２次元非圧縮粘性流体の数値シミュレーション

梅田　明日香 (指導教官：中山　章宏)

１．ナビエ-スト ークス方程式の数値シミュレーション

粘性流体を記述する方程式はナビエ (L.M.H Navier,1827) とストークス (G.G.Stokes,1845) によって導かれたのでナビエ-ストークス方程式と呼ばれる。ある面に働く力は圧力だけでなく、粘性による力も加えなければならないことを示す式である。また、流体の質量保存則から連続の式が導かれ、流体の密度 $\rho(x,y,z,t)$ が一定値のとき非圧縮性の流れという。

本研究ではナビエ-ストークス方程式を MAC 法などで差分化し、流れの様子をシミュレーションした。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \mathbf{u} + \mathbf{F} \tag{2}$$

$\mathbf{u} = (u,v,t)$、ρ：密度、$p(x,y)$：圧力、ν：動粘性率、$\mathbf{F} = (F_x, F_y)$：体積力。

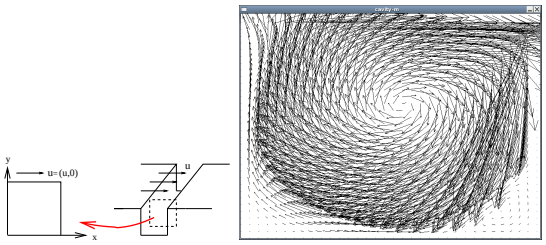

図 1: 正方キャビティ流

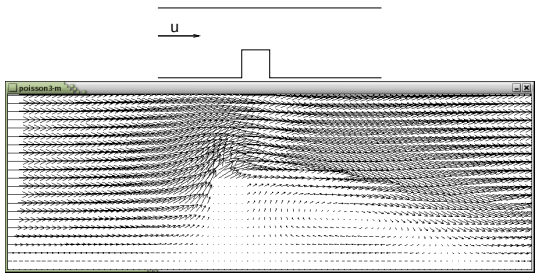

図 2: Poiseuille 流

２．非圧縮性ナビエ-スト ークス方程式の解法～MAC 法～

連続の式とナビエ-ストークス方程式を速度、圧力について解く方法。MAC 法のメリットは３次元問題に適用でき、圧力に関する境界条件が課される問題に自然に適用できることである。非圧縮性の流れを時間発展的に求めることができる。

まずナビエ-ストークス方程式を ($\rho = 1$) の時間微分を前進差分近似する。

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \left(-(\nabla \cdot \mathbf{u}^n)\mathbf{u}^n - \nabla p^{n+1} + \nu \triangle \mathbf{u}^n + \mathbf{F}\right) \tag{3}$$

ただし、圧力は $n+1$ ステップを評価する。一方、近似解法では $\nabla \cdot \mathbf{u}^n = 0$ が成立するとは限らないので、現時点 n では連続の式が満足されていなくても、$n+1$ では連続の式を満足するような圧力を決定する。式 (3) の両辺に $\nabla\cdot$ をかけて

$$\triangle p^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}^n)\mathbf{u}^n + \nu \triangle \nabla \cdot \mathbf{u}^n + \mathbf{F} \tag{4}$$

が得られる。このポアソン方程式は SOR 法を使って解いている。圧力の境界条件は、ここではノイマン条件を与える。

３．今後の課題

数値計算を意味のあるものにするためには、微分を表現するための微小変化である時間刻み Δt はもちろん小さい値をとらなければならない。また、式 (2) の $\nu\triangle\mathbf{u}$ はメッシュの大きさを小さくとると大きくなり、動粘性率 ν を小さくするとレイノルズ数が大きくなり乱流に近づき計算ができなくなる。ちょうど良いメッシュの細かさ dx, dy と動粘性率 ν を調整して $\nu\triangle\mathbf{u}$ が微小変化を表現するような値を見つけなければ計算ができない。

流体力学の複雑な動きは非線型項によるものである。より精度の良い計算方法も学ぶ必要があるが、まずは複雑な流れへの遷移について学びたい。