琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題

専門

２００３年度募集

２００２年9月3日実施

①すべての解答用紙に受験番号を記入のこと。

②問題ごとに別々の解答用紙を用いること。

③解答用紙は片面のみ使用、縦置き横書き。

④用紙が足りない場合は監督官に請求すること。

⑤問題冊子は持ち帰ること。

I

「物理学実験（先３３）」の授業で実験したボルダ(Borda)の振り子について、以下の問いに答えよ。下図のように、振り子の糸の長さを ℓ、球の半径を r、質量を M とし、振幅（振れの角 θ）は小さく、糸の質量は無視できるとして解を求めよ。

（１００点）

問１　球の半径が無視できる場合（この仮定は問１に限定する。）、

（１）運動方程式を立てよ。

（２）運動方程式（微分方程式）を解き、周期を求めよ。

問２　点Ｏの周りの慣性モーメント I を求めよ。ただし、球の中心の周りの慣性モーメントは　（２／５）Mr^2　である。

問３　振り子の復元力を力のモーメントで表せ。

問４　この系を剛体と見なして、

（１）運動方程式を立てよ。

（２）運動方程式（微分方程式）を解き、周期を求めよ。

問５　この系をLagrangeの方法で解け。

（１）一般化座標を定めよ。

（２）系の運動エネルギーを求めよ。

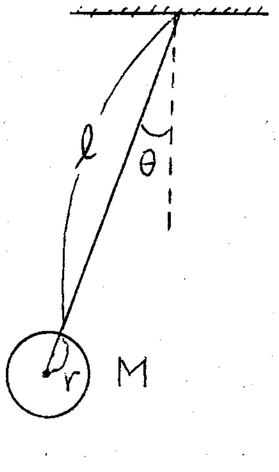
（３）系の位置エネルギーを求めよ。

（４）Lagrange関数を求めよ。

（５）Lagrangeの運動方程式の一般的表現を記せ。

（６）この系のLagrangeの運動方程式を求めよ。

（７）広義運動量の一般形を記し、この系の一般化座標に対する広義運動量を求めよ。また、この物理量は通常どのように呼ばれる物理量であるか。



II 以下の各問いに答えよ。 (100 点)

問1 図Iのように、内半径 a の円筒導体Aと外半径 b の円筒導体Bが同軸をなしている。その円筒のAB間に、内円筒から外円筒に向って半径方向に誘電率が ε_1 から ε_2 まで直線的に変化する誘電体が詰めてある。また、導体AとBの間には電池がつないである。導体の厚さは無視できるものとする。

(1) 円筒軸の中心から距離を r $(a < r < b)$ とするとき、r の点での誘電率は

$$\varepsilon = c_1 + c_2 r$$

と表される。定数 c_1 と c_2 を求めよ。

(2) 導体の軸方向に単位長さあたり λ の電荷が一様に分布しているものとして、以下の領域における半径 r の点での電場の大きさ E をガウスの法則を用いて求めよ。また、得られた電場はどの方向を向いているか。

(i) $r < a$

(ii) $a < r < b$

(iii) $b < r$

(3) 導体AとBの間の電位差 V が

$$V = \frac{\lambda}{2\pi c_1} \log \frac{\varepsilon_1 b}{\varepsilon_2 a}$$

であることを示せ。

(4) 軸方向の単位長さあたりの静電容量 C を求めよ。

(5) 導体AとBの間の電場の大きさ E を一定に保つためには誘電率を距離 r と共にどの様に変えればよいか。誘電率 ε を r の関数で示せ。

問2 次に、図IのAB間の誘電体を一定の誘電率 ε を持つものと取り替えた。その誘電体の電気伝導度は σ で、抵抗率は ρ である。ただし、電気伝導度と抵抗率には $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ の関係がある。

(1) 導体AとBの間の軸方向の単位長さあたりの電気抵抗 R を求めよ。

(2) 軸方向の単位長さあたりの電気容量 C を求めることにより、R を C、σ、ε で表せ。

問3 更に、図IIのようにAB間の誘電体と電池を取り除き、この同軸円筒状導体を無限に長くして、真空中に置いた。そして、電流 I を導体Aの軸方向の上向きに流し、外側の導体Bに下向きに流した。

(1) アンペールの法則を用いて、中心軸から半径 r $(a < r < b)$ の点での、磁場の大きさ H を求めよ。また、上部から見たときの磁場の向きを図示せよ。

(2) 半径 r が $r < a$、$b < r$ の領域では磁場の大きさはゼロである。しかし、導体AとBが軸方向に伸びた細い導線の集まりと考えると、その導線に電流が流れることになる。そうすると、その導線1本1本が $r < a$、$b < r$ の点でも磁場を作ることになる。なぜ、これらの領域で磁場の大きさがゼロになるのかを説明せよ。

