

2002年2月12日(火)

平成14年度(2002年度)琉球大学大学院入学試験

理工学研究科博士前期課程

物質地球科学専攻

専門科目問題(物理系)

注意

- [1] 問題はI, II, III, IVの4題ある。
- [2] すべての解答用紙に受験番号を記入すること。
- [3] 問題毎に別々の解答用紙を用いること。
- [4] 解答用紙が足りない場合は監督官に申し出ること。

I

以下の各問に答えよ。

(100 点)

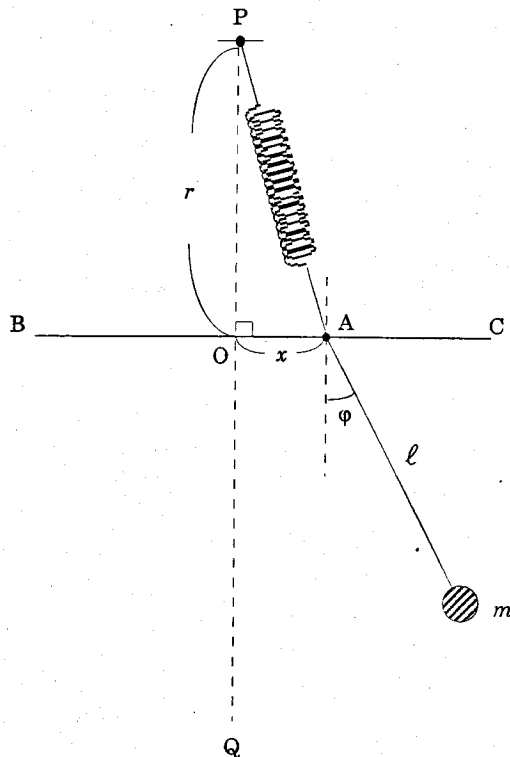
下図のように、P で一端を固定されたバネの他の端 A に質量 m の質点をつけた長さ ℓ の伸び縮みしないひもが固定してある。バネの端 A は、水平方向の直線 BC 上をなめらかに動くようにしてある。質点 m は、直線 BC を含む同一鉛直面内を振動しているとする。バネの端 A が直線 BC と PQ の交点 O にきたとき、バネの長さは r である。長さ r のときバネは力 f で引っ張られている。O からの A までの距離を x 、鉛直方向とひものなす角を φ 、重力加速度を g とする。また、バネおよびひもの重さは無視できるものとする。

問1 O を原点に水平方向に X 軸、鉛直下方に Y 軸をとる。質点 m の位置 (x_1, y_1) は、 $x_1 = x + \ell \sin \varphi$, $y_1 = \ell \cos \varphi$ で表される。運動エネルギー T を x および φ を用いて表せ。

問2

- (1) バネの端 A が O の位置にあるときを、ばねのポテンシャルエネルギーの原点とする。ばねの長さが $r + \delta r$ になったときのばねのポテンシャルエネルギー U_s が、 δr の高次の項を無視して、 $U_s = f \delta r$ で表されることを示せ。
- (2) (1) のとき、ばねの伸び δr が $\delta r \approx \frac{x^2}{2r}$ であることを示せ。
- (3) この系の Lagrange 関数 L を求めよ。
- (4) Lagrange の運動方程式を求めよ。
- (5) 振り子が微小振動しているとし、 $\varphi = Ae^{i\omega t}$, $x = Be^{i\omega t}$ において ω を求めよ。

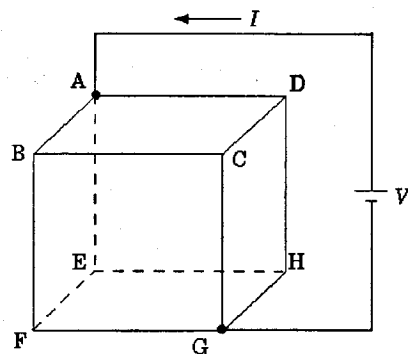
問3 この質点の運動と等価な単振り子はどのようなものか説明せよ。



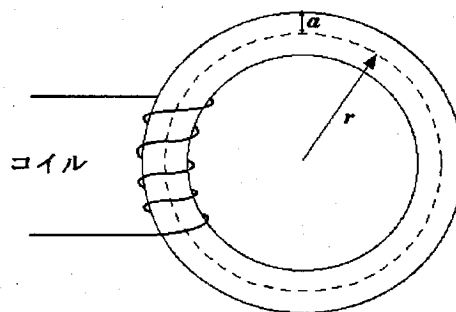
Ⅱ 以下の問いに答えよ。

(100 点)

