

2001年9月4日

平成14年度琉球大学大学院入学試験  
理工学研究科博士前期課程  
物質地球科学専攻  
専門科目問題(物理系)

注意

1. 問題はI, II, III, IVの4題ある.
2. 全ての解答用紙に受験番号を記入すること.
3. 問題毎に別々の解答用紙を用いること.
4. 解答用紙が足りない場合は監督官に申し出ること.

I 以下の各問いに答えよ.

(100点)

問1 金属中には殆ど自由に動き回る伝導電子が存在する. 単位体積あたり  $n$  個の伝導電子があるとして, 流動速度  $v_d$  を

$$v_d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$$

( $v_i$  は  $i$  番目の電子の速度) で定義する. 今この金属を電場  $E$  の中に置く. 伝導電子に速度に比例する抵抗力が働くとして, 伝導電子に対する運動方程式は

$$m \frac{dv_d}{dt} = eE - m \frac{v_d}{\tau}$$

となる. ここで,  $m$  は伝導電子の質量,  $e$  は電荷,  $\tau$  は緩和時間と呼ばれる時間の次元をもつ定数である.

- (1) 時刻  $t = 0$  で  $v_d = v_d(0)$  であったとしてこの方程式を解き, 任意の時刻  $t$  における  $v_d(t)$  を求めよ.
- (2) 時刻  $t \gg \tau$  における  $v_d$  を求めよ.
- (3) 時刻  $t \gg \tau$  に対して, Ohm の法則  $j = \sigma E$  が成り立つことを示し, 電気伝導度  $\sigma$  を求めよ. ここで電流密度  $j$  は単位面積あたりを流れる電流である.

問2 定常的な磁束密度  $B$  の中で運動する荷電粒子 (電荷  $e$ , 質量  $m$ ) がある. vector potential を  $A(x, y, z)$  とすれば  $B = \text{rot} A$  である. この場合, 荷電粒子の Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + e(v \cdot A)$$

で記述される. ただし,  $v$  は荷電粒子の速度である.

- (1) 一般化運動量  $p_x, p_y, p_z$  を求めよ.
- (2) この Lagrangian から出発して運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = e(v \times B)$$

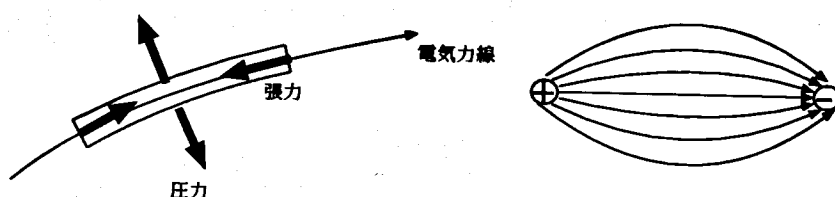
を導け.

- (3) Hamiltonian  $H$  が  $H = \frac{1}{2m} (p - eA)^2$  であることを示せ.

II 以下の各問いに答えよ。

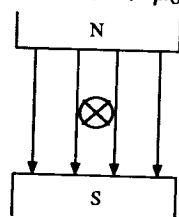
(100 点)

- 問 1 電場は電気力線を使って図に表すことができるが、この電気力線と平行な方向には引っ張りあう力が働き、隣り合う電気力線の間には押し合う力が働くと考え、静電気力を説明できるとファラデーは考えた。以下の問いは全て真空中での現象だとして考える。この引力と斥力はそれぞれ単位面積あたり  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$  だけ働く ( $E$  は電場の強さ、 $\epsilon_0$  は真空の誘電率)。



たとえば正電荷と負電荷が一つずつある場合の電気力線の様子は上の右の図のようなものであるが、正電荷から負電荷へと走る電気力線をあたかも伸ばされたゴム紐のように考えて、これに働いている張力の合力が二つの電荷間に働くクーロン引力であると考えることができる。

- (1) 正電荷が二つある場合について電気力線の様子を図に書き、電気力線の間働く力の合力が二つの電荷間に働くクーロン斥力であると解釈できることを図を使って説明せよ。
- (2) 磁力線に関しても前問と同様の力が単位面積あたり  $\frac{1}{2}\mu_0 H^2$  ( $H$  は磁場の強さ、 $\mu_0$  は真空の透磁率) だけ働く。



