

2000年2月8日(火)

平成12年度琉球大学大学院入学試験

理工学研究科物質地球科学専攻
物理系

専門科目

注意

1. すべての解答用紙に受験番号を書くこと.
2. 問題ごとに別々の解答用紙を用いること.
3. 解答用紙が足りない場合は監督官に要求してよい.

I

以下の各問に答えよ。

(100 点)

質量 m の質点 A が力を受けずに運動している。直交座標 (x, y, z) を一般化座標とする。

問 1 質点 m の運動エネルギー T および位置エネルギー U を求めよ。

問 2 この質点のラグランジアン L を求めよ。

問 3 x , y および z 方向についての運動方程式を求めよ。

次に、この質点 A が質量 M の他の質点 B から万有引力を受けて運動する場合について考える。ただし、 $M \gg m$ であるとし、一般化座標として質点 B を原点とする極座標 (r, θ, ϕ) を用いよ。

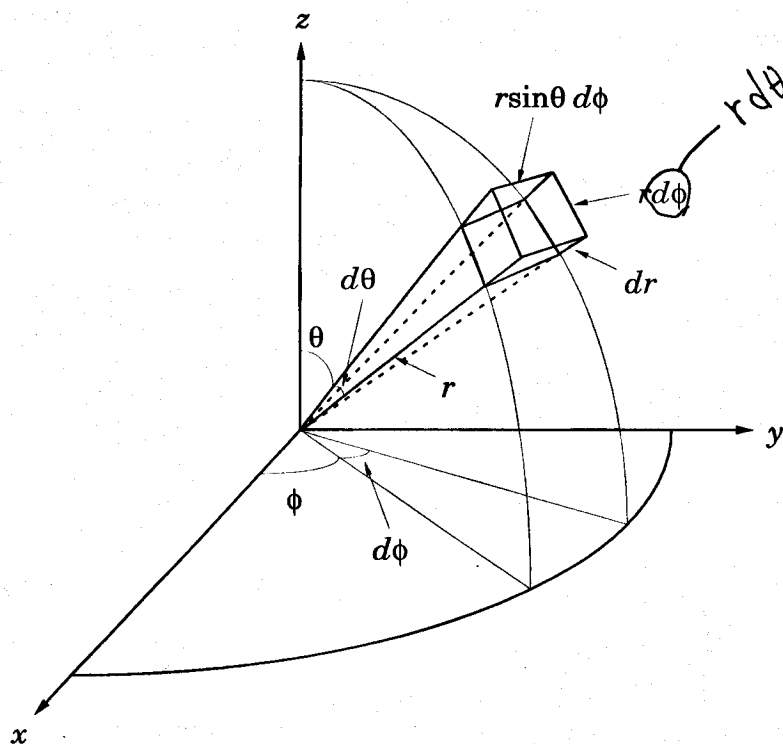
問 4 下図を参考にして、運動エネルギー T' を求めよ。

問 5 質点 A と B の距離を r とする。質点間に働く力 F を求めよ。

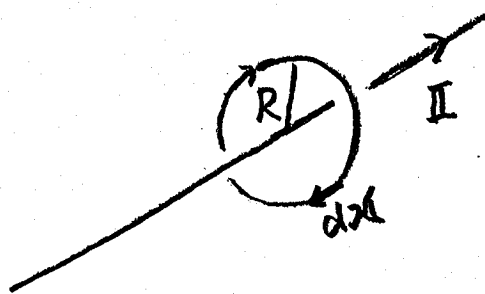
問 6 問 5 の F を用いて、位置エネルギー U' を求めよ。

問 7 一般化運動量 p_r , p_θ および p_ϕ を求めよ。

問 8 ハミルトニアン H を求めよ。



①
 [2] 無限直線定常電流 I において、一定の半径 R の円 C が I に直交しているとき、その円周上に磁場 H が、次の式



$$H = \frac{I}{2\pi R} e \quad (1)$$

で与えられる事は、Ampère の実験式からわかっている。

ただし、 I は I の大きさであり、 e は円周上の接線単位ベクトルである。

この事について、以下の問に答えよ。(100点)

