

2004 年度

琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程入学試験問題
物質地球科学専攻・物理系

『物 理 学 問 題』

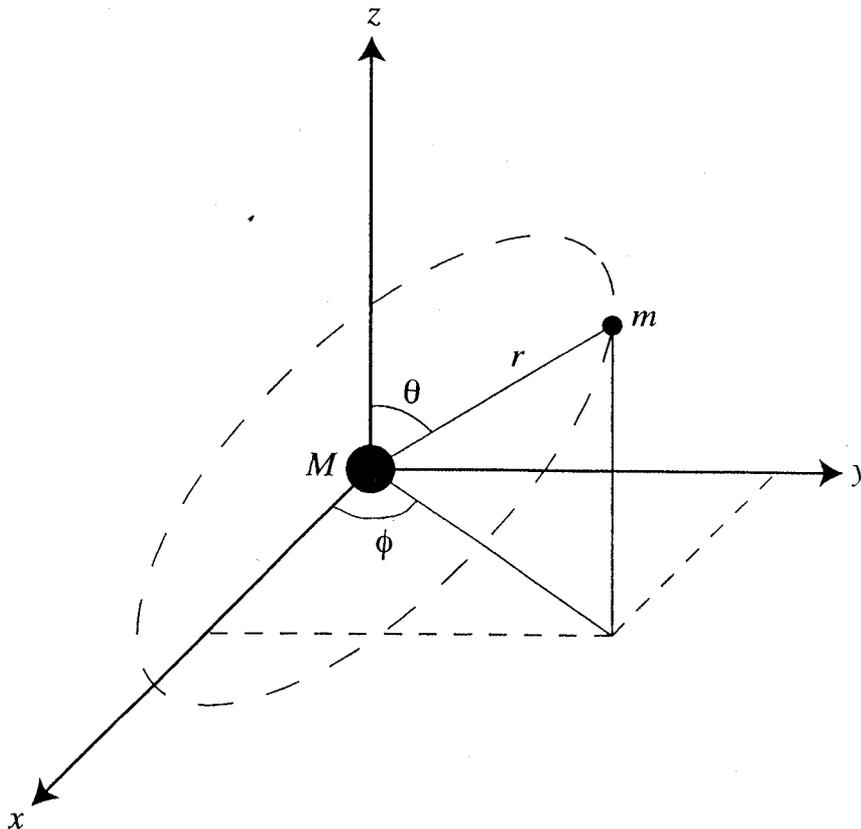
注意事項

1. 全ての解答用紙に受験番号を記入すること
2. 大問ごとに別々の解答用紙を用いること
3. 答用紙は片面のみ使用し、縦置き横書きで解答すること
4. 解答用紙が足りない場合は監督官に請求すること
5. 問題冊子は試験終了後、各自持ち帰ること

I 下図のように、地球が太陽を中心とする半径 r の円軌道上を運動しているとする。他の天体からの影響は無視できるものとし、以下の各問に答えよ。ただし、万有引力定数を G 、地球および太陽の質量をそれぞれ m および M とする。

(100 点)

- 問1 地球が太陽の周りを円運動するのに必要な向心力は万有引力で与えられる。地球の速さ v を G 、 M および r で表せ。
- 問2 公転周期を 365 日として、地球の速さ v および太陽の質量 M を求めよ。ただし、 $r=1.5 \times 10^8$ km および $G=6.7 \times 10^{-11}$ Nm²/kg² とする。(単位に注意)
- 問3 無限遠を原点としてポテンシャル $U(r)$ を求めよ。
- 問4 地球の運動に対するラグランジアン L を、太陽を原点とする極座標 (r, θ, ϕ) を用いて表せ。
- 問5 r 、 θ および ϕ に関するラグランジェ運動方程式を求めよ。
- 問6 一般化運動量 p_r 、 p_θ および p_ϕ を求めよ。
- 問7 ハミルトニアン H を p_r 、 p_θ および p_ϕ を用いて表せ。
- 問8 z 軸のまわりの角運動量 p_ϕ が一定であることを示せ。



II 以下の各問いに答えよ。

(100点)