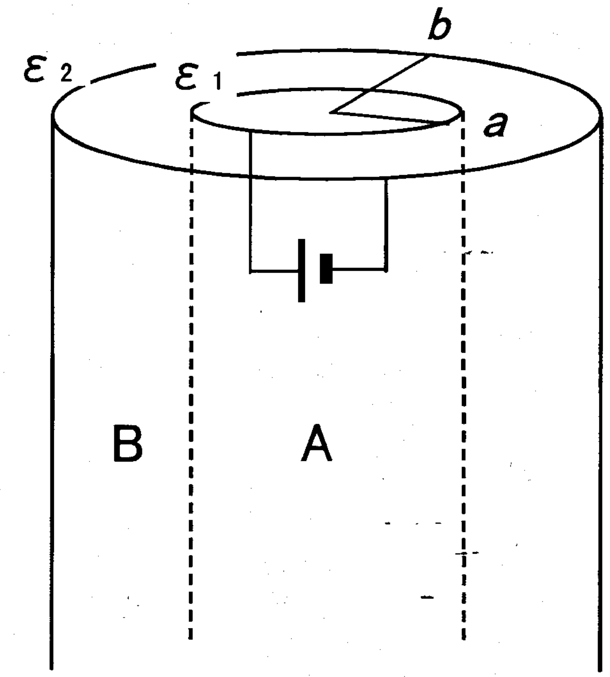


図 I

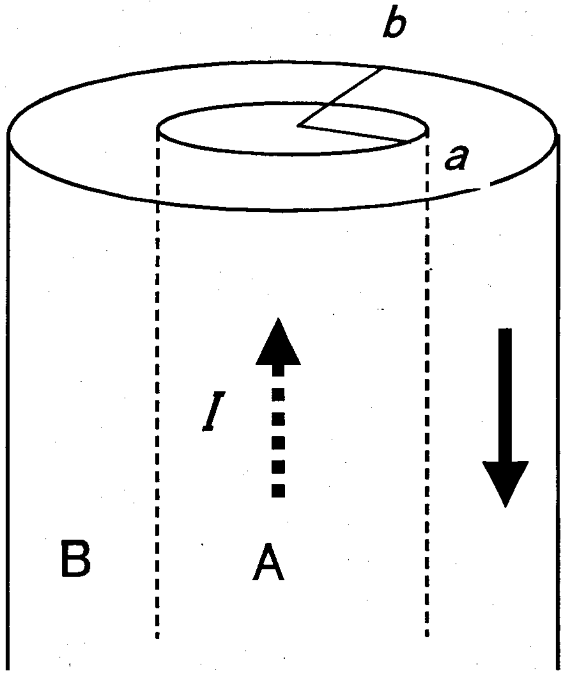


図 II

$\boxed{\text{III}}$ 下図のような一次元ポテンシャル中の質量 m の粒子の シュレーディンガー方程式 について各問いに答えよ.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x), \qquad V(x)=\begin{cases} +\infty & 0>x \\ -V_0 & a>x>0 \quad \text{領域 I} \\ 0 & x>a \quad \text{領域 II} \end{cases}$$

問1　領域 I でのシュレーディンガー方程式を書け.

また，束縛状態を表すエネルギーの範囲を E, V_0 の不等式で示せ.

問2　領域 I で束縛状態の波動関数 $\psi(x)$ は波数 k (波長 $\lambda=2\pi/k$) をもち, $x\to 0$ で $\psi(x)=0$ になる.　波動関数を k を用いて表せ.

問3　$E<0$ の場合 ($E=-|E|$), 領域 II でのシュレーディンガー方程式を書け.

$E<0$ の場合，領域 II の波動関数は減衰して $x\to\infty$ で $\psi(x)=0$ となる.

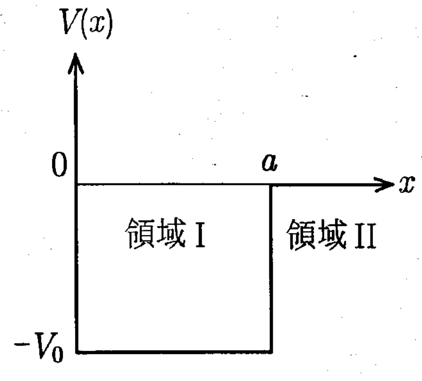
領域 II での波動関数を $\alpha=\left[2m|E|/\hbar^2\right]^{1/2}$ を用いて表せ.

