

平成12年9月5日
(2000年)

平成13年度琉球大学大学院入学試験

理工学研究科物質地球科学専攻

専門科目
(物理系)

注意

1. すべての解答用紙に受験番号を書くこと。
2. 問題ごとに別々の解答用紙を用いること。
3. 解答用紙が足りない場合は監督官に要求すること。

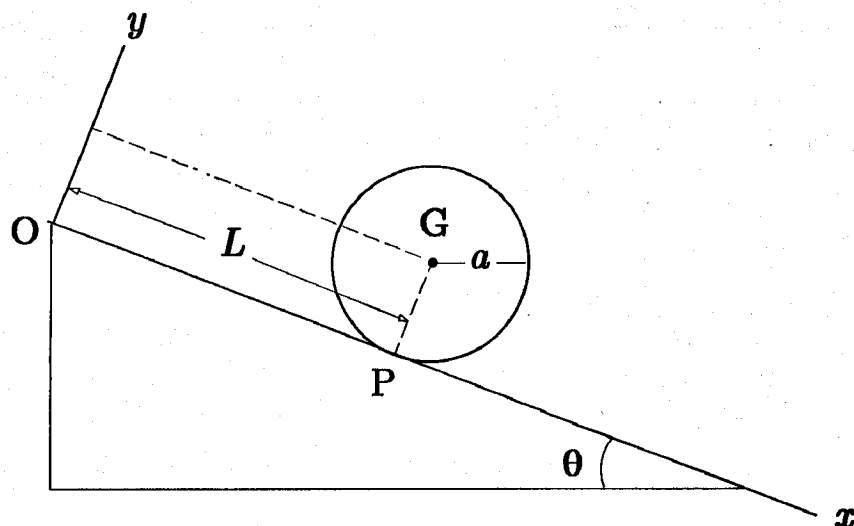
I 図のように質量 M 、半径 a 、長さ b の一様な円柱剛体が傾き θ の粗い斜面を原点 O から初速度 $V = 0$ で滑ることなく転がり始めた。このとき剛体は斜面から摩擦力 F 、垂直抗力 R を受ける。重力の加速度を g 、回転軸の周りの慣性モーメントを $I = Ma^2/2$ とし、座標軸として斜面下方向を x 軸、面に垂直方向を y 軸にとり、以下の各問いに答えよ。(100 点)

問1 原点 O から転がり始めて t 秒後の重心 G の座標を (X, Y) とし、回転軸の周りの角速度を ω とする。

- (1) 円柱剛体の重心 G の x 軸方向と y 軸方向の運動方程式を書け。
- (2) 円柱剛体の回転の運動方程式を書け。
- (3) 重心速度 V と ω の間には $V = a\omega$ の関係があるがその理由を説明せよ。
- (4) 原点 O から転がり始めてから t 秒後の重心速度 V を g 、 θ 、 t を用いて表せ。

問2 転がり始めてから円柱剛体は原点 O から L だけ離れた P 点に達した。

- (1) 原点 O を基準にすると P 点での円柱剛体の位置エネルギーはいくらか。
- (2) P 点での円柱剛体の並進運動エネルギーはいくらか。
- (3) P 点での円柱剛体の回転のエネルギーは並進運動エネルギーの何倍か。
- (4) 原点 O と P 点でエネルギーを比較して、エネルギー保存則が成り立つかどうかを説明せよ。



II

以下の各問いに答えよ。

(100 点)

問1 真空中（誘電率 ϵ_0 ）に半径 a の導体球がある。その導体球に遠方から少しずつ正電荷を運び帯電させ、総電気量 Q にした。

- (1) 導体球の中心から距離 r ($a < r$) における電場をガウスの法則より求めよ。
- (2) 距離 r ($a < r$) における電位を定義より求めよ。
- (3) この導体球の電気容量 C を求めよ。
- (4) 導体球の電荷をゼロから Q にするのに必要なエネルギーを求めよ。このエネルギーは静電エネルギーである。
- (5) 導体球の周りを囲む空間にできている電場の全エネルギーは、(4)で求めたエネルギーに等しいことを示せ。ただし、電場 E でのエネルギー密度は $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ である。