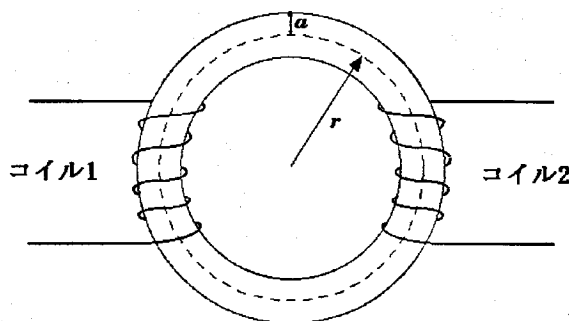
- 問1 電池のような電源や抵抗がいろいろ組み合わさった電気回路において、どこをどのように電流が流れるかを計算するときに便利なのがキルヒホッフの法則である。キルヒホッフの第1法則(電流則)と第2法則について説明せよ。
- 問2 一辺の抵抗が r の針金で立方体形の枠を作り、対角頂点 A と G 間に電圧 V を加えたとき、回路に流れる全電流 I および立方体形の合成抵抗 R を求めよ。ただし、電源の抵抗は無視する。



- 問3 半径 r のドーナツ状の磁性体(透磁率 μ)に、 N 巻きのコイルが巻かれている。コイルに電流 I を流すと、同心円状の磁束ができる。磁束密度 B を求めよ。なお、半径 r は、ドーナツの断面の半径 a よりも十分に大きく、ドーナツ内の磁束は一様で内部のみに生じ、外部への漏れがないものとする。



- 問4 問3のドーナツ状の磁性体にそれぞれ巻き数 N_1 、 N_2 のコイル1、2が巻かれている。コイル1、2の抵抗は無視できるとする。コイルに電流を流したとき、磁束は、磁性体内に生じ、外部への漏れがないものとする。コイル1に交流電圧 $v_1 = v_0 \cos \omega t$ の電源を接続したところ、電流 i_1 が流れた。コイル2に電流を流さないようにして電圧 v_2 を測定した。
- 1) コイル1に生じる誘導起電力 e_1 と v_1 の間にはどのような関係が成り立つか。また、その理由を記せ。
 - 2) v_2/v_1 の絶対値が N_2/N_1 の値に等しいことを証明せよ。



- 問5 透磁率 μ_1 、 μ_2 の異なる磁性体1、2が接している。磁場 H と磁束密度 B は、磁性体1から境界面の法線方向に対して角度 θ_1 で入射して、磁性体2では角度 θ_2 で出射する。それぞれの磁性体中の磁場の値を H_1 、 H_2 、磁束密度の値を B_1 、 B_2 とする。
- 1) 境界面での H_1 と H_2 の間に成り立つ関係と、 B_1 と B_2 の間になりたつ関係を求めよ。
 - 2) $\tan \theta_1 / \tan \theta_2$ を求めよ。

III

各問いに答えよ。

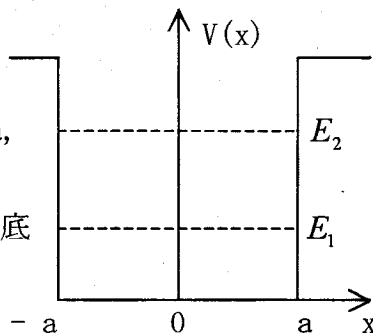
(100点)

問1 以下の物理用語の意味を簡潔に説明せよ。

- (1) 粒子の波動関数を $\phi(x)$ としたときの $|\phi(x)|^2$
- (2) 物質粒子の二重性
- (3) パウリの排他原理
- (4) 粒子の位置と運動量との不確定性関係

問2 図は、井戸型ポテンシャル ($V(x)=0$ $|x|<a$,

$V(x)=V_0$ $|x|>a$) 中に質量 m の粒子が閉じ込められているときのエネルギーレベル E_1 (基底状態) と E_2 (励起状態) を示している。



- (1) エネルギーレベル E_1 および E_2 における波動関数 ϕ_1 および ϕ_2 を $x = \pm a$ 付近での振る舞いに注意して、解答用紙に図示せよ。横軸に原点 0 と $\pm a$ を書き込むこと。
- (2) E_2 に励起されている粒子が基底状態に落ちるときの過程を、エネルギー保存に留意して説明せよ。

問3 陽電子 (質量 m 、電荷 $+e$) と電子 (質量 m 、電荷 $-e$) とが互いに束縛しながら運動している系を考える。陽電子の運動量演算子を $\hat{p}_1$ 、電子のそれを $\hat{p}_2$ とする。

- (1) この系のハミルトニアンを $\hat{p}_1$ 、 $\hat{p}_2$ を使って書け。

上記のハミルトニアンを、重心座標 $\vec{R}$ と相対座標 $\vec{r}$ (r, θ, φ) で書き表すと、

$$H_R = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 \quad (\text{i})$$

$$H_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \Lambda(\theta, \varphi) \right] + V(r) \quad (\text{ii})$$

