２００３年9月２日（火）

平成１６年度 琉球大学大学院入学試験

理工学研究科博士前期課程

物質地球科学専攻（物理系）

専門科目問題

注意

１．問題はⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの４題ある。

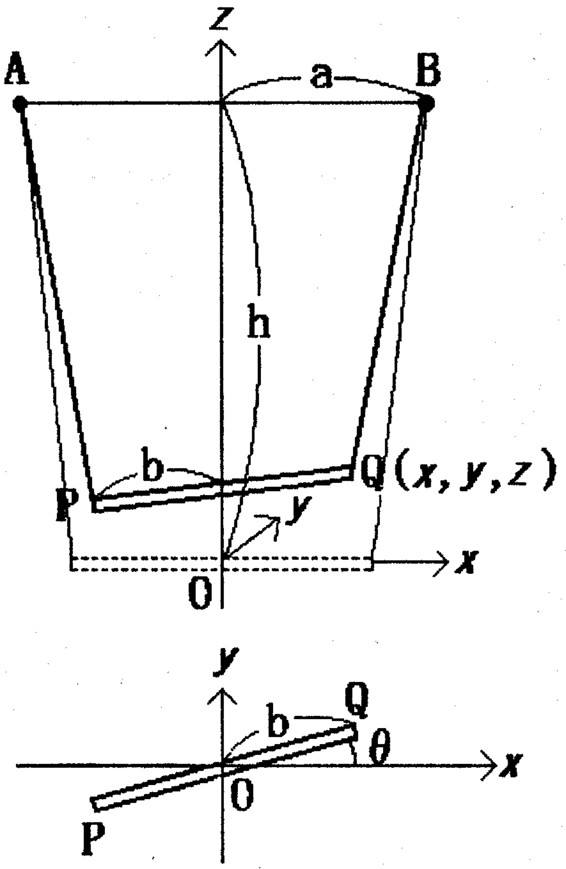
２．全ての解答用紙に受験番号を記入すること。

３．問題毎に別々の解答用紙を用いること。

４．解答用紙が足りない場合は監督官に申し出ること。

$\boxed{\mathrm{I}}$ 以下の問いに答えよ。 （１００点）

図のように、水平に$2a$だけ離れた２点A, Bから長さlの等しい２本の糸をつるし、質量M、長さ$2b$の棒ＰＱの両端に結ぶ。この棒に重心をとおる鉛直線のまわりに偶力を作用させたら角度θだけ回転して静止した。



問１　棒の重心をとおる鉛直線のまわりの慣性モーメントをIとするとき、

$I=\dfrac{Mb^2}{3}$ であることを計算によって示せ。

問２　棒はθの回転により、上下方向の位置がzだけ高くなった。図のようにＱ点の座標を（x, y, z）とするとき、θとzの間の関係を求めよ。$h=\sqrt{l^2-(a-b)^2}$　という長さを使ってよい。

問３　棒が角度θで静止しているとき、外部から加わっている偶力をNとする。棒が仮想的にさらに$\delta\theta$だけ回転したとすれば、偶力のする仕事は、棒の位置を重力に抗してδzだけ高くする仕事に使われたとみなせる。このとき、$\delta\theta$、δz、N、Mの間にどんな関係が成り立つか。重力加速度はgとする。

問４　偶力Nを問２と問３の結果からθの関数として求めよ。

問５　外部からの偶力Nを取り除いたところ、棒は糸の張力による偶力（$-N$）により、振動を始めた。この場合の回転の運動方程式をθ、I、Nで書きあらわせ。

問６　θが小さいとき、Nにおいて$\sin\theta \approx \theta$，$\cos\theta \approx 1$　と近似して、運動方程式を書き直し、棒の振動の周期を求めよ。

問７　この棒の運動に対するラグランジアンLを書け。ただし一般化座標として、θとzの２変数を使ってよい。

問８　ラグランジアンの　$\dot{z}^2$の項を無視し、zをθの近似式であらわして、ラグランジュ方程式をつくれば、問６での運動方程式と一致することを示せ。

II 以下の問いに答えよ。　　（１００点）

問１　電荷Q，質量mの荷電粒子が磁束密度$\mathbf{B}$の磁場によるLorentz力のみを受けて運動している。

（１）運動方程式を書け。

（２）荷電粒子は磁場とのエネルギー授受はできないことを運動方程式から示せ。

（３）エネルギー授受が行われない物理的理由を言葉で説明せよ。

問２　真空中におけるMaxwell方程式

$$div\mathbf{D}(\mathbf{x},t)=0$$
$$div\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=0$$
$$rot\mathbf{H}(\mathbf{x},t)=\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(\mathbf{x},t)$$
$$rot\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$$
$$(\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E},\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H})$$