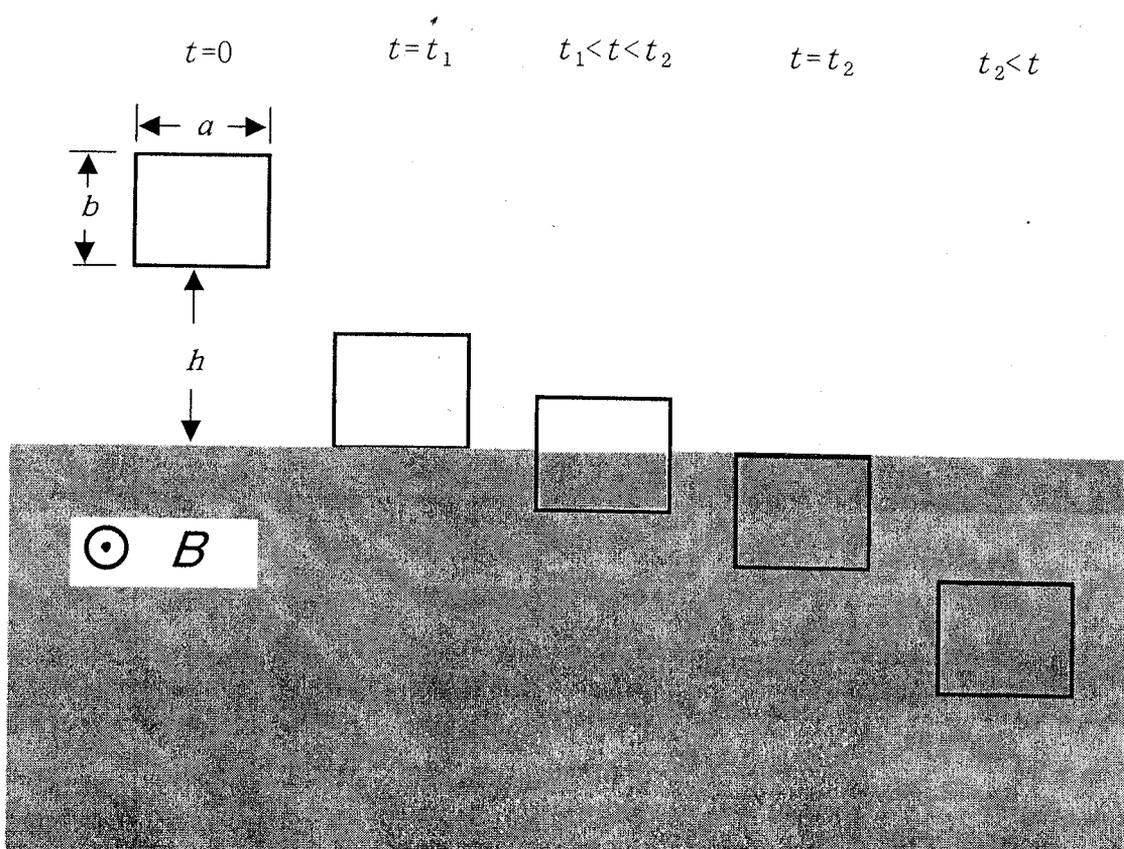
問1 下図のように、横 a 、縦 b の長方形の導体が磁場の印加されていない領域から磁場の印加されている領域中（磁束密度 B ）に落下するとき、各領域におけるこの導体の速さ v を時間 t の関数として以下の手順に従って求めよ。ただし、磁場は一様に紙面の手前向きに印加されている。最初、導体は磁場の印加されている領域から h の高さ（導体下端と磁場領域の間の距離）に静止した状態から、 $t=0$ で静かに離された。導体の質量を m 、導体の電気抵抗を r 、重力加速度を g とする。

- (1) 磁場 B が印加されていない領域 ($0 < t < t_1$) での導体の速さ $v(t)$ を求めよ。また、磁場に接する瞬間 ($t = t_1$) の速さ v_h を求めよ。
- (2) 次に、導体が磁場中に入っていく領域 ($t_1 < t < t_2$) において、時刻 t の導体の速さを v として、そのときの導体の誘導起電力の大きさ V を求めよ。また、導体を流れる電流 I と向きを求めよ。
- (3) このとき、落下する導体の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{a^2 B^2 v}{r}$$

