、 t が大きく変化する」逆に言えば「 t が大きく変化しているのに τ があまり変化しない」ということである。つまり、「運動物体の時間は遅れる」ということの別の表現だということになる。

4元速度の第0成分である $c \frac{dt}{d\tau}$ を3次元速度 $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ を使って表そう。(7.2)より、

$$\begin{aligned} -c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \underbrace{\left(\frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right)^2}_{=v^i} &= -c^2 \\ - \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 (c^2 - |\vec{v}|^2) &= -c^2 \\ \frac{d(ct)}{d\tau} &= \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} = c\gamma \end{aligned} \quad (7.4)$$

となつて、ウラシマ効果の時間遅れの因子 γ に c をかけたものが出てくる。また、3次元速度 v^i と4次元速度 V^μ の関係は $\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau}$ となることから、

$$V^0 = c\gamma, \quad V^i = \gamma v^i \quad (7.5)$$

となる。物体が静止している時、4元速度は $(c, 0, 0, 0)$ となる。そして、速度 v が c に近づくとつれて V^μ は無限大へと発散する。

7.3 速度の合成

x 系でから見ると原点が速度 v で動いているような、 x' 座標系を考える。この座標系内で見ると3次元速度 v' で動いている物体は x 座標系で見るとどれだけの速度で動いていることになるであろうか。

ガリレイ変換であれば単純な和 $v' + v$ になるが、ローレンツ変換の場合そうではない。まず、 x' 座標系で速度 V で動いている物体の軌跡は、 $x' = v't'$ で表される。これにローレンツ変換の式を代入すると、

$$\begin{aligned}\gamma(x - vt) &= v'\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x - vt &= v't - \frac{v'v}{c^2}x \\ x\left(1 + \frac{v'v}{c^2}\right) &= v't + vt \\ x &= \frac{v' + v}{1 + \frac{v'v}{c^2}}t\end{aligned}\tag{7.6}$$

となる。これは速度 $\frac{v' + v}{1 + \frac{v'v}{c^2}}$ で動く物体の軌跡である。つまり、3次元速度 v と3次元速度 v' の合成結果は $\frac{v' + v}{1 + \frac{v'v}{c^2}}$ なのである。ここで注意すべきことは、 $v < c, v' < c$ ならば $\frac{v' + v}{1 + \frac{v'v}{c^2}}$ も c より小さくなるということである。

[問い 11] 証明せよ。

つまり、速度をいかに足し算していっても、光速 c を超えることはない。これは、ローレンツ変換が速度ベクトルの自乗を保存すること、つまり時間的なベクトルをいかにローレンツ変換してもやはり時間的なベクトルである、ということにからもわかる。

なお、上の計算は二つの速度がどちらも x 方向を向いている時の計算であるが、たとえば x' 系での速度が (v'_x, v'_y, v'_z) であるような時は、 $y' = v'_y t'$ という式が成立しているので、

$$y = v'_y \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = v'_y \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}} t\right) = v'_y \gamma\left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}\right) t = v'_y \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}\right) t\tag{7.7}$$

となり、 y 方向の速度は $v'_y \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}\right)$ ということがわかる。 z 方向も同様に、 $v'_z \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}\right)$ とわかる。

なお、このような速度の変換は、4元速度の考え方を使っても導くことができる。 x' 座標系で見ると4元速度 V'^μ を持っている物体があったとすると、 x 座標系では、

$$V^0 = \gamma(V'^0 + \beta V'^1), V^1 = \gamma(V'^1 + \beta V'^0), V^2 = V'^2, V^3 = V'^3\tag{7.8}$$

と、ローレンツ変換と同じ変換を受けることになる。 $\frac{v^i}{c} = \frac{dx^i}{d(ct)} = \frac{dx^i}{d\tau} \frac{d\tau}{d(ct)} = \frac{V^i}{V^0}$ という式を使うと、

$$\frac{v^1}{c} = \frac{\gamma(V'^1 + \beta V'^0)}{\gamma(V'^0 + \beta V'^1)} = \frac{V'^1 + \beta V'^0}{V'^0 + \beta V'^1} = \frac{\frac{V'^1}{V'^0} + \beta}{1 + \beta \frac{V'^1}{V'^0}} = \frac{\frac{v'^1}{c} + \beta}{1 + \beta \frac{v'^1}{c}} = \frac{1}{c} \frac{v'^1 + v}{1 + \frac{v v'^1}{c^2}}\tag{7.9}$$

$$\frac{v^2}{c} = \frac{V'^2}{\gamma(V'^0 + \beta V'^1)} = \frac{\frac{V'^2}{V'^0}}{\gamma(1 + \beta \frac{V'^1}{V'^0})} = \frac{\frac{v'^2}{c}}{\gamma(1 + \frac{v v'^1}{c^2})}\tag{7.10}$$

