2005年8月30日

平成18年度琉球大学大学院入学試験

理工学研究科博士前期課程

物質地球科学専攻(物理系)

専門科目問題

注意

1. 問題はⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの４題ある.
2. 全ての解答用紙に受験番号を記入すること.
3. 問題毎に別々の解答用紙を用いること.
4. 解答用紙が足りない場合は監督官に申し出ること.

□I　ばね定数 k のばねと質量 m の質点からなる系を考える．次の各問に答えよ．但し，簡単のため質点が平衡位置にある時ばねは自然長にあるとし，重力の影響は無視する．　(100 点)

問1　図1のように，一端を壁に固定した等価な2つのばねの他端に一つの質点をつなぐ．

(1) 質点が平衡位置から $\xi(t)$ だけずれたとき，左側のばねが質点に及ぼす力 F_1 と右側のばねが質点に及ぼす力 F_2 を求めなさい．

(2) 質点の運動方程式を書き，質点の変位 $\xi(t)$ の運動を求めなさい．

(3) 変位 $\xi(t)$ を一般化座標として，この系の Lagrange の関数を求めなさい．

(4) Lagrange の関数から運動方程式を導いて質点の運動を求めなさい．

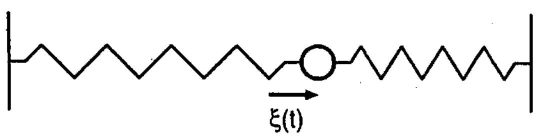

図 1:

問2　図2のように3個の等しいばねでつながれた2つの質点の変位を $\xi_1(t)$，$\xi_2(t)$ とする．

(1) 2つの質点の運動方程式を書きなさい．

(2) 運動方程式を解いて $\xi_1(t)$ と $\xi_2(t)$ の一般解を求めなさい．

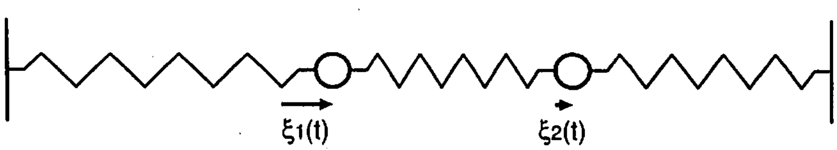

図 2:

問3　図3のように N 個 $(>>1)$ の等しいばねと質点からなる系がある．全ての質点が静止しているときの隣り合う質点の間隔を l とし，そのときの j 番目の質点の位置を $x_j = jl$ とする．

(1) j 番目の質点の変位を $\xi_j(t)$ とするとき，その質点の運動方程式を書きなさい．

(2) この質点系を単位断面積をもつ長さ $L_0 = Nl$ の弾性棒とみなす．そのとき，単位長さ当たりの質量すなわち線密度 ρ は m/l で与えられる．今，この状態から力 F を加えて弾性棒を ΔL だけ伸ばすとき，力 F と伸び ΔL の間には $F = e\Delta L/L_0$ の関係が成り立つ．弾性定数 e をヤング率という．ヤング率 e とばね定数 k の関係を求めなさい．

(3) 弾性棒の位置 x での変位を $\xi(x,t)$ とすると，$\xi(x_j,t) = \xi_j(t)$ である．小問 (1) で求めた運動方程式を $\xi(x,t), e, \rho$ で表わし，弾性棒の振動 $\xi(x,t)$ の波動方程式を導きなさい．但し，l は十分小さいので関係式 $\partial\xi(x_j,t)/\partial x = (\xi(x_{j+1},t) - \xi(x_j,t))/l$ を用いなさい．

図 3:

II 図1のように真空中に置かれた面積Sの大きさの等しい2枚の導体平極板を平行に間隔dだけ離してコンデンサーをつくった。ただし，真空中の誘電率をε_0とし，極板の端の効果を無視する。（100点）

はじめに，このコンデンサーに直流電圧をかけて，極板にそれぞれ正負の大きさQの電荷を与えた。

問1 極板間の内側および外側の電場Eをガウスの法則を用いて求めよ。

問2 コンデンサーの静電容量Cを求めよ。

問3 コンデンサー内の静電エネルギーを求めよ。

問4 極板間に働く力の大きさを求めよ。

次に，図2のように，このコンデンサーの極板間に，面積S，誘電率ε_1，厚さxの誘電体と面積S，誘電率ε_2，厚さ$d-x$の誘電体を挿入した。このコンデンサーに直流電圧をかけて，極板にそれぞれ正負の大きさQの電荷を与えた。