図のように磁石によって作られた磁場内に磁場と垂直な方向 (紙面の表から裏) へ電流を流す (図に書かれた磁力線は電流を流す前のものである)。電流を流した後の磁力線の様子を図に書き、電流に対してどのような方向に力が働くのかを図を使って説明せよ。

- (3) 同じ方向に流れる平行電流と逆方向に流れる平行電流の場合について磁力線の様子を図に書き、同方向では引力が、逆方向では斥力が働くことを図を使って説明せよ。



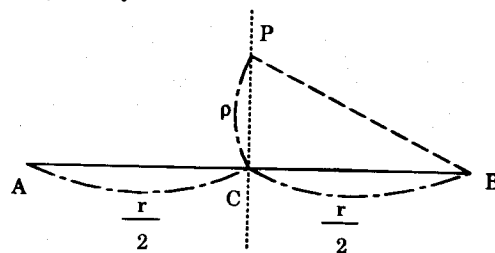
同方向の平行電流



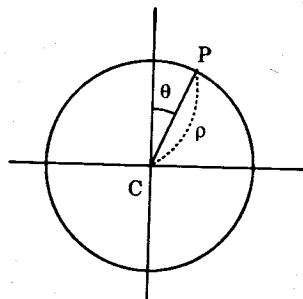
逆方向の平行電流

問2 前問で考察したことを実際に計算して確かめる。電気量  $q(q > 0)$  を持つ電荷が点 A に、電気量  $-q$  を持つ電荷が点 B に静止している。二つの点電荷の距離は  $r$  である。以下の設問では、線分 AB に垂直で二つの点電荷の中点 C を含む平面上で、中点から  $\rho$  離れた点 P における電場を考える。

- (1) 点 A にある電荷が点 P に作る電場の大きさを求めよ。
- (2) 上で求めた電場の、平面に平行な成分と平面に垂直な成分をそれぞれ求めよ。



- (3) 点 A にある電荷の作る電場と点 B にある電荷の作る電場の合成電場の、点 P における向きと強さを求めよ。
- (4) 点 P における合成電場による単位面積あたりの張力の強さを求めよ。
- (5) 前問の答に微少面積要素  $\rho d\rho d\theta$  をかけ、線分 AB に垂直で二つの点電荷の中点 C を含む平面上全体 (図の  $0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi$ ) で積分し、答がクーロン力  $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  になることを示せ。



III 以下の各問いに答えよ。

(100 点)

問 1 (1) Hermite 演算子  $A$  とは任意の関数  $\varphi(x), \psi(x)$  に対し

$$\int \varphi^*(A\psi)dx = \int (A\varphi)^*\psi dx$$

が成立するような演算子である。 $A$  の期待値  $\int \psi^* A\psi dx$  は実数であることを示せ。

(2) 一般に物理量に対応する演算子は Hermite 演算子であると仮定されている。なぜか？

(3) 演算子  $\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  は Hermite であるか否かを吟味せよ。

問 2 無限大のポテンシャルの壁によって幅  $\ell (0 < x < \ell)$  の中に閉じ込められて一次元運動している質量  $m$  の粒子がある。

(1) 粒子の運動を表す波動関数  $\psi(x)$  の物理的意味を書け。

(2)  $\psi(x)$  の満足する Schrödinger 方程式を書け。

(3) Schrödinger 方程式を解き、一般解を求めよ。

(4) 境界条件により、固有関数と固有値を求めよ。

(5) 最少のエネルギー固有値が 0 にならないのは何故か。

## IV

以下の各問いに答えよ。

(100 点)

問 1 1 モルの理想気体について、状態 1( $p_0, V_0$ )、状態 2( $2p_0, V_0$ )、状態 3( $p_0, 2V_0$ ) のような 3 状態を通る準静的変化を考える。ただし、状態は (圧力、体積) で示した。

- (1) 状態 2 から状態 3 は等温変化、状態 3 から状態 1 は等圧変化、状態 1 から状態 2 は等積変化とする。横軸に体積  $V$ 、縦軸に圧力  $p$  を取って、このサイクルの概略図を  $(V, p)$  面に書け。
- (2) 状態 2 の温度  $T$  は状態 1 の温度  $T_0$  の何倍か。
- (3) 状態 3 から状態 1 への変化で系が外部からされる仕事量を求めよ。
- (4) 熱エネルギーを加えることによって、状態 1 を状態 2 へ変化させる場合と、状態 1 を状態 3 へ変化させる場合では、どちらの変化がより多くの熱エネルギーを必要とするか？ 理由を書いて答えよ。