問2 半径 ℓ の円形断面をもつ無限に長い導線に一樣な電流 I が流れている。

- (1) 導線内の中心から距離 r ($0 < r < \ell$) における磁場を求めよ。
- (2) 導線内の中心から距離 r ($\ell < r$) における磁場を求めよ。
- (3) 導線の単位長さ（電流の流れている方向の単位長さ）と、領域 $\ell < r < R$ に囲まれた空間に存在する磁場エネルギーを求めよ。ただし、磁場 H でのエネルギー密度は $\frac{1}{2}\mu_0 H^2$ (μ_0 は透磁率) である。

III

以下の各問いに答えよ。

(100 点)

問1 時刻 t における実ポテンシャル $V(x, t)$ のもとで x 軸上を運動する質量 m の粒子がある。その波動関数を $\psi(x, t)$ とする。

- (1) $\int_a^b \psi^*(x, t)\psi(x, t) dx$ ($a < b$) の物理的意味を述べよ。ただし, $a < b$ であり, $\psi^*(x, t)$ は $\psi(x, t)$ の複素共役である。
- (2) $\psi(x, t)$ の満たす (時間に依存する) シュレーディンガー方程式を書け。
- (3) $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ が次の連続の方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} = 0$$

ここで,

$$j(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^*(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - \psi(x, t) \frac{\partial \psi^*(x, t)}{\partial x} \right]$$

- (4) 次の関係式が成立することを示せ。

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = j(a, t) - j(b, t)$$

- (5) 上記 (4) の関係式をもとにして, $j(x, t)$ の物理的意味を述べよ。

問2 $\hat{x}$ を位置演算子, $\hat{p}$ を運動量演算子とする。また, $\hat{A} = \hat{x} - a$, $\hat{B} = \hat{p} - b$ とおく。ただし, a, b はそれぞれ $\hat{x}, \hat{p}$ の平均値 (期待値) である。演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ はエルミートである。すなわち, 任意の波動関数 $\psi(x, t), \phi(x, t)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \hat{A} \phi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A} \psi(x, t))^* \phi(x, t) dx$$

を満たす。 $\hat{B}$ も同様の式を満たす。

- (1) $\hat{x} = x$, $\hat{p} = -i\hbar \partial / \partial x$ において, $[\hat{x}, \hat{p}] \equiv \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}$ を求めよ。
- (2) $[\hat{A}, \hat{B}]$ を求めよ。
- (3) エルミート演算子の固有値および固有関数の性質を書け。
- (4) 規格化された波動関数を $\psi(x, t)$ とする。演算子 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ がエルミートであることを用いて, 実数値関数 (s は実変数)

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) (\hat{A} - is\hat{B}) (\hat{A} + is\hat{B}) \psi(x, t) dx$$

は常に零以上であることを示せ (必要なら $\phi = (\hat{A} + is\hat{B})\psi$ とおけ)。ただし, a, b はそれぞれ $\psi(x, t)$ における $\hat{x}, \hat{p}$ の平均値である。

- (5) $f(s)$ の判別式から $\hat{x}$ と $\hat{p}$ の不確定性関係 $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ を求めよ。ただし,

$$(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \hat{A}^2 \psi(x, t) dx, \quad (\Delta p)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \hat{B}^2 \psi(x, t) dx$$

である。

- (6) 不確定性関係 $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ の物理的意味を述べよ。

IV

本問で取扱う体系の圧力を p , 体積を V , 温度を T , エントロピーを S , 内部エネルギーを E , ヘルムホルツの自由エネルギーを F とする。このとき, 以下の各問いに答えよ。

(100 点)

問 1 (1) 定積比熱が常に正であることから, 内部エネルギーの減少に伴って系の温度が低下することを示せ。

(2) 熱効率が 100% であるような完全な熱機関は存在しない。これはなぜか。

(3) 統計力学における等重率の原理を述べよ。

問 2 (1) 準静的過程に対する熱力学の基本法則により, E の全微分形式は

$$dE = -pdV + TdS$$

で与えられる。このとき, F の全微分形式が

$$dF = -pdV - SdT$$

であることを示し, マクスウェルの関係式を導け。ただし, $F = E - TS$ である。

(2) 等温等積の不可逆過程の場合, 系の F はどのように変化するか説明せよ。

問 3 カノニカル分布に従う系を考える。この系が状態 j の微視的状态に出現する確率 p_j は $p_j = \exp(-\beta E_j)/Z$ で与えられる。ここで, E_j は状態 j のエネルギーであり, β は k_B をボルツマン定数として, $\beta = 1/(k_B T)$ で与えられる。また, この系の F と分配関数 Z との間に, $-\beta F = \log Z$ が成立する。