問1. 無限に長いという直線電流とは物理的に何を意味するのだろうか。これを論ぜよ。

さて、(1) の実験式を多少変形する：

②

$$2\pi RH = I\mathcal{C} = i\pi R^2\mathcal{C}$$

(2)

ただし、電流密度 $\mathcal{C}$ を

$$\mathcal{C} \equiv \frac{I}{\pi R^2}$$

で導入した。 $\mathcal{C}$ は I の大きさである。

(2) 式と $\mathcal{C}$ との内積をつくり、

円周長と面積がそれぞれ積分形で

$$2\pi R = \int_C dx$$

$$\pi R^2 = \int_S dS$$

と与えられる事に留意すると、(2) 式は

$$H \int_C dx = i \int_S dS \quad (3)$$

又は

$$\int_C H \cdot dx = \int_S \mathcal{C} \cdot dS \quad (4)$$

と書ける。ただし、 $H \equiv e \cdot H$ である。

問2. (3)式と(4)式を比べて見ると H は積分の中に入れられている事がわかる。どうして、これが可能なのかを言え。又、

$$H dx = H \cdot dx$$

としてよい理由も述べよ。

上の(4)式は図のような特別の形状 (C, S) について成立する実験式であった。この実験式(4)を普遍化・一般化する事を試みよう。

一般的の形状 (C, S) で成立している Stokes の積分定理は

$$\int_C H \cdot dx = \int_S \text{rot } H \cdot dS$$

である。

(4)

この定理を(4)式に対応する
 一般的形状においても成立
 すると思われる式(式の形は
 (4)式と同じであると仮定し
 よう!)に代入すると

$$\int_S (\text{rot } H - \tilde{J}) \cdot dS = 0 \quad (5)$$

と書き換えられ、結局

$$\text{rot } H(x) = \tilde{J}(x) \quad (6)$$

を得る事が出来る。

尚、(5)式を(6)式のさうに変形
 してよい数学的理由を述べよ。

更に、電流密度が非定常な場

合大も拡張する事を試みよう。(6)式
によれば

$$\text{net } H(x, t) = \tilde{L}(x, t) \quad (7)$$

← 空間の位置関係

と仮定するのは自然な事と思われる。

問4. 式(7)には、1個の矛盾が含まれている。両辺の div を調べる事により、その矛盾を示せ。

問5. Maxwell は、この矛盾をどのように取り除いたかを述べ、矛盾のない合理的な方程式を導け。

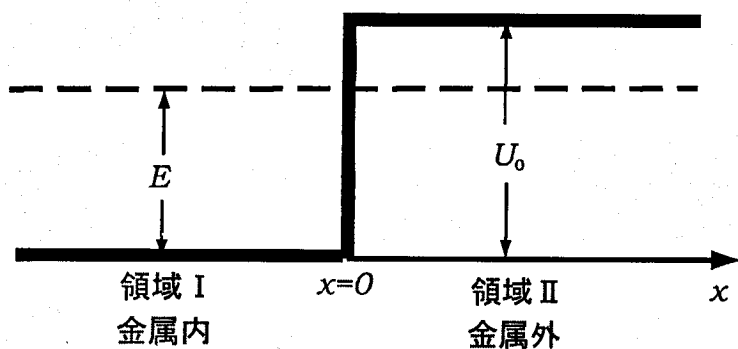
問6. 以上の事などを念頭に置きながら、種々の観点から、物理の創り方やその正当性等について、あなたの思う(考える)所を存分に述べよ。

III 金属表面に対する簡単なモデルとして、下図のような一次元モデルを考える。 $x < 0$ が

金属内、 $x > 0$ が金属外、 $x = 0$ が金属表面であり、 x は $-\infty$ から $+\infty$ まで存在していると簡単化する。質量 m の電子に対するポテンシャルは金属内（領域 I）で $U(x) = 0$ 、金属外（領域 II）で $U(x) = U_0$ である。金属中での電子のエネルギー E は U_0 よりも小さいとして、(1) から (6) の問いに答えよ。 $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ 、