について以下の問いに答えよ。

（１）簡単な平面波解　$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\mathbf{E}_0\cos(\mathbf{kx}-\omega t)$を仮定し、

（ア）$\mathbf{H}$を求めよ。

（イ）$\mathbf{E}$と$\mathbf{H}$が進行方向に垂直であることを示せ。

（ウ）$\mathbf{E}$と$\mathbf{H}$が直交していることを示せ。

（２）$\mathbf{E}$および$\mathbf{H}$に関する波動方程式を出せ。

（３）（１）のωと$\mathbf{k}$の関係式を求めよ。

（４）電磁波の速さ$\mathbf{V}$を求めよ。

（５）電磁波のエネルギー密度が　$U=\varepsilon_0\mathbf{E}_0^2\cos^2(\mathbf{kx}-\omega t)$　になることを示せ。

III 以下の各問に答えよ.

(100 点)

問 1

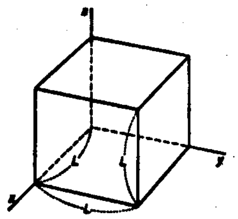
(1) $\mathrm{Tr}(S^{-1}AS) = \mathrm{Tr}\,A$ を証明せよ.

(2) A, B が Hermite 行列ならば $[i(AB-BA)]$ は Hermite 行列であることを示せ.

(3) U, V が unitary 行列ならば UV^{-1} は unitary 行列であることを示せ.

(4) 行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ について, (ア)行列 A の固有値及び固有ベクトルを求めよ. (イ)行列 A を対角化する変換行列 S を求めよ.

問 2 1辺の長さ L の立方体内にある自由電子を考える. この立方体の辺に沿って, 下図の様に x, y, z 軸をとる.



(1) 自由電子の波動関数を $\psi(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ として, $|\psi(\boldsymbol{r})|^2$ の意味を書け.

(2) 自由電子の Schrödinger 方程式は $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = \varepsilon\psi$ と書けることを説明せよ.

但し, $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, ε はエネルギー固有値である.

(3) Schrödinger 方程式の進行波解は $\psi_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r}) = Ae^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}$, ($\boldsymbol{q} = q_x\boldsymbol{i} + q_y\boldsymbol{j} + q_z\boldsymbol{k}$: 波数ベクトル, A : 任意定数)である. (ア)エネルギー固有値は $\varepsilon_{\boldsymbol{q}} = \dfrac{\hbar^2 q^2}{2m}$, ($q^2 = q_x{}^2 + q_y{}^2 + q_z{}^2$) と書けることを示せ. (イ)波動関数はエネルギーの固有関数であると同時に, 運動量の固有関数でもある. 運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar(\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z})$ の固有値を求めよ.

(4) 波動関数を規格化して $A = \dfrac{1}{\sqrt{V}}$, ($V = L^3$) を示せ.

(5) 周期的境界条件 : $\psi(x+L, y, z) = \psi(x, y, z)$, $\psi(x, y+L, z) = \psi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z+L) = \psi(x, y, z)$ を適用して, $q_x = \dfrac{2\pi l}{L}$, $q_y = \dfrac{2\pi m}{L}$, $q_z = \dfrac{2\pi n}{L}$ $(l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ が成立しなければならないことを示せ.

(6) 異なる固有値に属する波動関数は直交することを示せ.

