

1999年8月31日(火)

平成12年度琉球大学大学院入学試験

理工学研究科物質地球科学専攻

物理系

専門科目問題

注意

1. すべての解答用紙に受験番号を書くこと。
2. 問題ごとに別々の解答用紙を用いること。
3. 解答用紙が足りない場合は監督官に要求してよい。

I 下図のように、静止している大きい半径 R の円筒の中で、半径 a の一様な剛体円柱（質量 m ）が常に円筒と接触しながら運動している。半径 R の円筒の中心を原点 O として、鉛直下向きを $+x$ 軸、水平方向に y 軸をとる。また、鉛直軸と半径 a の円柱の中心方向との間の角を θ 、円柱の回転角を φ 、重力加速度を g とする。ただし、円筒は固定され、回転しないものとする。以下の問いに答えよ。（100 点）

問 1 半径 a の円柱がなめらかな円筒内部を回転せずに滑る場合

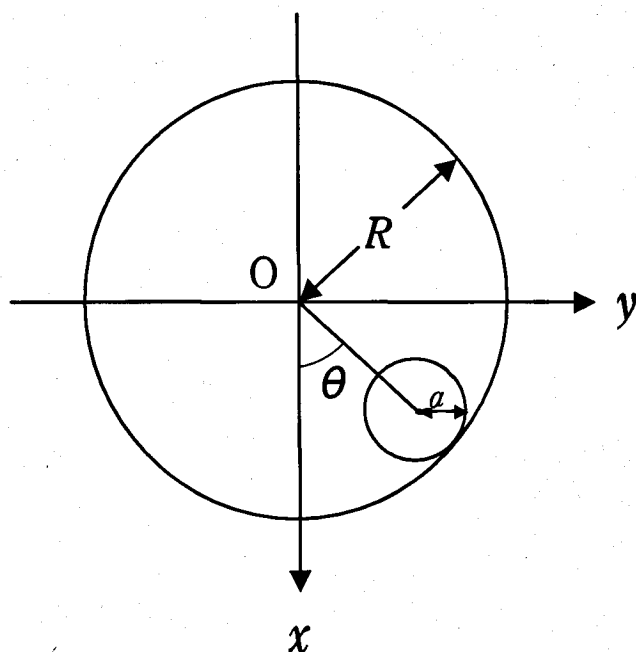
- (1) 半径 a の円柱の中心の座標 x, y を θ, R, a を用いて表せ。
- (2) この中心の運動方程式を x 軸と y 軸方向それぞれについて示せ。ただし、円柱が円筒から受ける抗力を N とする。
- (3) (1) を用いて (2) の運動方程式から N を消去することにより、運動方程式が以下になることを示せ。

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R-a} \sin \theta = 0$$

- (4) 平衡点の近傍 ($\sin \theta \simeq \theta$) で微小振動をする場合、この運動方程式の一般解を求めて、振動の周期を示せ。

問 2 半径 a の円柱が円筒内部を滑らずに転がる場合

- (5) 半径 a の円柱の運動エネルギー T （回転と重心の運動）と位置エネルギー V を求めよ。ただし、半径 a の円柱の慣性モーメントは $I = \frac{1}{2}ma^2$ である。
- (6) 円柱が滑らずに回転するための、円柱の角速度と重心の速度の関係を $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, R, a$ を用いて示せ。
- (7) この系に関する Lagrange 関数を求めよ。
- (8) この Lagrange 関数から θ に関する運動方程式を求めよ。
- (9) 平衡点の近傍で微小振動をする場合、滑らずに転がる運動の周期は問 1 の周期に比べて長い。この理由を述べよ。