$q = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$ で定義される k 、 q を用いると簡便になる場合には、これらを用いて解答せよ。 (100 点)

- (1) 領域 I での定常状態に対するシュレーディンガー方程式を書け。ここで、領域 I の波動関数を $\phi_I(x)$ と表記せよ。
- (2) 問 (1) の方程式は二つの基本解（特殊解）を持つ。一つは金属表面への入射波を、他方は金属表面からの反射波を表す。この方程式の一般解 $\phi_I(x)$ を任意定数 A 、 B を用いて書け。ここで、 A は入射波に掛かる係数であり、 B は反射波に掛かる係数である。
- (3) 領域 II での定常状態に対するシュレーディンガー方程式を書け。ここで、領域 II の波動関数を $\phi_{II}(x)$ と表記せよ。
- (4) 問 (3) の方程式の基本解は二つ存在するが、一つは捨てることができる。捨てられる基本解を明示し、捨てられる理由を述べよ。
- (5) 問 (3) および問 (4) の考察から、 $\phi_{II}(x)$ は一つの任意定数 C を用いてどのように表せるか。
- (6) 波動関数が金属表面でなめらかになることを用いて、 A 、 B 、 C の間の関係式を二つ求めよ。
- (7) 問 (6) の関係式を解いて、比 B/A と C/A を求めよ。
- (8) 問 (7) の結果を用いて、金属表面での入射波の反射率 R を求めよ。



問1 以下の各問いに答えよ。

- (1) 熱力学第2法則の Thomson による表現を以下の言葉を使って書け。[仕事、熱、全て]
- (2) 絶対温度 T 、エントロピー S 、圧力 P 、体積 V を持つ系のエネルギー E の変化量 dE について $dE = TdS - PdV$ が成立することから、 $T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V$, $P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S$ を導く過程を示せ。
- (3) 1モルの単原子分子理想気体の場合、内部エネルギーは $E = \frac{3}{2}RT$ 、圧力 P は $P = \frac{RT}{V}$ である (R は気体定数、 V は体積、 T は絶対温度)。理想気体のエントロピー S を求める過程を示せ。ただし、エントロピーの原点は $V = V_0, T = T_0$ の時 0 とする。

問2 各々のエネルギーが $nh\nu$ (n は非負の整数、 h はプランク定数、 ν は振動数) で表される 1次元調和振動子 N 個からなる系 (各々の調和振動子は区別可能) を考える。系の持つ全エネルギーが $E = Mh\nu$ (M は 0 以上の整数) であるとき、ボルツマン定数を k として、以下の問いに答えよ。ただし、 M, N はどちらも非常に大きい数であるとし、Stirling の公式 $\log n! \simeq n \log n$ を使え。

- (1) この系の取り得る状態数 W は、 $\frac{(M+N-1)!}{M!(N-1)!}$ と表される。 W はどのようにして求められるか説明せよ。
- (2) エントロピー S を求めよ (M, N が大きいとして近似せよ)。
- (3) 絶対温度 T を求めよ。

問3 前問と同様の性質を持つ調和振動子 N_1 個からなる系と N_2 個からなる系とを接触させ、互いにエネルギーのやりとりが可能であるようにした。

- (1) これらのそれぞれが $E_1 = M_1h\nu, E_2 = (M - M_1)h\nu$ のエネルギーを持っている場合の全状態数を求めよ。
- (2) 全エネルギー $E_1 + E_2 = Mh\nu$ が一定だとする。 M_1 は 0 から M までの値をとる可能性があるが、そのうち実現可能性がもっとも高いのは、系の取り得る状態数が最大になる状態である。この状態は巨視的に見ると、二つの系のある熱力学的物理量が等しくなる状態である。その物理量が何か予想した後、実際に状態数が最大となる M_1 を求め、予想が正しいことを確かめよ。

I. 次の英文の下線部 {1} {2} {3} を訳せ。

The discovery of high temperature superconductivity in copper oxides in 1986 has given rise to great excitement in the entire scientific and engineering community. "High Tc superconductivity" suddenly became a hot topic, involving tens of thousands of active researchers. {1} It was initially expected that the mechanism of high Tc superconductivity would be understood quickly and that important applications would follow immediately in many technologies. Unfortunately, neither of these expectations has come true. Like any other deep scientific problems, high Tc superconductivity continues to resist any simplistic solution.