IV　以下の各問いに答えよ。　(100 点)

問 1　n モルの理想気体が準静的断熱変化をして状態 $\mathrm{A}(p_1, V_1, T_1)$ から状態 $\mathrm{B}(p_2, V_2, T_2)$ へ、そして準静的等温変化をして状態 B から状態 $\mathrm{C}(p_3, V_3, T_2)$ へ変化した。

(1)　状態 A, B 間で系が得た、熱量 Q_{AB} とエントロピー S_{AB} はいくらか。

(2)　状態 B, C 間で系が得た、熱量 Q_{BC} とエントロピー S_{BC} はいくらか。

問 2　1 気圧のもとで 0 ℃の氷 5 グラムが同温度の水 5 グラムになった。1 気圧での氷の融解熱は 1 グラム当たり 80cal である。

(1)　このとき要した熱量は何 cal か。

(2)　このときのエントロピー変化は何 cal/K か。

(3)　このエントロピー変化はこの系の分子分布に関するどのような変化を表しているか説明せよ。

問 3　粒子（質量 m）の速度の x 成分を v_x とする。v_x に対する Maxwell の速度分布関数は下記の通りである。

$$f(v_x) = A\mathrm{e}^{-\alpha v_x^2}, \qquad \left(\alpha = \frac{m}{2k_{\mathrm{B}}T}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)$$

(1)　$f(v_x)\mathrm{d}v_x$ の物理的意味を述べよ。

(2)　A を求めよ。

(3)　v_x の平均値 $\langle v_x \rangle$、及び v_x^2 の平均値 $\langle v_x^2 \rangle$ を求めよ。

(4)　平均値の回りのゆらぎの大きさ Δv_x を求めよ。ただし、$\Delta v_x = \sqrt{\langle (v_x - \langle v_x \rangle)^2 \rangle}$

問 4　固体の熱容量を計算しよう。この固体中の N 個の原子は互いに独立に運動している 3 次元調和振動子とする（Einstein モデル）。系の温度を T、角振動数を ω とする。この系の分配関数 $Z(T)$ を量子論的に計算して次式を得た。ただし、$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$

$$Z(T) = (1 - \exp(-\beta\hbar\omega))^{-3N}$$

(1)　内部エネルギー E は次式で与えられることを示せ。

$$E = \frac{3N\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}$$

(2)　定積熱容量 C_V は次式で与えられることを示せ。

$$C_V = 3Nk_{\mathrm{B}}(\beta\hbar\omega)^2 \frac{\exp(\beta\hbar\omega)}{(\exp(\beta\hbar\omega) - 1)^2}$$

(3)　$T = 0$ 近傍での定積熱容量の振舞いについて議論せよ。

(4)　$\hbar \to 0$ において定積熱容量はどのように変化するか議論せよ。

(5)　上記の $Z(T)$ を求めよ。

２００３年9月2日(火)

平成１６年度 琉球大学大学院入学試験

理工学研究科博士前期課程

物質地球科学専攻（物理系）

英語問題

注意

1. 全ての解答用紙に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙が足りない場合は監督官に申し出ること。

問1　物理または数学の法則・定理など、あなたが覚えているものどれか一つについて、その内容を 100 語程度の英語で説明せよ。 (30 点)

問2　以下は "Asimov's Chronology of Science & Discovery" の "**Electric Generators**" の項目である。読んで、以下の問いに答えよ。 (40 点)

Since Ørsted[1] had shown that an electric current could produce a magnetic effect, it had seemed to Faraday that there ought to be some way of showing that the reverse was also true, that a magnet could induce an electric current.

To do this, Faraday made use of an iron ring. In 1831, he wound a coil of wire around one portion of the iron ring and attached it to a battery. The circuit could be opened or closed by a key. If he closed the circuit, current would flow, and a magnetic field would be set up and concentrated in the iron ring.

Suppose, then, that a second coil was wrapped around another segment of the iron ring and connected to a galvanometer. The magnetic field set up in the iron ring might produce a current in this second coil, and the galvanometer would record its presence.

The experiment worked. Faraday had devised the first *electrical transformer* and had discovered *electromagnetic induction.* However, it did not work as he had expected. There was no continuous electric current to match the continuous presence of the magnetic field. Instead, there was a momentary flash of current, marked by a jerk of the galvanometer's needle when he closed the circuit, and a second flash, in the opposite direction, when he opened the circuit.