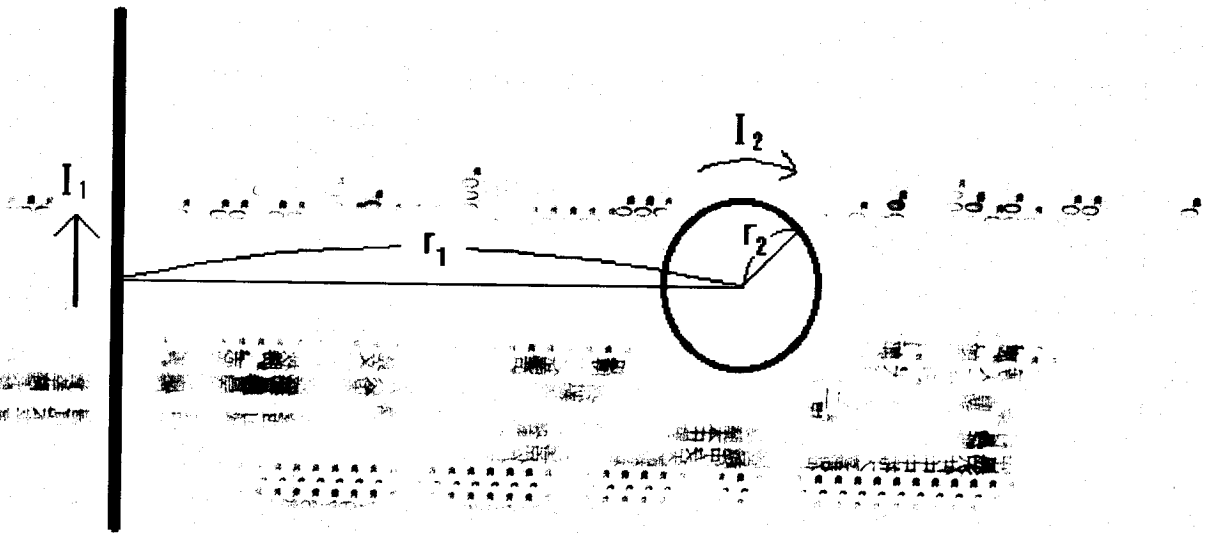
Ⅱ 以下の各問いに答えよ。

(100点)

問1. アンペールの法則によれば、電流 I が流れている導線の周囲にできる磁場を H とするとき、 H を導線の周りを一周する経路に沿って線積分すれば I の値と一致する。

- (1) 上のアンペールの法則を数式で表せ。
- (2) アンペールの法則を表すマクスウェルの方程式を書け。
- (3) アンペールの法則を利用して、電流 I が流れている直線状導線から距離 r の場所での磁場の大きさ H を I と r を使って表わせ。

問2. 下図のように直線状導線1から r_1 だけ離れた点を中心として半径 r_2 の小円状の導線2があり、導線1と2は同一平面上にある。導線2のインダクタンスは L 、抵抗は R である。導線1を流れる電流が変化すれば導線2の中に起電力が発生する。



- (4) 上の現象を表すマクスウェルの方程式を書け。
- (5) 小円内を通る磁束を求めよ。ただし、 $r_1 \gg r_2$ として小円内の磁場はその中心の磁場と同じであると近似してよい。
- (6) 導線1を流れる電流 I_1 が複素表示で

$$I_1 = I_0 e^{i\omega t} \quad (I_0, \omega \text{ は実定数})$$
 であるとき、導線2の中に発生する複素起電力 E_2 を求めよ。導線2の電流の向きは図のように時計回りを正にとる。
- (7) 導線2のインピーダンスはいくらか。
- (8) 導線2に流れる電流 I_2 の振幅は I_1 の何倍になり、位相は I_1 よりいくら進むか。

III

以下の各問いに答えよ。

(100 点)

問1 量子力学の基礎に関する以下の問いに答えよ。

- (1) 質量 m の微視的粒子がポテンシャル $V(r)$ の中で運動している。この粒子の波動関数に対する運動方程式(シュレーディンガー方程式)を書け。
- (2) 微視的粒子は一般に波動性も持つ。微視的粒子が示す波動性について、具体例を挙げて説明せよ。
- (3) 波動関数はどのような物理的意味を持つか、説明せよ。

問2 質量 m の粒子が、ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ +\infty & x < 0, \quad a < x \end{cases}$$