(v^3 も同様) として求めていくこともできる。

7.4 4元加速度、4元運動量と4元力

4元速度をさらに固有時 τ で微分したものを4元加速度と言う。式で書けば $\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$ となる。4元加速度の性質として、4元速度と(4次元の意味で)直交する。なぜなら4元速度の自乗が一定であることから、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \left(\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \\ 0 &= 2\eta_{\mu\nu} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \frac{dx^\nu}{d\tau} \end{aligned} \quad (7.11)$$

となるからである。

4元速度に質量¹をかけたものを4元運動量と呼ぶ。

$$P^\mu = \left(mc \frac{dt}{d\tau}, m \frac{dx}{d\tau}, m \frac{dy}{d\tau}, m \frac{dz}{d\tau} \right) \quad (7.12)$$

のようなベクトルで、これは3次元の運動量

$$p^i = \left(m \frac{dx}{dt}, m \frac{dy}{dt}, m \frac{dz}{dt} \right) \quad (7.13)$$

と、

$$P^\mu = (mc\gamma, \gamma p^1, \gamma p^2, \gamma p^3) \quad (7.14)$$

のような関係にある。ここで、4元運動量の第0成分にはどんな意味があるのかを知るために、この4元運動量の微分 dP^μ について考えてみる。

4元運動量は4元速度に m をかけたものであるから、その自乗 $P_\mu P^\mu = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu$ は $-m^2 c^2$ という定数になる。この式を微分すると、

$$\eta_{\mu\nu} dP^\mu P^\nu = 0 \quad (7.15)$$

であるが、これを少し変形すると、

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} dP^\mu dx^\nu &= 0 \\ dP^i dx^i &= dP^0 d(ct) \\ \frac{dP^i}{dt} dx^i &= cdP^0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

となる。つまり、 $\frac{dP^i}{dt}$ と dx^i の3次元的内積が P^0 の変化量となる。ニュートンの運動方程式と同じように、

$$f^i = \frac{dP^i}{dt} \quad (7.17)$$

のようにして力を定義するならば、(7.16) はまさに

$$\text{仕事} = cP^0 \text{ の変化} \quad (7.18)$$

¹相対論では質量という言葉にいろんな定義があるのだが、単に「質量」と書いてあったら「静止質量」のことである。他の質量の定義は後で述べるが、基本的な量は「静止質量」であり、これはローレンツ変換によって変化しない、定数である。

という式になる。これは cP^0 がエネルギーと解釈できることを示している。つまりエネルギーは「時間方向の運動量 $\times c$ 」なのである。量子力学で $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ のような対応になっているのは、エネルギーが時間方向の運動量だからであるとも言える。 E だけ符号が違うのも、もちろん $\eta_{\mu\nu}$ が時間的成分のみマイナスであることが関係している。

4元運動量の自乗は $\eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = -m^2 c^2$ であるから、 $P^0 = \frac{E}{c}$ とおくと、

$$-m^2 c^2 = -\left(\frac{E}{c}\right)^2 + |P^i|^2 \quad (7.19)$$

という式が成立する。上の式から、運動量の大きさが大きくなるとエネルギーも増加する（自乗の差が一定値なのだから）。

ここで、そもそも運動量やエネルギーというものが、ニュートン力学においてどのように導出されたものか、ということを思い出そう。まず運動方程式

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = f^i \quad (7.20)$$

から出発する。この両辺を時間で積分（区間は $[t_i, t_f]$ ）すると、

$$m \frac{dx^i}{dt} \Big|_{t=t_f} - m \frac{dx^i}{dt} \Big|_{t=t_i} = \int_{t_i}^{t_f} f^i dt \quad (7.21)$$

という式が出る。これは、運動量の変化が力積である、という式である。

また、 x^i で積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} m \frac{d^2 x^i}{dt^2} dx^i &= \int_{x_i}^{x_f} f^i dx^i \\ m \int_{t_i}^{t_f} \frac{d^2 x^i}{dt^2} \frac{dx^i}{dt} dt &= \int_{x_i}^{x_f} f^i dx^i \\ m \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 \right) dt &= \int_{x_i}^{x_f} f^i dx^i \\ \frac{1}{2} m \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 \Big|_{t=t_f} - \frac{1}{2} m \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 \Big|_{t=t_i} &= \int_{x_i}^{x_f} f^i dx^i \end{aligned} \quad (7.22)$$