(1) $Z = \sum_j \exp(-\beta E_j)$ を示せ。

(2) $E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$ を示せ。

(3) ある気体の分配関数を計算したところ, $Z = V^N (2\pi m k_B T)^{\frac{3N}{2}} / (N! h^{3N})$ であった。ここで, N は分子数, m は質量, h はプランク定数をそれぞれ表す。この気体の p , E , S をそれぞれ求めよ。

平成12年9月5日
(2000年)

平成13年度琉球大学大学院入学試験

理工学研究科物質地球科学専攻

英語問題 (物理系)

注意

1. すべての解答用紙に受験番号を書くこと。
2. 解答用紙が足りない場合は監督官に要求すること。

[1] 次の英文を日本語に訳せ。解答は文頭の番号で区別して書け。(24点)

(1) The Okinawa Prefectural Government (OPG) took some satisfaction from the fact that the issue of the 15-year time limit on military use of the proposed replacement for Futenma air station was on the table at the meeting between Prime Minister Mori and President Clinton on July 22.

(2) While there was no substantive progress on the topic, and prospects for any scaling down of the American presence remain remote, the OPG will continue to ask Tokyo to take a firm stance in negotiations.

(3) Speaking in front of his official Naha residence on the afternoon of July 22, Governor Inamine said in reply to questions from the press, "I believe that the issue of relocation will be up for further discussion between Washington and Tokyo."

(4) The OPG considers the meeting to have given a boost to the search for a solution to the problem, as, in the words of Seiichi Oyakawa, Chief of the Executive Office of the Governor, "The issue was brought to the top table, and that is a significant step."

(Shimpo Weekly News)

[2] 次の下線を引いた英文を日本語に訳せ。解答は文頭の番号で区別して書け。(24点)

(1) The necessity for a departure from classical mechanics is clearly shown by experimental results. In the first place, the forces known in classical electrodynamics are inadequate for the explanation of the remarkable stability of atoms and molecules, which is necessary in order that materials may have any definite physical and chemical properties at all. (2) The introduction of new hypothetical forces will not save the situation, since there exist general principles of classical mechanics, holding for all kinds of forces, leading to results in direct disagreement with observation.

(3) The concepts of big and small are then purely relative and refer to the gentleness of our means of observation as well as to the object being described. In order to give an absolute meaning to size, such as is required for any theory of ultimate structure of matter, (4) we have to assume that there is a limit to the fineness of our powers of observation and the smallness of the accompanying disturbance - a limit which is inherent in the nature of things and can never be surpassed by improved technique or increased skill on the part of the observer.

("the need for a quantum theory" by P.A.M.Dirac)

[3] 例のように、各質問文に適切な内容の英語で答えよ。答えは文頭の番号で区別して書け。(20点)

例: 1. Where is my book? (答え) 1. It is on your desk.

1. How far is it to your house?
2. You usually have lunch at one o'clock, don't you?
3. Why are you laughing?
4. There wasn't a message for me, was there?
5. Whom shall I give this book to?

[4] 次の日本語を英文に訳せ。解答は文頭の番号で区別して書け。(32点)

(1) この報告書で私はまず考察系中の粒子間相互作用ポテンシャルについて述べ、そして次に熱力学の基礎法則に基づき系の安定性について議論する。粒子間相互作用は引力部分と斥力部分から成る。前者は AB 理論から得られ、後者は CD 理論における静電的な斥力である。

(2) 土曜日の夜に首里グランドキャッスルで開催された大歓迎会のハイライトはサミットのテーマ曲 "Never End"であった。それは沖縄の pop 歌手安室奈美恵によって歌われた。彼女は作曲家の小室哲也と一緒に出ている。

(3) 最近国際交流が盛んになってきた。外国人とつきあう際に大切なことの一つは、自国の文化のみでなく相手国の文化にも興味を示すことである。

system in consideration 考察系; particle 粒子; interaction 相互作用;
thermodynamics 熱力学; attractive 引力の; repulsive 斥力の;
electrostatic 静電的な; gala reception 大歓迎会