This was already clear in 1990, when the Solid State Advisory Committee of ICTP decided to organize a Spring College on Superconductivity for 1992. {2} The main purpose of the College was to train young enthusiastic physicist entering this competitive field of research, to provide them with the necessary basic knowledge and to expose them to the latest developments. The organizers were very fortunate in being able to attract an outstanding international faculty to give both pedagogical courses and up to the minute information about current developments. Some of the faculty were too heavily committed to provide a chapter for this book. A full list of all the lectures is given to provide an idea of full extent of the courses given at the College. The lectures which appear here give good coverage of the basic physics and the level of understanding in 1992. {3} As we write this Preface in 1994 high Tc superconductivity research continues unabated.

(以下略)

(P.N. Butcher and Yu Lu in *Superconductivity: From Basic Physics to the Latest Developments* (World Scientific 1995) Preface 抜粋)

II. 次の日本語を英訳せよ。

図1のように、地面からの高さ h [m]の所で小石を速さ 9.8m/s で水平方向に投げたところ、小石は t [s]後に地面に 45° の角度で落下した。落下に要する時間 t 、高さ h 、はおおよそいくらか。最も適当な数値を、下の①～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし、重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 とし、空気による抵抗を無視する。

(以下は訳さなくてよい。)

$t = \square$

$h = \square$

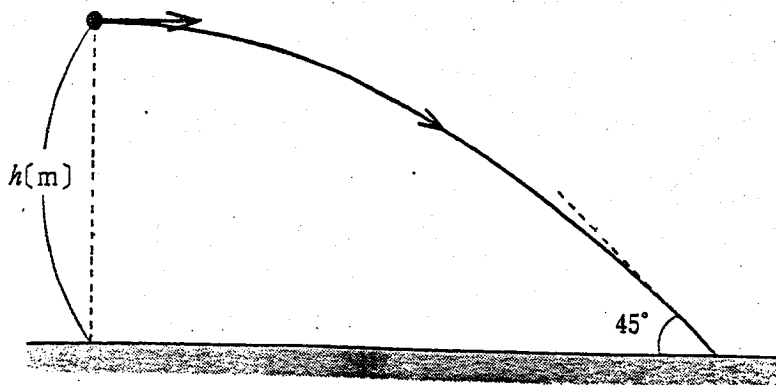


図 1

- ① 0.1 ② 0.5 ③ 1 ④ 5 ⑤ 10

III. 次の英文を訳せ。

The Battle of Okinawa, which later came to be called the "Typhoon of Steel," claimed the lives of more than 200,000 people.

Included among the dead were girls 15 to 19 years of age of the Okinawa Women's Normal School and the First Prefectural Girls' High School. They were mobilized as nurses attached to army field hospitals and many of them never returned alive.

Forty years since, more than half of the nation's population are those people born after the war, and memories of the war are fading away with the passage of time.

In a world under constant threats of nuclear war, we are gravely concerned over the recent international situation pregnant with immediate dangers of war.

We built the Himeyuri Peace Museum here with the firm determination of the Himeyuri Alumnae "never to recognize any type of war and never let it happen again."

We sincerely hope that many people will visit the Museum to understand the true picture of the battle, and to pass the message of permanent peace on to future generations.

The Museum was constructed with the cooperation of countless persons, not to mention the efforts of the Himeyuri Alumnae.

My heart-felt thanks to all concerned.

July 23, 1989

(以下3行は訳さなくてよい。)

Yukiko Minamoto

President

Himeyuri Alumnae Association

(ひめゆり平和記念館案内書 (英語版) p.6)

記念資料