という式が出る。 x_i は時刻 t_i での粒子の位置（ x_f, t_f も同様）である。つまり、エネルギーは仕事 $f_i dx^i$ によって変化する量として定義されている。同様に、 cP^0 はエネルギーと解釈されるべき量なのである。実際、 v が c より小さいという極限で計算してみると、

$$cP^0 = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots \right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (7.23)$$

となって、定数項 mc^2 と β の4次以上の項を除けばなじみのある運動エネルギーの式 $\frac{1}{2}mv^2$ が出てくる。なお、相対論で有名な公式²である $E = mc^2$ はこの式の $\beta = 0$ にしたものである。つまり静止している物体も mc^2 だけのエネルギーを持っていることを表している。しかし、ここまでの時点では単にエネルギーの原点が mc^2 だけずれているだけのことである。通常の力学ではエネルギーの原点には意味がないが、この mc^2 がないと P^μ が4元ベクトルでなくなってしまうので、4元運動量として意味があるためには mc^2 を消してしまうことはできない。しかし、取り出すことのできるエネルギーは結局はエネルギーの差であり、 cP^0 の最小値は mc^2 なのだから、この mc^2 はこの

²意味はわからなくてもこの式だけは知っている、という人も多いので、もしかすると、物理の公式の中で一番有名かもしれない

一個の粒子の運動を考えている限りにおいては取り出すことのできないエネルギーということになる。ゆえに、(この時点では)この mc^2 に物理的に深い意味はない(この式に含まれる深い意味は後で明らかになる)。

なお、ここで定義した力 $f^i = \frac{dP^i}{dt}$ は、その定義 (t 微分を使ったところ) からして4元ベクトルになっていない。4元ベクトルになる力 F^μ を

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = F^\mu \quad (7.24)$$

で定義すると、 $F^\mu = \frac{dt}{d\tau} f^\mu$ という関係が成立する。この τ は、今力が及ぼされている物体の固有時であるから、その物体が速度 u^i を持っているならば、

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (7.25)$$

である。

F^μ を「4元力」または「ミンコフスキーの力」と呼ぶ。

4元力は4元ベクトルであるから、その変換性は他の4元ベクトルと同様で、 x 方向に速度 β で移動する座標系へ変換した時、

$$F'^1 = \gamma(F^1 - \beta F^0), \quad F'^0 = \gamma(F^0 - \beta F^1), \quad F'^2 = F^2, \quad F'^3 = F^3 \quad (7.26)$$

となる。 $f^\mu = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2} F^\mu$ という式が成立している (u は今考えている粒子の速度である) ことを考えると、 f^μ の方の変換も計算できる。ただしその時は、 x 座標系と x' 座標系では、物体の速度 u^i も速度の合成則に従って変換することに注意しよう。したがって f^μ の変換は F^μ に比べると複雑なものになってしまう。

7.5 質量の増大?

よく相対論の本では「運動すると物体の質量が増大する」という意味のことが書いてある。この講義ではここまで一貫して質量 m を定数として扱ってきた。ではこの m は増大するのだろうか?

もちろん、しない。では「運動すると物体の質量が増大する」とはどういう意味なのか。ここで「そもそも質量の定義とは何か?」ということに立ち戻る必要がある。ニュートン力学における質量は運動方程式

$$f^i = m \frac{d^2 x^i}{dt^2} \quad (7.27)$$

によって規定されている。相対論的力学でも、力として f^μ の方(4元力 F^μ ではなく)を使えば、ニュートンの運動方程式と同じ形の、

$$f^\mu = \frac{dP^\mu}{dt} \quad (7.28)$$

であるが、運動量 P^μ はこの場合4元運動量であって、3次元運動量 p^i とは少し違う。具体的には

$$P^i = m \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \underbrace{m}_{\text{静止質量}} \underbrace{\frac{v^i}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}}_{\text{4元速度の空間成分}} = \underbrace{m}_{\text{相対論的質量}} \underbrace{v^i}_{\text{3次元速度}} \quad (7.29)$$

となるわけであるが、この運動量のどこまでを「質量」と考え、どこまでを「速度」と考えるかには、上の二つのような流儀がある。

どちらの流儀で考えるにせよ、ある力 f^i を dt 秒間加えた時、 $\frac{mv^i}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ が $f^i dt$ だけ増大するのは同じである。なお、実際に P^i を時間で微分したとすると、

$$\begin{aligned} \frac{dP^i}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^i}{\sqrt{1 - (\frac{v^2}{c^2})}} \right) \\ &= \frac{m \frac{dv^i}{dt}}{\sqrt{1 - (\frac{v^2}{c^2})}} + \frac{mv^i v^j \frac{dv^j}{dt}}{c^2 \left(1 - (\frac{v^2}{c^2})\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (7.30)$$

