

2004年2月9日(月)

平成16年度 琉球大学大学院入学試験

理工学研究科博士前期課程  
物質地球科学専攻(物理系)

専門科目問題

注 意

1. 問題はI, II, III, IVの4題ある.
2. すべての解答用紙に受験番号を記入すること.
3. 問題毎に別々の解答用紙を用いること.
4. 解答用紙が足りない場合は監督官に申し出ること.

**I**

図のように、鉛直上向きの軸 ( $z$  軸) と角  $\theta$  を保ちながら、この軸のまわりに一定の角速度  $\omega$  で回転するなめらかな棒がある。この棒上に束縛されている質量  $m$  の質点について、以下の各問いに答えよ。ただし、重力加速度を  $g$  とする。また、質点の位置を直交座標で  $(x, y, z)$ 、極座標で  $(r, \theta, \varphi)$  と表す。(100 点)

問1  $z$  軸のまわりを角速度  $\omega$  で回転する座標系で質点の運動を考える。

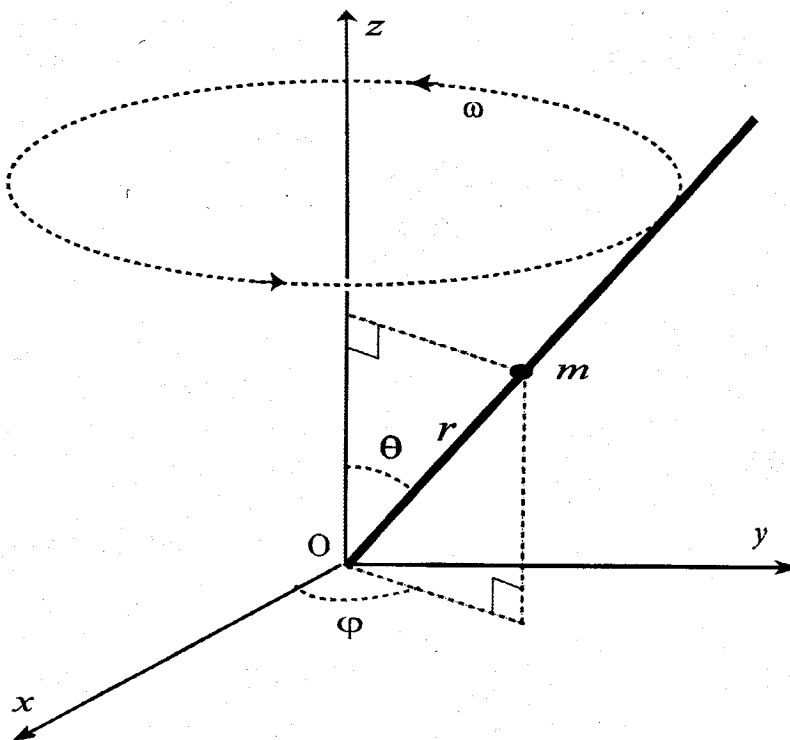
- (1) 回転座標系で質点に働く力を求めよ。
- (2) 質点の  $r$  方向の運動方程式を求めよ。

問2 次に、静止座標系で質点の運動を考える。

- (1) 質点の座標  $(x, y, z)$  を  $(r, \theta, \varphi)$  で表し、それを用いて質点のラグランジアン  $L$  を求めよ。ただし、 $\varphi = \omega t$  ( $t$  は時間) とせよ。
- (2) 質点の  $r$  に関するラグランジュの方程式が  $d^2r/dt^2 = r\omega^2 \sin^2 \theta - g \cos \theta$  で与えられることを示せ。

問3 (1) 質点の運動方程式を解いて  $r(t)$  を求めよ。ただし、 $t = 0$  で  $r = a$  および  $dr/dt = 0$  とする。

- (2) 点  $r = g \cos \theta / (\omega^2 \sin^2 \theta)$  ( $0 < \theta < \pi/2$ ) は不安定な平衡点であることを示せ。ここで、不安定な平衡点とは、その点では質点に力は働かず、その点から質点がわずかでも離れるとその点から離れる方向に力が働くような点のことである。