で与えられることを示せ。また、この微分方程式を解いて、 $v(t)$ を求めよ。初期条件として(1)で求めた v_h の値を用いよ。

- (4) 磁場中 ($t_2 < t$) での導体の速さ $v(t)$ を求めよ。



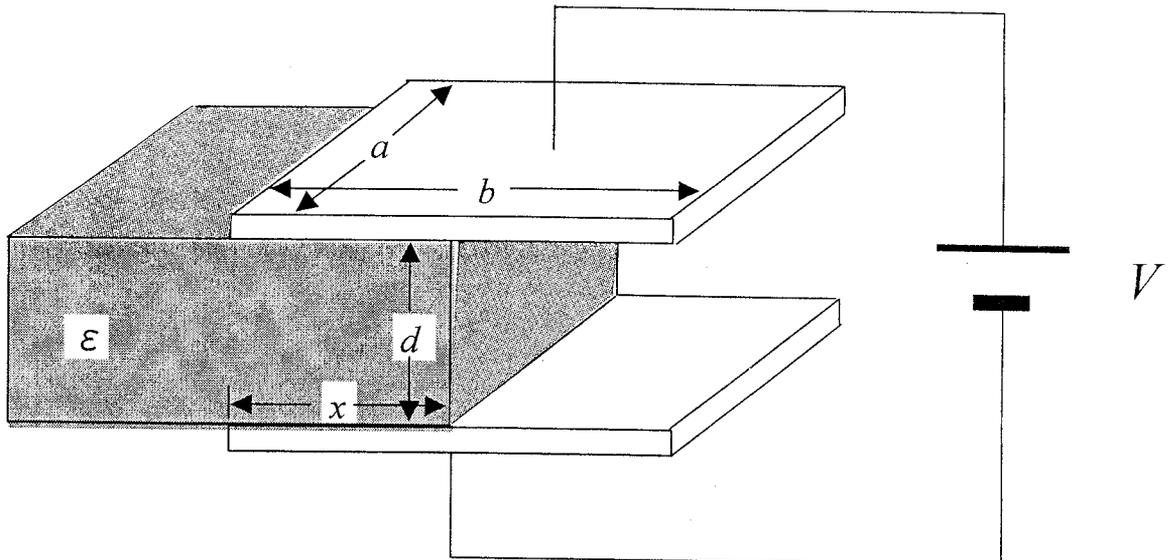
問2 下図のように真空中に置かれた、幅 a 、長さ b 、間隔 d の金属板で作ったコンデンサーと電圧 V の電池からなる回路がある。このコンデンサーに、幅 a 、長さ b 、厚さ d の誘電率 ϵ を持つ誘電体を挿入した。図に示されているように、コンデンサーの端から、挿入された誘電体の端までの距離を x とする。ただし、 d は a 、 b に比べて小さいとし、コンデンサーと誘電体の間の摩擦は無視でき、真空の誘電率を ϵ_0 とする。

- (1) 誘電体がコンデンサーの中に x だけ入ったとき、誘電体が挿入されている金属板の部分に電荷 Q_e 、真空の部分に電荷 Q_0 が蓄えられているとして、誘電体が挿入されている部分と真空中の部分の電場 E_e と E_0 をそれぞれ求めよ。また、求めた電場を用いて全体の静電容量 C が

$$C = \epsilon \frac{xa}{d} + \epsilon_0 \frac{(b-x)a}{d}$$

になることを示せ。

- (2) このとき、コンデンサーに蓄えられている、静電エネルギー U を求めよ。
- (3) 誘電体に働く力の大きさ F を求めよ。また、その力はどの方向か、理由を付けて述べよ。
- (4) 誘電体を半分だけコンデンサーに挿入して、外部から力を加えて微小振動させた。この振動が $x(t) = (b/2) - A \sin \omega t$ と表わされるとき、回路に流れる電流 $I(t)$ を求めよ。また、電力 $P(t)$ の1周期平均値を求めよ。



III

質量 m の粒子に対する時間に依存する 1 次元シュレーディンガー方程式はハミルトニアン演算子 H と時間に依存する波動関数 $\psi(x, t)$ を用いて下記のように書ける. $V(x)$ は任意のポテンシャルを表す. 以下の各問いに答えよ.

(100 点)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H\psi(x, t), \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x).$$

問 1 ハミルトニアン演算子 H と運動量演算子 $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ の交換関係 $[H, p_x]$ を計算せよ.

問 2 時刻 t , 位置 x の dx 中に粒子を見出す確率 $P(x, t)dx$ を表す式を書け.

問 3 全確率の時間微分が $\frac{d}{dt} \int P(x, t)dx = 0$ を満し, 全確率が保存することを示せ.

(ヒント: ハミルトニアン H がエルミート演算子であることを用いるとよい).

一般にエルミート演算子 \hat{A} は波動関数の内積 $\int \psi^*(\hat{A}\psi)dx = \int (\hat{A}\psi)^*\psi dx$ を満たす.

問 4 定常解 $\psi(x, t) = \phi(x) \exp(-iEt/\hbar)$ を仮定するとき, 時間に依存しない波動関数 $\phi(x)$ に対するシュレーディンガー方程式を書け.

これ以後, ポテンシャル $V(x)$ は次のような 1 次元井戸型ポテンシャルで表されるとする.

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L, \\ +\infty, & x < 0, \quad L < x. \end{cases}$$

問 5 井戸型ポテンシャルにおける $x=0, x=L$ での境界条件を考慮してシュレーディンガー方程式を解き, 規格化された波動関数が $\phi(x) = \sqrt{2/L} \sin(kx)$ で表されることを示せ.

ここで $k = \sqrt{2mE/\hbar^2} = \pi n/L$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) である.