となる。つまり、力 f^i の方向と加速度 $\frac{dv^i}{dt}$ の方向は必ずしも一致しない。速度 v^i と加速度 $\frac{dv^i}{dt}$ が直交しているような場合は第2項が消えるので非常に簡単になる。磁場中を走る荷電粒子の場合、ローレンツ力 $q\vec{v} \times \vec{B}^3$ を受けて円運動するが、加速度は速度と垂直（中心向き）に $\frac{v^2}{r}$ となるので、

$$qvB = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v^2}{r} \quad (7.31)$$

となつて、半径が $r = \frac{mv}{qB\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ となる。非相対論的な計算では分母の $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ は表れない。実験によって支持されるのはもちろん相対論的な計算であり、荷電粒子を磁場中で加速する（サイクロトロンなど）実験装置ではこのいわゆる「質量増大」の効果を考慮して設計せねばならない。

逆に、運動方向と加速度が同じ方向を向いていると、また話が少し変わる。この場合、 v^i も $\frac{dv^i}{dt}$ も x 成分だけが零でないとする、

$$\begin{aligned} \frac{dP^1}{dt} &= \frac{m \frac{dv}{dt}}{\sqrt{1 - (\frac{v^2}{c^2})}} + \frac{mv^2 \frac{dv}{dt}}{c^2 \left(1 - (\frac{v^2}{c^2})\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{m \frac{dv}{dt} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - (\frac{v^2}{c^2})\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{mv^2 \frac{dv}{dt}}{c^2 \left(1 - (\frac{v^2}{c^2})\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{m}{\left(1 - (\frac{v^2}{c^2})\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (7.32)$$

となり、この場合はむしろ質量が $\frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ に増えていることになる。こちらを「縦質量」、さっき

の $\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ を「横質量」として区別する場合もある。縦質量の方が横質量より大きいのは、横方向に押す場合は v の大きさは変化しない（つまり運動量の分母は変化しない）が、縦方向に押すと v の大きさを変える（運動量の分母も変える）のに余分な力が必要になるからである。このように、「質量が増大する」という考え方は、「質量」と「速度」の両方が時間的に変化すると思える分だけ、計算がかえって複雑になる場合もあり、あまり推奨されない。質量は常に m で一定だと考えて、運動

³ここでは説明しないが、 qvB で表されるのが f なのか F なのかは、電磁場をローレンツ変換した時どうなるべきかということから決まる。

量の式には分母に $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ があるのだとした方が簡便である。どちらの流儀でも、「相対論では運動量が mv ではなく $mv\gamma$ になる」ということを把握しておけば問題はない。

ここで、 f^μ が有限で時間経過も有限である限り、 P^μ は有限の値を取ることに注意しよう。速度を増やしていくと、 $v = c$ となったところで P^μ は無限大となる。ゆえに、有限の力で有限の時間加速している限り、光速に達することはない。このことは光速 c が物体の限界速度であることを示している。

7.6 運動量・エネルギーの保存則

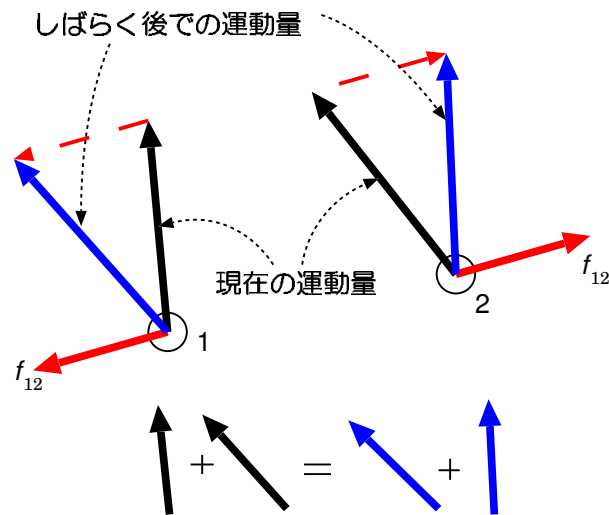
ニュートン力学においては、運動量の保存則がどのように導かれたかを思い出そう。質量 $m_i (i = 1, 2, \dots, N)$ の N 個の物体がそれぞれ \vec{p}_i の運動量を持ち、 i 番目の物体から j 番目の物体へは力 \vec{f}_{ij} が働くとすると、