の和となる。ここで、 $M=2m$ 、 $\mu=m/2$ 、 $\Lambda(\theta, \varphi)$ は θ, φ の微分演算子である。

- (2) ハミルトニアン (i) に対する Schrödinger 方程式を解き、そのエネルギー固有値と固有関数を求めよ。
- (3) ハミルトニアン (ii) について、その基底状態を変分関数 $\exp(-\alpha r)$ として、基底状態のエネルギー E を α の関数として求め、 E を最小にする α の値と E の最小値を求めよ。
- (4) 次に (3) で求めた基底状態の波動関数の規格化定数を求めよ。

必要ならば、つぎの公式を使ってよい。 $\int_0^\infty dx x^n e^{-x} = n!$

IV 状態変化が準静的におきているとして、以下の問いに答えよ。

(100 点)

(1) dU 、 dS 、 dV の間にはどのような関係があるか。温度 T 、圧力 P を用いよ。ここで、 U は内部エネルギー、 S はエントロピー、 V は体積である。

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー F を U 、 T 、 S で表せ。

(3) (1)、(2) の結果を用いて、以下の関係を示せ。

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

(4) 更に以下の関係を示せ。

$$U = -T^2 \left[\frac{\partial (F/T)}{\partial T} \right]_V$$

次に具体例として、体積 V の箱の中に入っている光 (光子気体) を考える。この箱は温度 T の熱源に接している。この系の分配関数 Z は $\log Z = \sigma (kT)^3 V$ で与えられる。ここで、 k はボルツマン定数である。 σ はある定数で、与えられているものとして、以下の問い答えよ。

(5) U を求めよ。

(6) P を求めよ。

(7) エネルギー密度 ε (単位体積あたりの内部エネルギー) と P の関係を求めよ。

(8) 定積比熱 C_V を求めよ。

2002年2月12日(火)

平成14年度(2002年度)琉球大学大学院入学試験

理工学研究科博士前期課程

物質地球科学専攻

英語問題(物理系)

注意

- [1] すべての解答用紙に受験番号を記入すること。
- [2] 解答用紙が足りない場合は監督官に申し出ること。

[1] 次の文章を日本語に訳せ。

(3 0 点)

In the winter of 1819-20 Hans Christian Oersted was lecturing on Electricity, Galvanism, and Magnetism to advanced students at the University of Copenhagen. *Electricity* meant electrostatics; *galvanism* referred to the effects produced by continuous currents from batteries, a subject opened up by Galvani's chance discovery and the subsequent experiments of Volta; *magnetism* dealt with the already ancient lore of lodestones, compass needles, and the terrestrial magnetic field.

It seemed clear to some that there must be a relation between galvanic currents and electric charge, although there was little more direct evidence than the fact that both could cause shocks. On the other hand, magnetism and electricity appeared to have nothing whatever to do with one another. Still, Oersted had a notion, vague perhaps, but tenaciously pursued, that magnetism like the galvanic current might be a sort of "hidden form" of electricity.

Groping for some manifestation of this, he tried before his class the experiment of passing a galvanic current through a wire which ran above and at right angles to a compass needle. It had no effect. After the lecture, something impelled him to try the experiment with a wire running parallel to the compass needle. The needle swung wide — and when the galvanic current was reversed it swung the other way!

ヒント：エルステッド，高学年生，電気学，ガルヴァーニ学，磁気学，ヴォルタ，天然磁石，羅針盤，ガルヴァーニ電流

(Berkeley Physics Course, Volume 2)

[2] 次の文章を日本語に訳せ。

(1 6 点)

It really is a nasty business. Recently we have not seen a day go by without receiving e-mail messages contaminated with computer viruses. As we are taking the usual preventative measures, our system has not become infected, but there are reportedly people who daily get more than 100 such messages.

We human beings take care of our bodies by, for example, submitting to health check-ups. Now is the time for us to take steps to avoid causing inconvenience and harm to others by investing in the latest inspection and virus protection software available for our computers.

ヒント：コンピューターウィルス，電子メール，感染，健康診断を受ける，閲覧ソフトやワクチンソフト
(The Asahi Shinbun, Books & Language)

[3] 各文が良くなるように修正せよ。 (1 5 点)

- (a) This has been rejected also.
- (b) Who do you think is he?
- (c) Have you finished to write the report?
- (d) The liquid flowed through the pipe is cooling water.
- (e) No singular points can be noticed on both curves.

[4] 各文を数式で書け。 (1 5 点)

- (a) two over three
- (b) inner product of **a** and **b**
- (c) the cube root of twenty-seven
- (d) limit as n tends to infinity of a_n
- (e) k equals eighty-one times two-thirds to the eighth power

[5] 各文を英訳せよ。 (2 4 点)

- (a) 地球は太陽系に属する惑星の一つである。
- (b) 学生時代になまけると，卒業してから後悔するものです。
- (c) 現在日本が必要としているのは，一時的な経済的繁栄ではなく，真の平和である。

ヒント：planets, belong to, the solar system, neglect one's studies, one's student days, repent of, economic prosperity, not A but B