

卒論テーマ

Maxwell の速度分布則から Einstein の関係を導く

発表者 榮 祐輝

指導教員 与那城 勝邦

20 世紀前半、Drude は金属に自由電子があると考え電気伝導や熱伝導を理解しようと試みた。この試みはその後、Lorentz によって引き継がれ古典力学の範囲内で完成された。これらの理論は古典電子論というが、この理論では金属内電子の運動を容器中の気体分子の運動と同じであると考えた。よって電気伝導理論の背景を知るには、気体運動論を理解する必要がある。19 世紀半ば頃から発展してきた気体運動論は Boltzmann によって定式化された。彼の提出した方程式は Boltzmann 方程式とよばれ、今日でも固体の電気伝導を理解するための重要な出発点である。気体運動論から始まり終わりには電流の流れ易さを示す拡散率についての関係、これを Einstein の関係というが、この関係を導きたい。

まずは容器のなかに気体を詰めて、その気体の分子についてある与えられた範囲内の速度ベクトルをもつ分子の数をあらわす Maxwell の速度分布則を導く。さらに運動量と座標とからできている位相空間中における分布を考え、固体内の電子について、電子が格子の熱振動や不純物等の影響をうけることを考慮し Boltzmann の方程式を導くと

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{M} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_C$$

となる。導くことによって上式の Boltzmann の方程式というのは衝突によって変化する分布を求める式であることわかる。この方程式を適当な条件下で

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_C = -\frac{f - f_0}{\tau}$$

と近似し、さらに電流密度の定義を用いてこの方程式を考察する。すると外場 E が 0 であっても電子の分布によっては電流が流れることがあるとわかる。

また電流密度を電子の電荷量でわったものをベクトルとして新たに定義すると、外場がないときのそのベクトルは拡散率 D を用いて

$$\vec{J} = -D \frac{\partial n(\vec{r})}{\partial \vec{r}}$$

表すことができる。これからわかるように拡散率とは単位体積中の電子数の変化の度合いを表すことがわかる。

最後に、電子の流動速度と電場との関係から得られる比例定数を移動度 μ と定義し、これを用いて拡散率を移動度で表すと

$$D = \frac{k_B T \mu}{e}$$

となる。これが表題の Einstein の関係とよばれるものである。拡散率がなにを意味するかについて議論する。