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ji} \tag{7.33}$$

である。これを i で足し上げると、

$$\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{f}_{ji} \tag{7.34}$$

となる。



作用・反作用の法則により、 $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ (i 番目が j 番目に及ぼす力は、 j 番目が i 番目に及ぼす力と同じ大きさで逆向き) である。 $\sum_{i,j}$ の和を取る段階でかな

らず \vec{f}_{ij} と \vec{f}_{ji} の両方の和が表れるので、この二つが消し合うことにより、

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{p}_i \right) = 0 \tag{7.35}$$

となる。すなわち、運動量の和 $\sum_i \vec{p}_i$ は保存する。

相対論的力学においても $\frac{dP^\mu}{dt} = f^\mu$ が成立しているので、 f^μ について作用・反作用の法則が成立していれば、同様に P^μ の和が保存する。ここで、保存則が $\frac{d}{d\tau} \left(\sum P^\mu \right) = 0$ ではなく $\frac{d}{dt} \left(\sum P^\mu \right) = 0$ であることに注意せよ。固有時 τ は粒子一個一個について独立に

定義されているものだから、複数の粒子の運動量の固有時微分 $\frac{dP^\mu}{d\tau}$ を足すことには意味がない。作用・反作用の法則が成立するのでも、 F^μ に対してではなく f^μ に対してである。

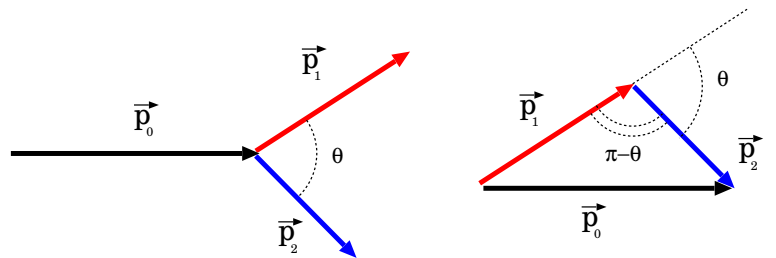
なお、相対論では運動量とエネルギーは同じ4元運動量の空間成分と時間成分という形にまとまっているので、運動量だけが保存してエネルギーが保存しないとか、あるいはこの逆のことなどはあり得ない。違う座標系に移れば時間成分と空間成分は入り交じる(たとえば、 $P^0 = \gamma(P^0 - \beta P^1)$ というふう)に)ので、全ての座標系で運動量保存則が成立するためには、エネルギーも保存していてくれないと困るのである。これは相対性原理からの帰結である。

なお、上では作用・反作用の法則が成立ということを仮定したが、相対論の場合にはこの仮定にも注意が必要である。なぜなら、相対論では空間的に離れた場所での同時刻には意味がない。上の図では、離れた物体との間で力が「同時に」働いているかのごとく書いているが、実際にはそんなことは起きない(そもそも、力も光速より速く伝わるはずがない!)。したがって厳密には、作用・反作用の法則を単純に適用してよいのは、物体と物体が接触して(同一時空点に存在して)力を及ぼす場合である。クーロン力を「二つの電荷の押し合い(引き合い)」と考える場合、作用反作用の法則が成立しているとは限らない。ただし、クーロン力を「電荷と、その場所の電磁場との相互作用による力」と考えるならば、ちゃんと作用・反作用が成立するのだが、その場合は「電磁場の持つ運動量」を計算してやらなくてはならない。

まずは物体が接触して衝突するという単純な問題の場合で相対論的な場合と非相対論的な場合にどのような差があるかを確認しておこう。

静止している質量 m の物体に、同じ質量の物体が運動量 \vec{p}_0 を持って衝突したとする。結果として二つの物体の運動量が \vec{p}_1, \vec{p}_2 になったとすると、

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (7.36)$$



という式が成立する(運動量保存)。この

式は $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ が三角形を形作ることを示している。一方、非相対論的な計算では、エネルギーの保存則が

$$\frac{|\vec{p}_0|^2}{2m} = \frac{|\vec{p}_1|^2}{2m} + \frac{|\vec{p}_2|^2}{2m} \quad \text{すなわち} \quad |\vec{p}_0|^2 = |\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_2|^2 \quad (7.37)$$

となる。これから $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ で作った三角形がピタゴラスの定理を満たすこと、すなわちこれが直角三角形となって、 \vec{p}_1 と \vec{p}_2 が垂直であることがわかる。これはビリヤードの玉などでも確認できる現象である。

