

2001年2月13日(火)

平成13年度琉球大学大学院入学試験

理工学研究科博士前期課程

物質地球科学専攻(物理系)

専門科目問題

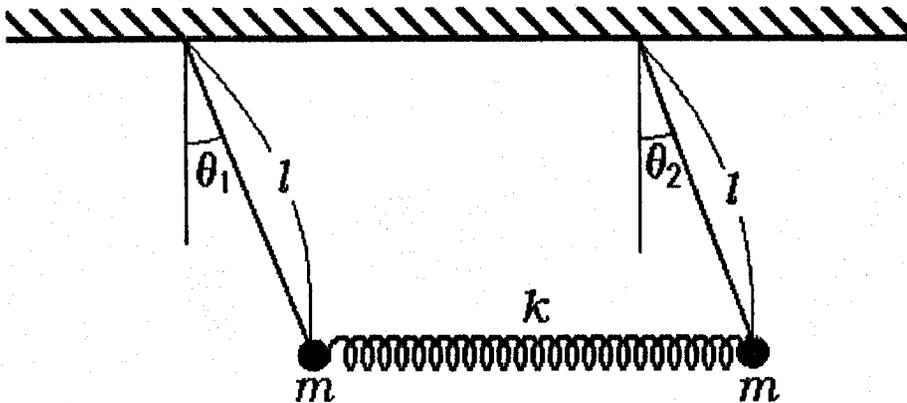
注意

1. すべての解答用紙に受験番号を書くこと。
2. 問題ごとに別々の解答用紙を用いること。
3. 解答用紙が足りない場合は監督官に要求してよい。

I

図のように、質量 m の 2 つの質点が長さ l の糸でつるされ、ばね定数 k のばねで結ばれて、常に同一平面内で運動している。ばねの自然長は 2 本の糸の支点間距離と同じである。また、ばねの質量は無視でき、自然長が糸に比べて十分長いため、ばねの向きは常に水平であると近似してよい。重力加速度を g とし以下各問いに答えよ。

(100点)



問1 2本の糸の鉛直方向からの角度 θ_1 と θ_2 を変数とするニュートンの運動方程式を書け。

問2 θ_1 と θ_2 を変数とするラグランジアン L を書け。

問3 Lagrange の運動方程式を書け。

問4 いま θ_1 と θ_2 がいずれも小さくて $\sin \theta = \theta$ 、 $\cos \theta = 1 - \theta^2/2$ の近似が許されるものとする。問1または問3の運動方程式を変形し、 θ_1 と θ_2 の2次以上の項は省略して、 $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ 、 $\beta = \theta_1 - \theta_2$ という2つの変数に対する方程式を導き、それらを解け。

問5 α と β は時間に対してどんな変化をするかを述べよ。

問6 θ_1 が時間に対してどう変化するか概略を表すグラフを書け。

Ⅱ 図のように、抵抗 R と 2 個のコンデンサー C_1 、 C_2 がスイッチ S と共に接続された回路がある。 C_1 と C_2 は電源によって、電圧 V_1 と V_2 にそれぞれ充電されている。スイッチ S を閉じると、電流 I が図に示されているように R を C_1 から C_2 方向へ流れた。 (100 点)

問 1 スイッチを閉じる前に、 C_1 と C_2 に蓄えられているエネルギーの和を求めよ。

問 2 スイッチを閉じて十分時間が経ったときの C_1 と C_2 の電圧をそれぞれ求めよ。

問 3 スイッチを閉じてから時刻 t までに R を通過する電荷の総量を q とするとき、 C_1 の電圧の減少量はいくらか。また、 C_2 の電圧の増加量はいくらか。

問 4 q に対する微分方程式を示せ。

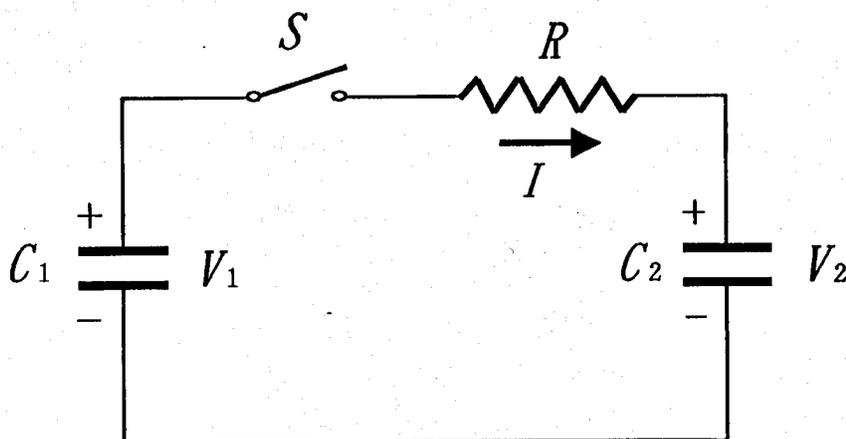
問 5 問 4 の微分方程式を解いて、 R を流れる電流 I が

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} e^{-\frac{1}{R}(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})t}$$