の中を1次元運動している。

- (4) この粒子の運動を記述する波動関数が満たすべき境界条件を書け。また、そうなるべき理由を説明せよ。
- (5) この系のエネルギー固有値は0より大きくなる。その理由を量子力学の基本原則から簡潔に説明せよ。
- (6) この系の固有波動関数は、

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

で与えられる。このことを確かめよ。また、エネルギー固有値を求めよ。

- (7) 固有関数は

$$\psi_n(x) = \frac{1}{i\sqrt{2a}} \left[\exp\left(i \frac{n\pi}{a} x\right) - \exp\left(-i \frac{n\pi}{a} x\right) \right]$$

と書き直すことができる。このことから微視的粒子はどのような運動をしていると考えられるか。古典力学の場合と対応づけて説明せよ。

- (8) 粒子の位置と運動量の期待値を求めよ。
- (9) 運動量の不確定さ $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$ を求めよ。

IV N 個の同種原子からできている固体中で、これらの N 個の原子が互いに独立に平衡点の付近で小振動しているというモデルを考える。原子の運動は一直線上を動く振動数 ω の単振動(一次元調和振動子)であるとする。量子論によれば、一次元調和振動子のエネルギー固有値は

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で与えられる。又、統計力学によれば調和振動子一個がエネルギー ϵ_n の量子状態になる確率 P_n は

$$P_n = \frac{1}{Z_1} \exp\left(-\frac{\epsilon_n}{k_B T}\right), \quad (k_B: \text{Boltzmann 定数}, T: \text{絶対温度}, Z_1: \text{分配関数})$$

で与えられる。以下の各問いに答えよ。

(100点)

問1 分配関数 Z_1 は

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta \epsilon_n), \quad \left(\beta \equiv \frac{1}{k_B T}\right)$$

で与えられることを示せ。

問2 (a) 調和振動子一個の分配関数 Z_1 を求めよ。(b) この系(N 個の調和振動子)の分配関数 Z_N を求めよ。

問3 エネルギー E は

$$E = N \sum_{n=0}^{\infty} P_n \epsilon_n = -\frac{d}{d\beta} (\ln Z_N)$$

で与えられることを説明せよ。

問4 この系のエネルギー E は

$$E = N\hbar\omega \left[\frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} + \frac{1}{2} \right]$$

で与えられることを示せ。

問5 この系のHelmholtzの自由エネルギー F を求めよ。

問6 この系の比熱 C_V を求めよ。

問7 比熱 C_V の高温($k_B T \gg \hbar\omega$)及び低温($k_B T \ll \hbar\omega$)の極限でのふるまいを論ぜよ。

問8 このモデルの比熱は高温では実験結果と一致するが、低温側ではあまり良く一致しない。一致しない理由を述べよ。

1999年8月31日(火)

平成12年度琉球大学大学院入学試験

理工学研究科物質地球科学専攻

物理系

英語問題

注意

1. すべての解答用紙に受験番号を書くこと。
2. 解答用紙が足りない場合は監督官に要求してよい。

問1. 下線の部分を和訳せよ。(30点)

Abstract

- ① I review the development of particle physics from the viewpoint of theoretical methodology. Particle physics has gone through certain characteristic periods in the course of discoveries and accumulation of knowledge, both factual and theoretical. To analyze this situation, I draw on the theses of three stages and three modes, and illustrate the points with historical examples, up to the present Standard Model and the speculative theories of unification. As an exercise in this analysis, I propose a possible regularity in the quark masses.

1 INTRODUCTION

- ② By nature, scientists are optimists. They are forward-looking. I have been told that the main theme of the conference was not to look back, but to look forward and try to anticipate the physics of the twenty-first century. But I do not think I am up to such an ambitious task. Prediction is always difficult, especially prediction of the future, as Niels Bohr was fond of quoting. So I will first look back 50 years of particle physics. They coincide with the post-war years which also more or less covers the bulk of the most important developments of what we call now high energy or particle physics. If my tone sounds rather philosophical, it may be as much due to my age as it is due to the education I received in my early years.