相対論的な計算では、エネルギー保存則は

$$\sqrt{|\vec{p}_0|^2 c^2 + m^2 c^4} + mc^2 = \sqrt{|\vec{p}_1|^2 c^2 + m^2 c^4} + \sqrt{|\vec{p}_2|^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (7.38)$$

となるので、もはや \vec{p}_1 と \vec{p}_2 は直角ではなくなる。細かい計算は省略するが、角度 θ は 90 度より小さくなる。この現象は霧箱の中に線を入射させて、電子と衝突させるなどの実験で実際に起こることが確認されており、相対論的力学が正しいことの証拠の一つとなっている。

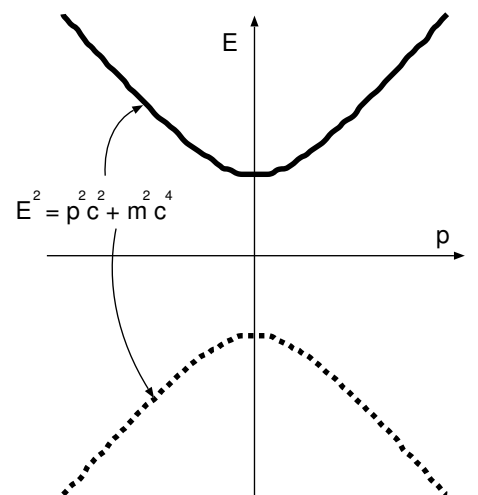
7.7 質量とエネルギーが等価なこと

最初に注意しておくが、この節で扱う質量は、静止質量である。

すなわち、エネルギー E 、運動量 p とした時、

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (7.39)$$

で定義される場所の質量(つまり速度や座標系によらずに定義される質量)である。物体が静止している場合は $p = 0$ となって $E = mc^2$ となる。エネルギーの負符号は許さない。許してしまうとエネルギー $E = -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ は p が大きくなることによっていくらでも ($-\infty$ まで) 小さくなれる。「物体はエネルギーの低



い方に行きたがる」という原則からすると全ての物体がみな $E = -\infty$ へと落ち込みたがって具合が悪い。エネルギーには底がないといけないのである（図参照）。

すでに述べたように、エネルギーは「運動量の時間成分 $\times c$ 」であり、物体が静止している場合でも mc^2 だけあることになる。 c が 3×10^8 [m/s] であるから、これは非常に大きなエネルギーである（1gの質量は、 9×10^{13} [J]、すなわち90兆ジュールのエネルギーに対応することになる）。

しかし、たとえエネルギーが mc^2 だといっても、これよりも低いエネルギーの状態がないのなら、これには意味がない。エネルギーを取り出すには、状態をエネルギーのより低い状態に「落す」ことによってその差をもらいうける必要があるが、このエネルギーは最小値が mc^2 であるから、このエネルギーを取り出す方法がない。取り出せないエネルギーはいくら大きくとも意味がない。

質量を持った物体と質量を持った物体が反応してその総質量を変えるような過程があれば、この質量の差が物理現象にエネルギーの差として表れてくる。そこで以下で、そのような過程を相対論的に考えると（すなわち、ローレンツ不変性を要求していくと）どのような結果が得られるかを考察しよう。

今、質量 m の二つの物体が逆向きの速度 \vec{v} と $-\vec{v}$ を持って正面衝突して合体したとしよう。単純に考えると質量 $2m$ の静止した物体が残る、と言いたいところだが、はたしてこんな現象は相対論的に正しいだろうか。これらの物体の4元運動量を考えると、保存則の成立から

衝突前： $(mc\gamma, mv\gamma, 0, 0)$ と $(mc\gamma, -mv\gamma, 0, 0)$ (7.40)

であるから、

$$\text{衝突後：}(2mc\gamma, 0, 0) \quad (7.41)$$

となることになる。 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ は1より大きいから、衝突後の質量は $2m$ より大きくなっていることになる。

こうなることが相対論的に考えれば必然であることを確認しよう。相対性原理により、同じ現象を、速度 $-\vec{v}$ を持って運動している観測者が見たとしても同じことが結論できねばならない。この時、速度の合成則を使わねばならないので、速度 $-\vec{v}$ で動きながら速度 \vec{v} の物体を見た時の速度は、 $2v$ ではなく、 $\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$ であることに注意せよ。この速度に対応する γ は、

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2v}{c(1 + \frac{v^2}{c^2})}\right)^2}} = \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2 - \frac{4v^2}{c^2}}} = \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - 2\frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{c^4}}} = \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7.42)$$