問 2 温度  $T$  の外界に置かれた閉じた系の熱平衡状態において、エネルギー  $E_j$  の "微視的状态"  $j$  が出現する確率  $P_j$  は次式で与えられる。ただし、 $k_B$  はボルツマン定数である。

$$P_j = \frac{1}{Z(\beta, V)} e^{-\beta E_j}, \quad \left( \beta = \frac{1}{k_B T} \right)$$

この結果から、次の二つの式が成り立つことを示せ。ただし、 $E$  は考察系の内部エネルギーである。

$$Z(\beta, V) = \sum_j e^{-\beta E_j}, \quad E = -\frac{\partial \log Z(\beta, V)}{\partial \beta}$$

問 3 固体の熱容量を計算しよう。この固体中の  $N$  個の原子は互いに独立に運動している 3 次元調和振動子とする (Einstein モデル)。系の温度  $T$ 、原子の質量  $m$ 、角振動数  $\omega$ 、プランク定数  $h$  とする。分配関数  $Z(T)$  を古典力学的に計算して次式を得た。

$$Z(T) = \left( \frac{2\pi k_B T}{h\omega} \right)^{3N}$$

ヘルムホルツの自由エネルギー  $F$  は  $F = -k_B T \log Z(T)$  である。

- (1) エントロピー  $S$  を求めよ。
- (2) 定積熱容量  $C_V$  を求めよ。
- (3)  $N$  個の原子はすべて同種である。上記分配関数は  $N!$  で割られていないが何故か？ その理由と考えられることを書け。
- (4) 上記分配関数  $Z(T)$  をハミルトニアンから古典的に求めよ。

2001年9月4日(火)

平成14年度琉球大学大学院入学試験

理工学研究科博士前期課程

物質地球科学専攻(物理系)

英語問題

注意

1. すべての解答用紙に受験番号を書くこと。
2. 解答用紙が足りない場合は監督官に要求してよい。

[1] Translate into Japanese.

(40点)

The scientific study of magnets began with William Gilbert, the court physician to Queen Elizabeth I. It was Gilbert who discovered that the earth itself was a giant magnet. He mounted a magnetized needle so that it could pivot freely in a vertical direction (a 'dip needle'), and its north pole then dipped towards the ground ('magnetic dip'). Using a spherical lodestone as a model of the earth, he found that the needle behaved in the same way when it was placed over the 'northern hemisphere' of this sphere. Gilbert published these findings in 1600 in a classic book entitled *De Magnete*.

In the three and a half centuries that have elapsed since Gilbert's work, no one has ever explained the earth's magnetism to everyone's satisfaction. For a long time scientists speculated that the earth might have a gigantic iron magnet as its core. Although the earth was indeed found to have an iron core, it is now certain that this core cannot be a magnet because iron, when heated, loses its strong magnetic properties ('ferromagnetism', the prefix coming from the Latin word for iron) at  $760^{\circ}\text{C}$ , and the temperature of the earth's core must be at least  $1,000^{\circ}\text{C}$ .

The temperature at which a substance loses its magnetism is called the 'Curie temperature', since it was first discovered by Pierre Curie in 1895. Cobalt and nickel, which resemble iron closely in many respects, are also ferromagnetic. The Curie temperature for nickel is  $356^{\circ}\text{C}$ ; for cobalt it is  $1,075^{\circ}\text{C}$ . At low temperatures, certain other metals are ferromagnetic. Below  $-188^{\circ}\text{C}$ , dysprosium is ferromagnetic, for instance.

In general, magnetism is a property of the atom itself, but in most materials the tiny atomic magnets are oriented in random directions, so that most of the effect is cancelled out. Even so, weak magnetic properties are often evidenced, and the result is 'paramagnetism'. The strength of magnetism is expressed in terms of 'permeability'. The permeability of a vacuum is 1.00 and that of paramagnetic substances is between 1.00 and 1.01.