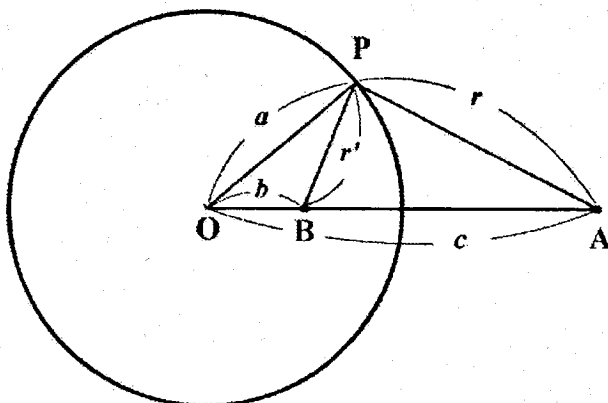
問1 以下の問いに答えよ。

- (1) 電場を表現するのに電気力線が使われる。電場の方向と大きさを電気力線によってどのように表現するかを説明せよ。
- (2) 導体表面での電場の方向を求め、なぜそうなるかを説明せよ。
- (3) 導体内での電場の大きさを求め、なぜそうなるかを説明せよ。
- (4) 導体内での電位を求め、なぜそうなるかを説明せよ。

問2 真空中に半径  $a$  の帯電していない導体球がある。この導体球を接地し、導体球の中心  $O$  から距離  $c(c > a)$  の位置にある導体球外の  $A$  点に電荷  $q(q > 0)$  の点電荷を置いた。 $A$  点の電荷  $q$  に働く力の大きさと方向を鏡像 (イメージ) 法を用いて求めてみよう。そのために、導体球の中心  $O$  と  $A$  点を結ぶ線分上で中心  $O$  から距離  $b$  の位置にある導体球内の  $B$  点に点電荷  $-q'(q' > 0)$  があるとしよう。

以下の問いに答えよ。ただし、真空中での誘電率を  $\epsilon_0$  とする。

- (1)  $B$  点に点電荷  $-q'(q' > 0)$  があるとする理由を述べよ。また、導体表面の電位  $V$  の値はいくらか。
- (2)  $A$  点、 $B$  点から導体球の表面の任意の  $P$  点までの距離をそれぞれ  $r, r'$  とする時、 $P$  点の電位を  $q, q', r, r'$  を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた電位の式を用いて  $q, q', r, r'$  の関係を求めよ。
- (4)  $b$  を  $a, c$  を用いて表せ。また、 $q'$  を  $a, c, q$  を用いて表せ。
- (5)  $A$  点の電荷  $q$  に働く力を求めよ。



問3 次に、帯電していない導体球を接地しなかった場合について考える。接地した場合の解法で  $B$  点にあるとした点電荷  $-q'(q' > 0)$  に加えて、新たに電荷  $q''$  の点電荷が導体球内のどこかの位置  $D$  にあるとして問題を解けばよい。このとき、 $D$  点の位置、および  $q'$  と  $q''$  の関係を求め、なぜそうなるかを説明せよ。

参考： 三角形  $ABC$  の頂角  $\angle A, \angle B, \angle C$  の大きさをそれぞれ  $A, B, C$  とする。また、頂点  $A, B, C$  の対辺  $BC, CA, AB$  の長さをそれぞれ  $a, b, c$  とする。このとき、余弦定理  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  がなりたつ。

### III

質量  $m$ 、電荷  $-e$  の電子 A (座標  $\vec{r}_A$ 、運動量  $\vec{p}_A$ ) と質量  $M$ 、電荷  $Ze$  の原子核 B (座標  $\vec{r}_B$ 、運動量  $\vec{p}_B$ ) が相互作用しながら運動している。真空中での誘電率を  $\epsilon_0$ 、 $r = |\vec{r}_A - \vec{r}_B|$ 、 $\mu = mM/(m+M)$  として以下の問いに答えよ。

(100点)

- 問1 この系の運動状態を記述するハミルトニアンを書け。
- 問2 この系の時間を含まない Schrödinger 方程式を書け。
- 問3 問2の方程式を解くには、重心運動と相対運動に分けて解く方法が通常である。重心運動に対する Schrödinger 方程式を書き、その波動関数とエネルギー固有値を書け。
- 問4 (1) 相対運動に対する Schrödinger 方程式を書け。  
この系の基底状態のエネルギーを求めるために、変分法を用いる。試行関数を  $\phi_0(r) = C \exp(-\alpha r)$  として、  
(2) 規格化条件により  $C$  を求めよ。  
(3) エネルギー期待値  $E_0$  は、変分パラメーター  $\alpha$  の関数として、

$$E_0(\alpha) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \alpha^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \alpha$$