となることに注意して、二つの座標系で運動量とエネルギーを計算してみる。

もう一方はもちろん静止して見えるので、

$$\text{衝突前：}\left(\frac{mc\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \frac{2mcv}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, 0, 0\right) \text{ と } (mc, 0, 0, 0) \quad (7.43)$$

のような運動量を持っていることになる。この二つの和を取って、

$$\text{衝突後：}\left(\frac{2mc}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \frac{2mcv}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, 0, 0\right) \quad (7.44)$$

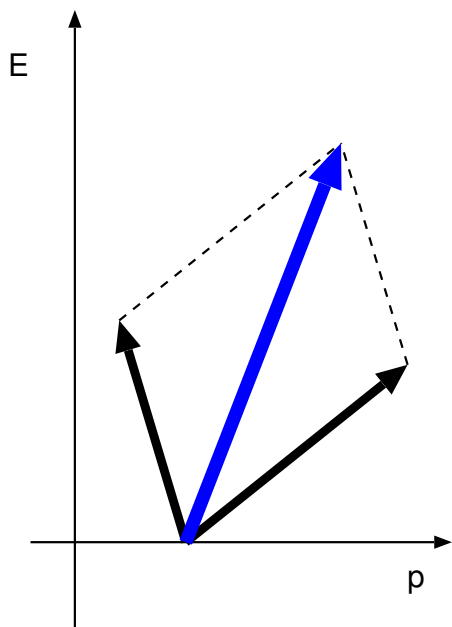
となる。これは $\frac{2m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = M$ と書くと、

$$\left(\frac{Mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{Mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0 \right) \tag{7.45}$$

という形になり、質量 M の粒子が速度 v で動いている時の式となる。

以上からわかることは、二つの粒子が合体するという過程で、エネルギー保存、運動量保存を満足させたなら、必然的に質量は保存しないということである。

このことは以下のように考えることができる。そもそも質量は $m^2c^4 = E^2 - p^2c^2$ という式を満たしている。2個の粒子のエネルギーを足す時、 E は常に正であるから、単純に足し算される。ところが運動量を足す時は、この二つがベクトルであるため、運良く同じ方向を向いていた場合以外は、単純な和よりも小さくなる。たとえば (E_1, \vec{p}_1) というエネルギー、運動量を持った粒子と (E_2, \vec{p}_2) というエネルギー、運動量を持った粒子二つをひとまとめに考えると、全エネルギーは $E_1 + E_2$ であり、全運動量は $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ であって、この大きさは $|\vec{p}_1| + |\vec{p}_2|$ より大きくなることはない(たいてい、より小さい)。つまり合体の結果、より「時間成分が多い」ベクトルができあがる。これが質量を単純な和よりも大きくするのである。

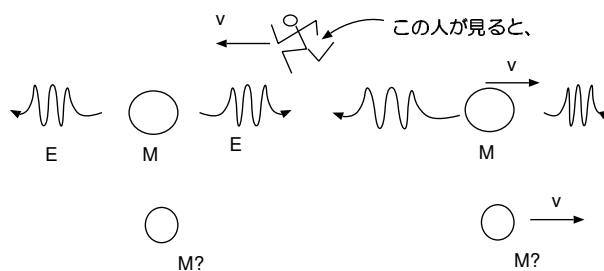


相対論的に考えれば、かならずある座標系で見れば $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ となる。そうであっても $E_1 + E_2$ はもちろん0ではなく、しかもこの大きさは $m_1c^2 + m_2c^2$ より大きくなるのがすぐにわかる。

左図のような4元ベクトルの足し算では、和の結果は元のベクトルを単純に足したものより長い(4次元の意味で、長い)ベク

トルになるのである。

アインシュタイン自身は1905年の論文で以下のようにして質量とエネルギーが等価であることを導いている。今、静止した、質量 M の物体が反対向きに2個の光を出す。光のエネルギーが一個あたり E だとすると、物体のエネルギーは $2E$ 減るはずである。しかし、逆向きに飛び出したのであるから、物体の運動量は変化せず、今も止まっているはずである。これを、物体が速度 V で動いて見える座標系から見たとする。 V の方向は光の飛び出した方向と同じだったとする(註: アインシュタインは角度 θ の方向に飛び出すとして一般的に解いている)。



光はエネルギー E と運動量の大きさ p の間に $E = pc$ の関係があるので、物体の静止系ではエネルギー E で運動量 $\pm E/c$ である。運動している系では、これをローレンツ変換した量となる。表にまとめると、