(ferromagnetism; 強磁性、 paramagnetism; 常磁性、 permeability; 透磁率)

[2] 次の文を読んで下記の問いに答えよ。

(30点)

#### LIFE ON MARS ?

A team of NASA scientists peers into an ancient rock from Mars -- and shocks the world by announcing that the stone may hold signs of early life on



another planet

Hurtling in from space some 16 million years ago, a giant asteroid slammed into the dusty surface of Mars and exploded with more power than a million hydrogen bombs, gouging a deep crater in the planet's crust and lofting huge quantities of rock and soil into the thin Martian atmosphere. While most of the debris fell back to the surface, some of the rocks, fired upward by the blast at high velocities, escaped the weak tug of Martian gravity and entered into orbits of their own around the sun. After drifting through interplanetary space for millions of years, one of these Martian rocks ventured close to Earth 13,000 years ago -- when Stone Age humans were beginning to develop agriculture -- and plunged into the atmosphere, blazing a meteoric path across the sky. It crashed into a sheet of blue ice in Antarctica and lay undisturbed until scientists discovered it in 1984 in a field of jagged ice.

In August that Martian rock -- now dubbed ALH84001 -- seized the imagination of all mankind. A team of NASA and university researchers revealed that this well-traveled, 4.2-lb. stone -- about the size of a large Idaho potato -- had brought with it the first tangible evidence that mankind is not alone in the universe. Tucked deep within the rock are what appears to be the chemical and fossil remains of microscopic organisms that lived on Mars 3.6 billion years ago.

The news inspired awe, disbelief, excitement -- and, from not a few experts, skeptically raised eyebrows. NASA Administrator Daniel Goldin cautioned, "We must investigate, evaluate and validate this discovery. It is certain to create controversy."

Members of the NASA-led team were prepared to enter the fray. They displayed some remarkable scanning electron microscope images of the tiny structures found inside the meteorite. The most striking image clearly showed a segmented tubelike object, with a width about a hundredth that of a human hair, and to the untrained eye clearly resembling a life form. Among other images, one image revealed carbonate globules -- circular features closely associated with fossils of ancient bacteria on Earth. Another showed what seemed to be colonies of sluglike creatures. In addition to the images, the scientists cited complex chemicals found close by or inside the carbonate globules. These included organic molecules -- PAHS -- that on Earth are often produced by living organisms.

The researchers have little doubt that the meteorite is Martian in origin. They base their conclusion largely on the composition of gases trapped in tiny pockets within the meteorite. The NASA team found a

strikingly close match between the constituents of the rock gases and those in the current Martian atmosphere. NASA'S McKay conceded that "there are alternative explanations for each of the lines of evidence. "But after some 2 years of study, the team became convinced that the evidence pointed to the existence of early life on Mars.

Still, paleobiologist William Schopf of UCLA, best known for discovering the world's oldest fossils, spoke for many who would urge caution. Invited by NASA to represent the natural (and healthy) skepticism of the scientific community, he noted that PAHS are routinely found in outer-space debris as well as other meteorites, and not once "have they ever been interpreted as being biological."

Turning to the putative fossils in the electron-microscope images, Schopf pointed out that they are a hundred times smaller than any found on Earth, too tiny to be analyzed chemically or probed internally. Also, he noted, "there was no evidence of a cavity within them, a cell. " Nor was there any evidence of life cycles or cell division. This led him to believe that tubelike forms were probably made of a "mineralic material" like dried mud. NASA researchers went back to gather ammunition to answer their critics. But only months later, in October, British scientists reported finding similar signs of life on a different, younger Martian rock.

While scientists argued the microscopic evidence, most observers grappled with larger concerns. The discovery of evidence that life may exist elsewhere in the universe raised that most profound of all human questions: Why does life exist at all? Is it simply a kind of cosmic accident? Or did an all-powerful God set life in motion? The rock from Mars did not answer such questions. It did, however, make them feel all the more compelling.

- (1) 問題の岩石は現在までにどのような履歴をたどったと考えられるのか。
- (2) NASAの科学者達が火星上に生命の存在を推測した根拠は何か。
- (3) NASAの科学者達が問題の岩石が火星起源のものであると推測する根拠は何か。
- (4) William Schopf の反論の概要を述べよ。

[3]次の文を英文で表せ。

(30点)

科学の場合も人生と同様、一連のできごとの中に小さな変化を大きく拡大するような危機的な点のあることは、よく知られている。カオス(混沌)はこのような危機をはらむ点がその辺にいくらかでもあるということを意味するのである。