となることを示せ。

問 6 R で消費されるエネルギーを求めよ。

問 7 問 6 で求めたエネルギーがスイッチを閉じる前とスイッチを閉じて十分時間が経ったときのコンデンサーに蓄えられるエネルギーの減少量に等しいことを示せ。



III

次の各問に答えよ。

(100点)

問1 ミクロな粒子は粒子である性質を示すと共に波動である性質を示す。この量子状態を表す「波動関数」の構成を考察する。

まず、波動性を表すためには「平面波」の波動の方程式を用いる。

(1) 平面波の波動関数(波そのものの式)を、波動を表す物理量である波数 k と角振動数 ω を用いて、指数関数により表示せよ。

この式の表現では、波動を表す物理量をそのまま用いてあり、「粒子性」は盛り込まれていない。粒子性を表すためには、粒子性を表す物理量である運動量 p とエネルギー E を用いる必要がある。

そこで、アインシュタイン・ドブロイの関係式を用いて、粒子性を表す物理量で位相成分を表現することにより、量子状態を表す「波動関数」ができあがる。

(2) アインシュタイン・ドブロイの関係式を示せ。

(3) 量子状態を表す波動関数を表示せよ。

この波動関数から物理量を導き出す方法として、微分演算子を用いる。

(4) 運動量 p を導き出す微分演算子を記せ。

(5) エネルギー E を導き出す微分演算子を記せ。

(6) シュレーディンガー方程式を記せ。

ミクロな粒子のポテンシャルが位置座標だけの関数であり、エネルギー保存則が成り立つ場合、右辺と左辺はそれぞれ時間あるいは空間のみの演算子による微分方程式となるので、時間演算子のみの波動方程式と空間演算子のみの波動方程式(時間を含まないシュレーディンガー方程式)に分離できる。

(7) シュレーディンガー方程式が時間と空間の波動方程式に分離できる数学的根拠をのべよ。

問2 一次元で自由に動くことができるミクロな粒子が間隔 L の固い壁 ($x=0, L$) により閉じこめられている。

(1) このようなモデルで表現される粒子は現実にはどのようなもので実現できるか、その一例を示し、壁の物理的内容等が分かるように説明せよ。

IV

以下の各問いに答えよ。ただし、以下では、熱力学的な諸量を下記の記号

で表すものとする。

(100点)

U : 内部エネルギー S : エントロピー T : 温度
 V : 体積 p : 圧力 C_V : 定積熱容量
 Q : 熱量 W : 仕事

問1 熱力学に関する以下の問いに答えよ。

- (1) 温度と熱の概念を明確にすることは熱力学を確立する上で重要であった。熱と温度の概念について簡潔に説明せよ。
- (2) 系に外部から加えられた熱量を δQ , 外部からなされた仕事を δW とすると、熱力学の第1法則を式で表せ。また、第1法則の意味することを簡潔に説明せよ。
- (3) 定積熱容量の定義から、定積熱容量と内部エネルギーを関係づける式を導け。
- (4) 熱力学の第2法則を数式で書け。また、その意味することについて断熱過程の場合に限って簡潔に説明せよ。

問2 質量 m の単原子分子 N 個からなる古典理想気体をカノニカル分布で取り扱う。

(1) 分配関数 Z は

$$Z(T, V, N) = \frac{V^N}{h^{3N} N!} (2\pi m k_B T)^{3N/2}$$

で与えられる。ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。

- (2) 状態方程式を求めよ。
- (3) エントロピーを求めよ。また、エントロピーの温度依存性の概略をグラフに表せ。
- (4) 気体を古典力学に基づく統計力学で取り扱っていると、ある温度以下で破綻する。その温度を求めよ。また、その温度は、原子の状態がどのようなことを反映しているのか、直観的に説明せよ。
- (5) 分配関数 Z が(1)の式で与えられることを分配関数の定義から導け。

必要なら、公式

$$\log N! \approx N \log N - N = N \log \frac{N}{e}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$$

を使ってよい。

この系を数学的にモデルを立てて考察する。自由に動ける領域での粒子のポテンシャルを $V(x)=0$ として、

(2)「固い壁」があることの数学的表現を記せ。

粒子の波動関数の空間部分を $\Phi(x)$ として、

(3)この壁の間に1個の粒子が居ることの数学的条件を記せ。

次に、

(4) $x < 0$ および $x > L$ では粒子が存在できないことを条件付けよ。

(5)この系に対するシュレーディンガー方程式を記せ。

問3

(1)この粒子がこの区間で安定して存在するためにはどのような条件を満たさなければならないか説明せよ。

(2)問2で考察した条件からシュレーディンガー方程式を解き、波動関数 $\Phi(x)$ 、粒子のエネルギー E を求めよ。ただし、解く手順が明快に分かるように途中の計算経緯も示すこと。