	静止系		運動系	
	エネルギー	運動量	エネルギー	運動量
物体	Mc^2	0	$Mc^2\gamma$	$MV\gamma$
光1	E	E/c	$\gamma(E - VE/c)$	$\gamma(E/c - VE/c^2)$
光2	E	$-E/c$	$\gamma(E + VE/c)$	$\gamma(-E/c - VE/c^2)$
放射後の物体	$Mc^2 - 2E$	0	$(Mc^2 - 2E)\gamma$	$(M - 2E/c^2)V\gamma$

であり、この式を見ても、放射後の物体が $M - 2E/c^2$ の質量を持った物体として振る舞うことがわかる。なお、アインシュタインがこの式を導いた時、光のエネルギーと運動量が運動系でどのようになるのかはローレンツ変換によってではなく、電磁気の法則から導いている。アインシュタインはこのような考察から、どんな形であれエネルギーが放射されるとその物体の質量は E/c^2 だけ減少するであろうと結論した。

同様に、熱も質量に貢献する。熱が移動するという事はミクロにみれば分子の運動エネルギーが増すということである。 N 個の粒子からなる系があるとして、書く粒子が4元速度 P_I^μ を持っている (I は粒子を区別する添字とする) とすると、全体としては $\sum_I P_I^\mu$ の4元運動量を持つことになる。この N 個の粒子が箱に閉じ込められた気体だとして、箱の静止系で見れば運動量の和 $\sum_I P_I^i = 0$ となる (全体として気体が動いてないのだから)。しかし $\sum_I P_I^0$ はもちろん0ではなく、単なる静止エ

ネルギーの和 $\sum_I m_I c^2$ より大きくなる $\left(P_I^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v_I^2}{c^2}}} \right)$ 。つまり、箱に入った気体のように、個々の構成粒子は運動しているが全体としては静止しているような物体の質量は、その運動エネルギーに対応する分だけ、大きくなるのである。

以上は相対性原理からは自然な結論であるが、はたしてほんとうに全ての種類のエネルギーに対して $E = mc^2$ の関係が成立するかどうかはもちろんわからない。しかし実験はそれを支持している。

たとえばヘリウム ${}^4_2\text{He}$ (2つの陽子、2つの中性子、2つの電子からなる) の質量は 4.0026032497u (原子質量単位) であって、重水素 (1つの陽子、1つの中性子、1つの電子よりなる) の質量 2.01410177779u の2倍より少し軽い。そもそも原子質量単位は ${}^{12}_6\text{C}$ の質量を 12u として定義されているが、水素 ${}^1_1\text{H}$ の質量は 1.0078250319u である。このように原子は構成要素である陽子や中性子の質量の和を取ったものよりも軽くなる。これを質量欠損と呼び、その原因は原子が作られる時に、線などのさまざまな形でエネルギーが放出されることである。鉄など、周期表で真ん中あたりにある元素は質量欠損の割合がもっとも大きく、その分安定であり、ウランなどを核分裂させるとエネルギーが得られる理由はこれである。

$E = mc^2$ という式は原子力などでのみクローズアップされることが多いが、もちろん原子力特有のものではなく、全てのエネルギーで成立すると考えられる。たとえば伸び縮みしたばねは、自然長のバネより $\frac{1}{2}kx^2$ だけ質量が大きいであろうと思われる。ただしこのような日常的なレベルでは $c = 3 \times 10^8$ という数字の大きさのために、観測可能なほどの差にはならない。

実は $E = mc^2$ という式は、アインシュタインが作ったものでもなければ、相対論によって始めて導かれたものでもない。純粋に電磁気学的な計算から、電子のような荷電粒子を動かす時の抵抗 (慣性に相当する) が、回りの電場のエネルギーの分だけ増えることを電磁気の法則から導かれていた。簡単に言うと、電子を動かそうとすると、回りの電場も動かさなくては行けない。しかし、電場は電子と全く同じように時間的に変化することはできず、電場の変化は電子の運動に、少し送れることになる。この送れた電場は電子を加速と逆方向にひっぱるのである。その力が「電磁場の質量」のように作用することを示した。さらにその「質量」が $\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ と同じ速度依存性を持つことも計算されていたのである⁴。相対論的見地を持って計算したわけではなかったのにこのような結果が出たのだが、それは驚くにはあたらない。相対論はそもそも、電磁気学 (あるいはマクスウェル方程式) を尊重することによって生まれたものである。だからマクスウェル方程式にしたがった計算を正しく実行すれば、相対論的にも正しい結果が出るのは当然なのである。

⁴ただし、当時の計算ではエネルギーと運動量の比が後に出た相対論の式とは合わなかった。後にポアンカレが電子を球に保つための力に由来する運動量とエネルギーを計算に入れることで修正されることを示した。