Faraday explained this by means of the lines of force that he visualized. When a circuit was closed and electricity was set to flowing, magnetic line of force[2] sprang outward and crossed the second coil, inducing an electric current. When the circuit was opened again, the magnetic lines of force collapsed inward and crossed the second coil again, inducing an electric current in the opposite direction. When the magnetic lines remained in place because the current in the first coil was flowing steadily, no lines crossed the second coil in either direction and no current was induced in it.$_{(A)}$

Faraday went on to devise a way of having metal cut across the lines of force continually. He turned a copper wheel so that its rim passed between the poles of a permanent horseshoe magnet[3]. As long as the copper wheel turned, its rim continually cut through magnetic lines of force and an electric current flowed continually in the wheel. That current could be led off and made to do work. Faraday had thus devised the first *electric generator.*

Until then, electric current had been produced only by batteries, which meant that the electricity was obtained by burning metals such as zinc. This meant that electricity was expensive and limited in quantity.

The turning of the copper wheel to cut across the magnetic lines of force took considerable effort, and it was this energy that was turned into electricity.$_{(B)}$ If one had to turn the wheel by muscle power, little electricity could be obtained. However, the wheel could be and eventually was driven by

[1]Ørsted エールステッド (人名)
[2]magnetic line of force 磁力線
[3]horseshoe magnet U 字型磁石

steam power, which meant that electricity was formed from burning fuel or from some other copious source of energy such as falling water or blowing wind.

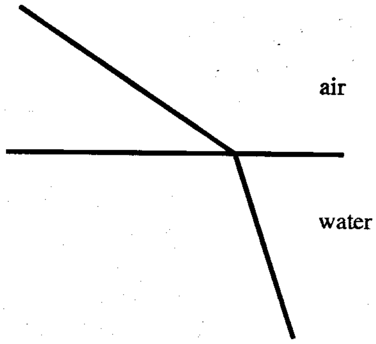
Eventually, when the electric generator was sufficiently improved, electricity could be generated cheaply and in any quantity desired.

(1) ファラデーの二つの実験装置を図で示せ。

(2) 第1の実験の結果、流れた電流を時間を横軸にしてグラフで表すとどのように書けるか。

(3) 下線部(A),(B)を日本語に訳せ。

問3　以下の英文は"**Stories of Your Life**"(Ted Chang)という小説の中で登場人物の私(I)とグレイ(Gray)がフェルマーの原理について会話している部分である。読んで問いに答えよ。(30点)



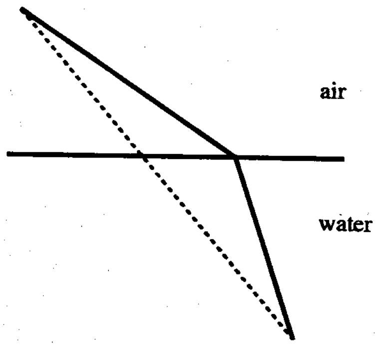
"Okay, here's the path a ray of light takes when crossing from air to water. 光線は水にぶつかるまでは一直線に進む。水と空気は屈折率が違う。だから光は方向を変える。$_{(C)}$You've heard of this before, right?"

I nodded. "Sure."

"Now here's an interesting property about the path the light takes. The path is the fastest possible route between these two points."

"Come again?"

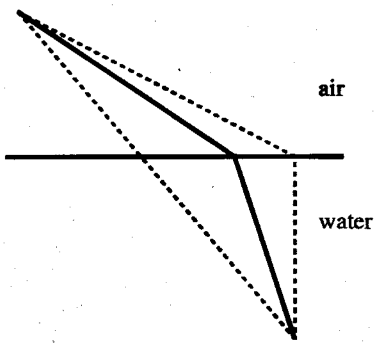
"Imagine, just for grins, that the ray of light traveled along this path." He added a dotted line to his diagram:



"<u>この仮想的な路は実際に光がとる路よりも短いんだ。</u>$_{(D)}$ (ア) light travels more slowly in water than it does in air and a greater percentage of this path is underwater. (イ) it would take longer for light to travel along this path than it does along the real path."

"Okay, I get it."

"<u>光がこの路を通ったとしよう。</u>$_{(E)}$" He drew a second dotted path:



"This path reduces the percentage that's underwater, (ウ) the total length is larger. It would also take longer for light to travel along this path than along the actual one."

Gray put down the chalk and gestured at the diagram on the chalkboard with white-tipped fingers. "Any hypothetical path would require more time to traverse than the one actually taken. (エ), the route that the light ray takes is always the fastest possible one. That's Fermat's principle of least time."

(1) 括弧(ア)〜(エ)内に適切な接続詞または接続詞句を答えよ。

(2) 下線部 (C),(D),(E) を英語で表せ。