(3)量子状態を表す量子数にはどのような制限があるか述べよ。

(4)最初の3個の量子状態について、粒子のエネルギー E と、波動関数 $\Phi(x)$ および粒子の空間的存在確率 $\xi(x)$ を図示せよ。

2001年2月13日(火)

平成13年度琉球大学大学院入学試験

理工学研究科博士前期課程

物質地球科学専攻(物理系)

英語問題

注意

1. すべての解答用紙に受験番号を書くこと。
2. 解答用紙が足りない場合は監督官に要求してよい。

問1. 第1パラグラフの大意を書き, 第2パラグラフを和訳せよ。
(40点)

Modern low-temperature physics began with the liquefaction of helium by Kamerlingh Onnes (1908) and the discovery of superconductivity (Kamerlingh Onnes, 1911) at the University of Leiden in the early part of the 20th century. There were really two surprises that came out of this early work. One was that essentially all of the electrical resistance of metals like mercury, lead, and tin abruptly vanished at definite transition temperatures. This was the first evidence for superconductivity. The other surprise was that, in contrast to other known liquids, liquid helium never solidified under its own vapor pressure. Helium is an inert gas, so that the interactions between the helium atoms are very weak; thus the liquid phase itself is very weakly bound and the normal boiling point (4.2 K) is very low. The small atomic masses and the weak interaction lead to large-amplitude quantum mechanical zero-point vibrations which do not permit the liquid to freeze into the crystalline state. Only if a pressure of at least 25 atmospheres is applied will liquid ^4He solidify (Simon, 1934). It is thus possible, in principle, to study liquid ^4He all the way down to the neighborhood of absolute zero.

Quantum mechanics is of great importance in determining the macroscopic properties of liquid ^4He . Indeed, liquid helium belongs to a class of fluids known as quantum fluids, as distinct from classical fluids. In a quantum fluid the thermal de Broglie wavelength $\lambda_T = h(2\pi mkT)^{-1/2}$ is comparable to, or greater than, the mean interparticle distance. There is then a strong overlap between the wave functions of adjacent atoms, so quantum statistics will have important consequences. ^4He atoms contain even numbers of elementary particles and thus obey Bose-Einstein statistics, which means that any number of atoms can aggregate in a single quantum state in the non-interacting particle approximation. In fact macroscopic numbers of atoms in a quantum fluid can fall into the lowest-energy state even at finite temperatures. This phenomenon is called Bose-Einstein condensation. On the other hand, ^3He atoms, each of which contains an odd number of elementary particles, must obey Fermi-Dirac statistics: only one atom can occupy a given quantum state. Therefore one should expect a very large difference between the behavior of liquid ^4He and that of liquid ^3He for low temperatures where the thermal de Broglie wavelength becomes greater than the mean interparticle distance.

(from *Rev. Mod. Phys.*, 1997)

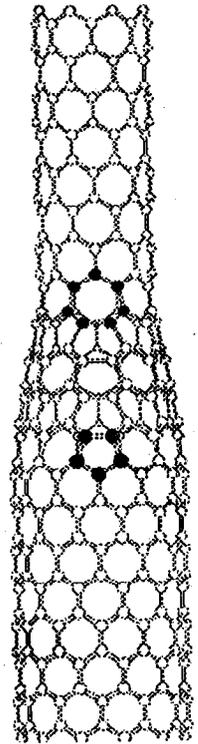
問2. 次の文を和訳せよ。(20点)

カーボン ナノチューブ*
Carbon nanotubes have extraordinary physical properties [1] leading to many potential applications [2]. They possess extremely stiff structures of a diamond strength [3], given by the graphene layers, rolled in various directions and diameters. In metallic or semiconducting nanotubes [4-6] electric current can be generated by an applied dc bias [7] or optically [8].

Recent studies show that the *skeletal construction* of nanotubes, highly accessible to external agents, could be efficiently used to vary their electronic structure in unconventional ways. In an excellent example [9], applied dc bias to a nanotube, immersed in a NaCl solution, attracts ions to its walls, depolarizes them, and thus changes the nanotube length. Carbon nanotubes immersed in polymers or liquids also have shifted spectra of their internal vibrations [10]. Therefore, one might ask if nanotubes could be sensitive and efficient *converters of signals* from the surrounding liquid or gaseous media. Such nanoscale detectors are largely demanding in microchemical and biological methods [11], where local dynamical effects are intensively studied. (from Phys. Rev. Lett. '97)

* Carbon nanotubes : 炭素原子のみで構成された分子超

Figure 1.
Carbon Nanotube.



問3. 将来、大学院でどのような主題を、どのような方法で研究したいか、和文(50字以上)で述べ、それを英文で表現せよ。(40点)