Indeed the title of my talk reveals my age and my background. When I became a physics student at the University of Tokyo some 55 years ago, the Bohr atom was 28 years old, and quantum mechanics was only 15 years old.

- ③ Compare this with the present day. The main achievement of particle physics is encoded in the Standard Model, which is almost 30 years old. Then the supersymmetry is 23 years old, and the superstring 15 years. Do the youngest generation of theoretical physicists look upon the Standard Model as I had looked upon the Bohr theory? Do they look upon the superstring theory as I had looked upon quantum mechanics? I do not know, but I would not be too surprised if some of them do. On the other hand, even they would admit that, unlike quantum mechanics, supersymmetry and superstring are still speculative theories. I must say that the time scale of progress has lengthened compared to those truly revolutionary days.

By Y. Nambu (1997).

問2. 何故大学院進学を希望するのか, 和文(200字程度)で書き, それを英文で表現せよ。(30点)

問3. 以下のパラグラフ①, ②, ⑤, ⑦を和文で表現せよ。
(40点)

① It is a pleasure and an honor to speak at this wonderful symposium devoted to the future of physics. The subject of my talk is quite appropriate, for I shall discuss the future of elementary particle physics.

② Does elementary particle physics retain the scientific vitality that has characterized it for the last fifty years? At the very moment that elementary particle physics, after fifty years of intense experimental and theoretical effort, has succeeded in developing a comprehensive theory of the known forces—the standard model—claims are made that the field is dead. The very success of the standard model has led some to experience boredom. The experimental facilities needed to explore beyond what we now know are bigger, more expensive and more difficult to exploit. The time scale of experimental particle physics has perhaps doubled, so that it takes approximately fifteen years from the planning of an experiment to its completion. The size of the collaborations involved in these experiments has also greatly expanded with some unfortunate consequences. On a more fundamental level, we can now identify new scales of energy, where new physics surely occurs, but which at the moment seem frustratingly unattainable.

③ In view of all this, the biggest danger to particle physics is that it will dry up and that will cease to attract the best and the brightest young people. A scientific field requires at least two things to remain vital. First, it requires good questions, interesting questions, important questions, and accessible questions. Second, it requires new experimental instruments and techniques that can be used to probe and answer these questions.

④ Below I review the state of particle physics and argue that the ingredients for the continued vitality of the field exist, that the questions that we can ask at this point in time are as exciting as they have ever been, if not more so. Furthermore in the coming decade the instruments necessary to address some of these questions will be built, and exciting discoveries are likely to be made. Finally we have the beginning of an exciting new theory which portends to alter the conceptual structure of microscopic physics, to revolutionize our notions of space and time, and to provide the framework for a unified theory of all the forces of nature.

⑤ I start by reviewing, very schematically, the deep conceptual lessons that we have learned over the past fifty years. Then I enumerate some of the questions that we can now ask and hope to answer and address the challenges that confront us—immediate and long term. Finally, I discuss the status of string theory.

⑥ Elementary particle physics began in earnest after World War II with the advent of modern accelerators that could probe the microscopic structure of matter to incredibly small distances. By the middle of the 1970's the many discoveries made by these instruments had prompted theorists to develop a comprehensive theory of the fundamental constituents of matter and the laws that govern their interactions—the “standard model.” This theory describes the forces of electromagnetism, the weak interaction responsible for radioactivity, and the strong nuclear force that governs the structure of nuclei, as consequences of local (gauge) symmetries. These forces act on the fundamental constituents of matter, which have been identified as pointlike quarks and leptons. In the following decades this theory has been subjected to precise tests, and its theoretical structure has been greatly developed and understood.

⑦ What have we learned in fifty years? There are four important lessons, that I feel are more fundamental than the precise details of the standard model:

- Quantum field theory works;
- The secret of nature is symmetry;
- The standard model teaches us little about the fundamental theory of physics;
- We have learned many new questions.

By D.J. Gross (1997).