問 6 井戸型ポテンシャル中の粒子の基底状態のエネルギー E_1 を求めよ.

問 7 井戸型ポテンシャル中の粒子の位置の不確定さが $\Delta x = L/2$ であるとすると, 運動量の不確定さ Δp_x はどの程度になるか L を用いて表せ.

このとき, エネルギーの不確定さと基底状態のエネルギー E_1 との関係について述べよ.

IV 以下の各問いに答えよ。

(100点)

問1 準静的変化を行うある気体の圧力, 体積, 温度, エントロピーはそれぞれ, p , V , T , S であった。

- (1) 系の内部エネルギー E の変化 dE を p , V , T , S を用いて表せ。
- (2) ヘルムホルツの自由エネルギー F の変化 dF を体積の変化 dV および温度の変化 dT を用いて表せ。
- (3) ヘルムホルツの自由エネルギーの全微分形式を用いて、マックスウェルの関係式:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

を導け。

- (4) 系の内部エネルギーと圧力との間に

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

が成立することを示せ。

問2 不可逆過程を含むサイクルで作動する熱機関を考える。この熱機関が等温・等圧過程において、ギブスの自由エネルギー G ($G = F + pV$) の変化が常に $dG \leq 0$ となることを示せ。また、熱平衡状態に達したとき、この熱機関のギブスの自由エネルギーはどうか説明せよ。

問3 摩擦の熱の発生は不可逆的である。何故か。

問4 温度が T に保たれている熱平衡状態の N 個の粒子からなる系において、エネルギー E をもつ確率 $P(E)$ は $e^{-\beta E}$ に比例する。ここで、 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ であり、 k_B はボルツマン定数である。また、状態 j におけるエネルギーを E_j とすると、実現確率 $p(E_j)$ は比例係数を $\frac{1}{Z}$ として

$$p(E_j) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_j}$$

で与えられる。このとき、以下の各問いに答えよ。

- (1) 規格化条件: $\sum_j p(E_j) = 1$ を用いて、 Z を β および E_j で表せ。

- (2) 系の平均エネルギー $\langle E \rangle$ を求めよ。

- (3) 系のエントロピー S はヘルムホルツの自由エネルギーを F とすると、

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

で与えられる。このとき、 F を β および Z で表せ。

2004 年度

琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程入学試験問題
物質地球科学専攻・物理系

『英 語 問 題』

注意事項

1. 全ての解答用紙に受験番号を記入すること
2. ~~夫問ごとに別々の解答用紙を用いること~~
3. 答用紙は片面のみ使用し、縦置き横書きで解答すること
4. 解答用紙が足りない場合は監督官に請求すること
5. 問題冊子は試験終了後、各自持ち帰ること

問1. 以下の英文を和訳せよ。解答用紙には、便宜的に付けた番号(①～⑦)ごとに解答せよ。(70点)

- ① IS THERE ANY KNOWLEDGE in the world which is so certain that no reasonable man could doubt it? This question, which at first sight might not seem difficult, is really one of the most difficult that can be asked. When we have realized the obstacles in the way of a straightforward and confident answer, we shall be well launched on the study of philosophy—
- ② for philosophy is merely the attempt to answer such ultimate questions, not carelessly and dogmatically, as we do in ordinary life and even in the sciences, but critically, after exploring all that makes such questions puzzling, and after realizing all the vagueness and confusion that underlie our ordinary ideas.
- ③ In daily life, we assume as certain many things which, on a closer scrutiny, are found to be so full of apparent contradictions that only a great amount of thought enables us to know what it is that we really may believe. In the search for certainty, it is natural to begin with our present experiences, and in some sense, no doubt, knowledge is to be
- ④ derived from them. But any statement as to what it is that our immediate experiences make us know is very likely to be wrong. It seems to me that I am now sitting in a chair, at a table of a certain shape, on which I see sheets of paper with writing or print. By turning my head I see out of
- ⑤ the window buildings and clouds and the sun. I believe that the sun is about ninety-three million miles from the earth; that it is a hot globe many times bigger than the earth; that, owing to the earth's rotation, it rises every morning, and will continue to do so for an indefinite time
- ⑥ in the future. I believe that, if any other normal person comes into my room, he will see the same chairs and tables and books and papers as I see, and that the table which I see is the same as the table which I feel
- ⑦ pressing against my arm. All this seems to be so evident as to be hardly worth stating, except in answer to a man who doubts whether I know anything. Yet all this may be reasonably doubted, and all of it requires much careful discussion before we can be sure that we have stated it in a form that is wholly true.

(By Bertrand Russell, 1912)

問2. 何故、大学院進学を希望するのか。和文(400字程度)で書き、それを英文で表現せよ。(30点)