で与えられることを示せ。

- (4)  $E_0(\alpha)$  の最小値を求めよ。

- 問5 電子 A が基底状態に安定に留まり、エネルギーを放出して原子核 B に落ち込んでいかなのはなぜか、簡単に説明せよ。

参考

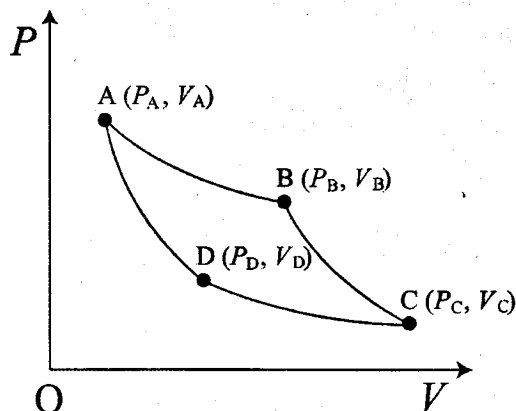
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right), \quad \int_0^\infty dr e^{-\alpha r} r^n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

# IV

以下の各問いに答えよ。(100 点)

問1. 1 モルの理想気体が図に示すような 2 つの異なる道筋を経由し、準静的に状態変化する場合を考える。

道筋 I    A  $\xrightarrow{\text{等温膨張}}$  B  $\xrightarrow{\text{断熱膨張}}$  C  
 道筋 II    A  $\xrightarrow{\text{断熱膨張}}$  D  $\xrightarrow{\text{等温膨張}}$  C



- (1) 道筋 II の状態 A から状態 D への断熱膨張において、気体の内部エネルギー  $U$  はいくら変化するか。ただし、気体の圧力  $P$  と体積  $V$  の間には  $PV^\gamma = C$  (一定) の関係が成立する。 $\gamma$  は気体の種類で決まる定数。
- (2) 道筋 I、道筋 II、それぞれの内部エネルギーの変化量を求めよ。
- (3) 変化の過程が  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  と一巡する場合の  $\oint dU$  を求めよ。

問 2. 質量  $m$ 、固有角振動数  $\omega$  をもつ  $N$  個の一次元調和振動子について考える。

古典力学的に取り扱う場合

- (1) ハミルトニアンを書け。
- (2) 分配関数を求めよ。
- (3) この系のエントロピー  $S$  を求めよ。

量子論的に取り扱う場合

- (4) 分配関数を求めよ。なお、量子論によれば一次元調和振動子のエネルギー固有値は

$$\varepsilon_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad , \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で与えられる。

- (5) この系の Helmholtz の自由エネルギー  $F$  を求めよ。
- (6) この系のエントロピー  $S$  を求めよ。
- (7) 古典的および量子論的に取り扱う場合において、熱力学第 3 法則の成立、不成立を具体的に示し、理由を述べよ。

参考、  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} .$

琉球大学理工学研究科  
博士前期課程  
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題  
英語

2004年度第2次募集  
2004年2月9日実施

- ①すべての解答用紙に受験番号を記入すること.
- ②解答用紙は片面のみを使用. 縦置き横書き.
- ③用紙が足りない場合は監督官に請求すること.
- ④辞書を使用してもよい.
- ⑤問題冊子は持ち帰ること.

1

以下の問いに答えよ。(30点)

Classical mechanics has been developed continuously from the time of Newton and applied to an ever-widening range of dynamical systems, including the electromagnetic field in interaction with matter. The underlying ideas and the laws governing their application form a simple and elegant scheme, which one would be inclined to think could not be seriously modified without having all its attractive features spoilt. Nevertheless it has been found possible to set up a new scheme, called quantum mechanics, which is more suitable for the description of phenomena on the atomic scale and which is in some respects more elegant and satisfying than the classical scheme. This possibility is due to the changes which the new scheme involves being of a very profound character and not clashing with the features of the classical theory that make it so attractive, as a result of which all these features can be incorporated in the new scheme.