問4　$x=a$ で領域 I と領域 II の波動関数が滑らかで連続になることから

式 $\alpha=-k\cot(ka)$ が成り立つことを示せ.

問5　領域 I の束縛状態のエネルギー E を波長 λ, ポテンシャル V_0 を用いて表せ.

問6　領域 I で束縛状態 $(0>E)$ が存在する条件は $V_0>\dfrac{2\pi^2\hbar^2}{m\lambda^2}$ であることを示せ.



IV　以下の各問いに答えよ。

（100 点）

問 1　圧力と体積によって与えられた 4 状態 A，B，C，D において、n モルの理想気体が過程 A→B→C→D→A なるサイクルを繰り返す準静的過程を考える。このカルノーサイクルに囲まれた面積は何を表すか。

問 2　不可逆過程を含むサイクルで作動する熱機関を考える。この熱機関が断熱過程において、エントロピー S の変化が常に $dS \geq 0$ となることを示せ。また、熱平衡状態に達したとき、この熱機関のエントロピー S はどうなるか説明せよ。

問 3　エネルギーの供給を全く受けることなしに外界へ仕事をするようなサイクルをなす機械を作ることは不可能である。なぜか。

問 4　ある気体の質量 m の分子が速さ v である分布 $f(v)$ を求めたところ

$$f(v) = \alpha\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{m}{2kT}v^2\right)$$

であった。ここで、α は比例定数，k はボルツマン定数，T は気体の温度を表す。このとき、マクスウェルの速度分布則に従うとする。

（1）速さ v の 2 乗平均値 $\langle v^2 \rangle$ を求めよ。ただし、積分公式：$\int_0^\infty x^2 \exp(-cx^2)dx = \frac{1}{4c}\sqrt{\frac{\pi}{c}}$ および $\int_0^\infty x^4 \exp(-cx^2)dx = \frac{3}{8c^2}\sqrt{\frac{\pi}{c}}$ を用いてよい。

（2）この気体の内部エネルギーはいくらか。

問 5　一辺が L の立方体の中に質量 m の自由粒子を閉じ込めた。この質点の微視的状態での全状態数を考える。ただし、h はプランク定数である。

（1）運動量 (p_x, p_y, p_z) の空間において、質点のエネルギー E は $E = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)$ で与えられる。このとき、運動量空間の体積 $V(E)$ を求めよ。

（2）エネルギーが E 以下の微視的状態の数 $W(E)$ は $W(E) = \left(\frac{L}{h}\right)^3 V(E)$ で与えられる。このとき、エネルギーが E と $E + dE$ の間の状態密度 $g(E)$ を求めよ。

琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題

英語

２００３年度募集

２００２年９月３日実施

①すべての解答用紙に受験番号を記入のこと。

②解答用紙は片面のみ使用、縦置き横書き。

③用紙が足りない場合は監督官に請求すること。

④問題冊子は持ち帰ること。

問1. 以下の英文を和訳せよ。解答用紙には、便宜的に付けた番号（①〜⑦）毎に解答せよ。（70点）

①At the heart of the quantum revolution is Heisenberg's uncertainty principle. This tells us, roughly speaking, that all physical quantities that can be observed are subject to unpredictable fluctuations, so that their values are not precisely defined. ②Consider, for example, the position x and the momentum p of a quantum particle such as an electron. The experimenter is free to measure either of these quantities to arbitrary precision, but they cannot possess precise values simultaneously. ③The spread, or uncertainty, in their values, denoted by Δx and Δp respectively, are such that the product of the two, $\Delta x \Delta p$, cannot be less than a certain constant number. ④Thus more accuracy in position must be traded for less in momentum, and vice versa. The constant that enters here (called Planck's constant after Max Planck) is numerically very small, so that quantum effects are generally only important in the atomic domain. We do not notice them in daily life.

⑤It is essential to appreciate that this uncertainty is inherent in nature and not merely the result of technological limitations in measurement. It is not that the experimenter is merely too clumsy to measure position and momentum simultaneously. ⑥The particle simply *does not possess* simultaneously precise values of these two attributes. ⑦One is used to uncertainty in many physical processes – for example, in the stock market or in thermodynamics – but in these cases the uncertainty is due to missing information rather than to any fundamental limitation in what may be known about these systems.

(Physics & Philosophy, W. Heisenberg 1958)

問2. 自分の卒業研究（又は、セミナー等の主題分野）を、英語の文章にして、150語（word）程度で、箇条書で表現せよ。
又は、大学院で研究を希望する目的、研究分野、方法等を（仮想的でもよい）上記と同様に表現せよ。（30点）