複雑ネットワークにおけるネットワーク生成モデルの解析

又吉清太 （指導教官：清野光弘）

1 はじめに

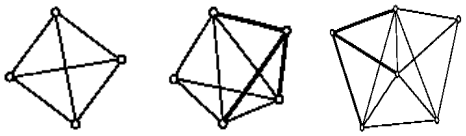
近年、複雑ネットワークが盛んに研究されている。ネットワークの構造を解析し、社会科学、情報科学、工学、生物学、物理学など様々な学問分野に応用されている [1, 2]。複雑ネットワークにおいて、頂点同士の相互作用をグラフ化し、特徴量（ベキ指数、クラスター係数、平均頂点間距離など）や振る舞いが調べられている。例えばネットワークの典型であるインターネットなどが解析され様々な特徴量が計算されている [1, 2]。

本研究ではネットワークの構造に注目する。成長のないネットワークの生成モデルを導入し、ある時刻 t における次数 k の頂点の数 $N_k(t)$ に関するマスター方程式を解析する。さらに、成長のないネットワークの生成モデルから振る舞いを調べ考察する。

2 Barabási - Albert モデル

複雑ネットワークの理論で重要となる量には、次数、クラスター係数、平均頂点間距離などである。次数とは頂点から出ている枝の数である。クラスター係数とは、グラフ中の任意の三つの頂点がどの程度枝で結ばれた三角形を構成しているかを示す量である。

Barabási - Albert モデル（BA モデル）の特徴はネットワークの成長や、新しくネットワークに加わった頂点が次数の高い頂点と結び付きやすい（優先的選択）ことである。BA モデルのルールは基本的にはこの二つだけである。まず、 m_0 個の頂点それぞれが全ての頂点と枝が結ばれたグラフを作る（図 1(1) $m_0 = 4$ の場合）。次に、頂点を一つずつネットワークに追加する。新しい頂点は $m(\leq m_0)$ 本の枝を持ち、新しい枝が次数の高い頂点と結び付きやすくなる確率で決める。m 本の枝を持った頂点を一つずつ上記の式に従って追加していく。追加された頂点に対して、 $m = 3$ の枝を持つようにする。図 1 (2) では (1) の頂点の外側に一つの頂点を設定し（その頂点は $m = 3$ の枝を持つ）、ネットワークが生成される。図 1 (3) においても同様に生成される。このルールからベキ則 $p(k) \propto k^{-3}$ が出てくる [1, 2]。



(1) (2) (3)

図 1 BA モデル

3 ネットワーク生成モデル

頂点数 N 、枝数 M が一定である成長のないネットワークについて考える。解析するモデルとして「枝の再結合を用いたネットワーク生成モデル」[3] を導入する。以下の手順でネットワークを生成する。

1. 初期ネットワークは任意とする。
2. 頂点 u と頂点 v をつなぐ枝 l_{uv} をランダムに選択する。
3. 頂点 m を以下の確率 Π_m で選択する。
$$\Pi_m = \frac{(k_m+1)^\beta}{\sum_i (k_i+1)^\beta}$$
パラメータ β は $0 \leq \beta \leq 1$ の範囲の値を持ち、ネットワーク全体の選択確率を操作することができる。
4. 枝 l_{uv} を枝 l_{um} につなぎ換える。
5. 2. から 4. をネットワークが平衡状態になるまで、すなわち次数分布が変化しなくなるまで繰り返す。

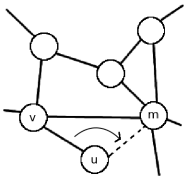


図 2 枝のつなぎ換え

4 マスター方程式

マスター方程式を用いて確率的な振る舞いを行う体系の物理量の時間発展を追う。先ほど導入したモデルにおいて、 t ステップのつなぎ換えをした場合における次数 k の頂点の数を $N_k(t)$ と書く。このとき、次のステップ $t+1$ において $N_k(t+1)$ は確率的に変化する。そこで、マスター方程式を次のように書く [3]。

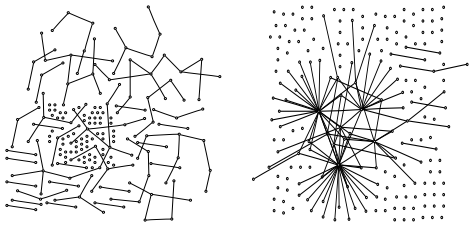
$$N_k(t+1) = N_k(t) - \frac{k}{N\langle k\rangle}N_k(t) + \frac{(k+1)}{N\langle k\rangle}N_{k+1}(t) - \frac{(k+1)^\beta}{Z(t)}N_k(t) + \frac{k^\beta}{Z(t)}N_{k-1}(t)$$

なお、 $Z(t) = \sum_k (k+1)^\beta N_k(t)$ である。

第 1 項は前のステップと変わらない状態を表す。第 2 項はランダムに選ばれた枝が次数 k の頂点から取り除かれる場合を示している。第 3 項は次数 $k+1$ の頂点から枝が取り除かれる場合を示している。第 4 項と第 5 項は優先的な確率 Π_m で選ばれた頂点に枝がつなぎ換えられる場合を示している。

5 結果と考察

頂点数 $N = 200$ 、枝数 $M = 100$ 、パラメータ $\beta = 0.5$ の場合のネットワークが図 3 である。図 3 (1) が初期状態で、図 3 (2) が平衡状態である。



(1) (2)

図 3 ネットワークの生成.(1) 初期状態のネットワーク.(2) 平衡状態のネットワーク.

頂点数 $N = 2000$ 、枝数 $M = 500$ 、パラメータ $\beta = 0.5$ の場合のネットワークを 20 個作り、平均をとった次数分布が図 4 である。図 4 の直線はベキ指数 2.05 である。

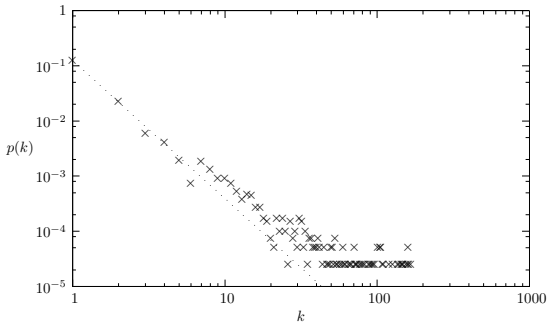


図 4 $N = 2000, M = 500, \beta = 0.5$ の次数分布

BA モデルはネットワークの成長と優先的選択の二つのルールから次数分布がベキ則となった。ネットワークが成長しない場合でも優先的選択のルールだけでベキ則に従う次数分布が表れた。このことから次数分布がベキ則であるには必ずしもネットワークが成長するというルールは必要ではないことが分かった。

6 おわりに

本研究では複雑ネットワークの概要について述べ、成長のないネットワークの生成モデルの解析を行った。

今後は成長のないネットワークの生成モデルのプログラムを多数の頂点、枝で構成される大規模なネットワークについて解析できるように改良を行いたい。また、成長するネットワークの生成モデルを作り、そのネットワークの振る舞いについて調べたい。

参考文献

[1] 増田直紀, 今野紀雄. 『複雑ネットワークの科学』. 産業図書株式会社, 2005.

[2] Réka Albert and Albert-László Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 74, pp. 47–97, jan 2002.

[3] 大久保潤, 田中和之. 統計力学の基礎 –複雑ネットワークとの関連に基づいて–. 数理科学, Vol. 44, No. 8, pp. 24–29, aug 2006.