The necessity for a departure from classical mechanics is clearly shown by experimental results. In the first place the forces known in classical electrodynamics are inadequate for the explanation of the remarkable stability of atoms and molecules, which is necessary in order that materials may have any definite physical and chemical properties at all. The introduction of new hypothetical forces will not save the situation, since there exist general principles of classical mechanics, holding for all kinds of forces, leading to results in direct disagreement with observation. For example, if an atomic system has its equilibrium disturbed in any way and is then left alone, it will be set in oscillation and the oscillations will get impressed on the surrounding electromagnetic field, so that their frequencies may be observed with a spectroscope. Now whatever the laws of force governing the equilibrium, one would expect to be able to include the various frequencies in a scheme comprising certain fundamental frequencies and their harmonics. This is not observed to be the case. Instead, there is observed a new and unexpected connection between the frequencies, called Ritz's Combination Law of Spectroscopy, according to which all the frequencies can be expressed as differences between certain terms, the number of terms being much less than the number of frequencies. This law is quite unintelligible from the classical standpoint. (from Dirac, "THE PRINCIPLES OF QUANTUM MECHANICS")

問1 第1パラグラフ(最初の段落)を和訳せよ。

問2 原子系の分光実験に関して、古典論ではどのような結果が予測されるか。また、実際にはどのような実験結果が得られているか。簡潔に説明せよ。

2

以下の問いに答えよ。(30点)

The first law of thermodynamics arose as the result of the impossibility of constructing a machine which could create energy. The first law, however, places no limitations on the possibility of transforming energy from one form into another. Thus, for instance, on the basis of the first law alone, the possibility of transforming heat into work or work into heat always exists provided the total amount of heat is equivalent to the total amount of work.

This is certainly true for the transformation of work into heat: A body, no matter what its temperature may be, can always be heated by friction, receiving an amount of energy in the form of heat exactly equal to the work done. Similarly, electrical energy can always be transformed into heat by passing an electric current through a resistance. There are very definite limitations, however, to the possibility of transforming heat into work. If this were not the case, it would be possible to construct a machine which could, by cooling the surrounding bodies, transform heat, taken from its environment, into work.

Since the supply of thermal energy contained in the soil, the water, and the atmosphere is practically unlimited, such a machine would, to all practical purposes, be equivalent to a *perpetuum mobile*, and is therefore called a *perpetuum mobile* of the second kind.

The second law of thermodynamics rules out the possibility of constructing a *perpetuum mobile* of the second kind. In order to give a precise statement of this law, we shall define what is meant by a source of heat of a given temperature.

A body which is at the temperature  $t$  throughout and is conditioned in such a way that it can exchange heat but no work with its surroundings is called a source of heat of temperature  $t$ . As examples of this, we may consider bodies enclosed in rigid containers or bodies which undergo negligible variations of volume. A mass of water which is at the temperature  $t$  throughout may be taken as a source of heat, since its volume remains practically constant.

We can now state the second law of thermodynamics in the following form:

*A transformation whose only final result is to transform into work heat extracted from a source which is at the same temperature throughout is impossible. (Postulate of Lord Kelvin.)*

The experimental evidence in support of this law consists mainly in the failure of all efforts that have been made to construct a *perpetuum mobile* of the second kind.

The second law can also be expressed as follows:

*A transformation whose only final result is to transfer heat from a body at a given temperature to a body at a higher temperature is impossible. (Postulate of Clausius.) (from Fermi, "THERMODYNAMICS")*

*perpetuum mobile* 永久機関

問1 線で囲まれた部分を和訳せよ。

問2 熱源とは何か簡潔に説明せよ。



3

自分の卒業研究のテーマについて, 50語程度の英文で説明せよ. (20点)

卒業研究 graduation study

4

以下の文章を英訳せよ. (20点)

- (1) 不確定性原理によれば, 微視的な粒子の位置と運動量の値を正確にかつ同時に指定することは不可能である.
- (2) 古典力学的な振動子が互いにエネルギーを交換し合って, 温度  $T$  の熱平衡状態にあるものとすれば, エネルギーの等分配則により, この体系の内部エネルギーは  $3Nk_{\text{B}}T$  である.
- (3) いかなる物体も, 外界からの影響を受けない限り, 一直線上を一定速度で運動する.
- (4) 物理学の基本法則はどの慣性系において観測されても同じ形を持つ. また, すべての慣性系において, 真空中の光の速さは一定である.

不確定性原理 uncertainty principle

エネルギーの等分配 equipartition law of energy

慣性系 inertial frame