問5 2つの誘電体に生じる電束密度の大きさD_1, D_2および電場の大きさE_1, E_2を求めよ。

問6 極板間の電位差はいくらか。

問7 コンデンサーの静電容量Cを求めよ。

問8 2つの誘電体の境界面に生じる分極電荷の面密度を求めよ。

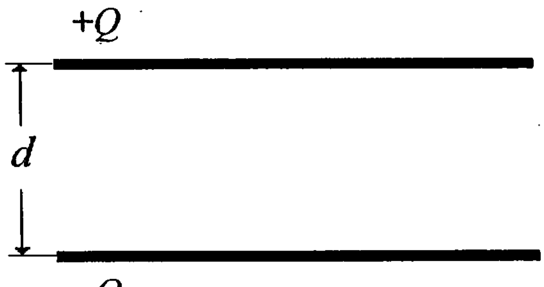

図1

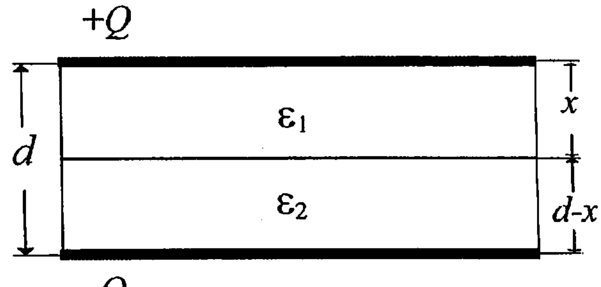

図2

III 以下の各問に答えよ. (100点)

問 1

(1) $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$ を証明せよ. 但し, A^{+}, B^{+} は行列 A, B の Hermite 共役行列である.

(2) Dirac の delta 関数 $\delta(x)$ について, $\delta(ax) = \dfrac{1}{a}\delta(x)$ $(a>0)$ を証明せよ.

(3) 二つの演算子 A, B について, 共通の固有関数が存在するならば, $[A, B] \equiv AB - BA = 0$, つまり A と B とが可換であることを示せ.

問 2

一次元調和振動子の Hamiltonian H は,

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\,\omega^2 q^2,\ (p：運動量演算子,\ q：座標,\ m：質量,\ \omega：振動数)$$

で表される.

(1) $p = -i\hbar\dfrac{d}{dq}$ として $[p, q] = -i\hbar$ であることを示せ.

(2) $a = \dfrac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega q)$, $a^{+} = \dfrac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega q)$ として $[a, a^{+}] = 1$ であることを示せ.

(3) H を a, a^{+} で表せば, $H = \hbar\omega a^{+}a + \dfrac{1}{2}\hbar\,\omega$ と書けることを示せ.

(4) H の固有関数を φ_i とし, それに属するエネルギー固有値を ε_i とする. $a\varphi_i$ も H の固有関数であることを示し, その固有値を求めよ. また, $a^{+}\varphi_i$ も H の固有関数であることを示し, その固有値を求めよ.

(5) 最小のエネルギー固有値は $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}\hbar\,\omega$ であることを示せ.

(6) 最小のエネルギー固有値がゼロにならない理由を書け.

IV 以下の各問に答えよ.

(100点)

問 1. ある物質に熱量 δQ が与えられると，一般に物質の圧力 p，体積 V，温度 T は変化し別の状態に移る．また，それに伴い内部エネルギー U も変化する．なお，ここでいう状態変化は準静的変化を考える．

(1) 内部エネルギー U を，T と V の関数とみなして全微分の形式で表せ．

(2) 熱量の変化量を与える式 $\delta Q = dU + pdV$ から，定積熱容量 C_V と定圧熱容量 C_p との間には，以下の関係式が成り立つことを示せ．

$$C_p = C_V + \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

ただし，ある熱力学的量 A が一定の過程における熱容量 C_A は，以下の式で定義される．

$$C_A = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_A$$

(3) 定圧熱容量 C_p は定積熱容量 C_V より大である理由を述べよ．

(4) 理想気体は，状態方程式 $pV = nRT$ に従う．n はモル数を表す．いま，ある物質が理想気体1モルの場合，上記 (2) の結果を用いて $C_p - C_V = R$ であることを示せ．

問 2. N 個の同等な局在した1次元調和振動子のつくる理想系を考える．量子力学によれば，この振動子のエネルギーは以下で与えられる．

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

ここで，ω はこの振動子の角振動数である．この系の分配関数 Z を量子論的に導き次式を得た．ただし，$\hbar$ はプランク定数，系の温度を T，ボルツマン定数を k_B，$\beta = 1/(k_B T)$ とした．

$$Z = \left[\frac{\exp\left(-\frac{\beta\hbar\omega}{2} \right)}{1 - \exp\left(-\beta\hbar\omega \right)} \right]^N$$

(1) 上記の分配関数 Z を導出せよ．

(2) 系におけるヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ．

(3) 系の内部エネルギー U は次式で表される．系の内部エネルギー U を導出せよ．

$$U = \frac{1}{2} N\hbar\omega + \frac{N\hbar\omega}{\exp\left(\beta\hbar\omega \right) - 1}$$

(4) 温度 $T \to 0$ での内部エネルギー U の振る舞いについて議論せよ．

(5) 温度が十分高く，$k_B T \gg \hbar\omega$ のときの内部エネルギー U の振る舞いについて議論せよ．

参考：$(a+x)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \cdots, \quad |x| < |a|.$
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad |x| < \infty.$

琉球大学理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

2006年度
入学試験問題
英語

2005年8月30日実施

①すべての解答用紙に受験番号を記入すること.
②解答用紙は片面のみを使用. 縦置き横書き.
③用紙が足りない場合は監督官に請求すること.
④辞書を使用してもよい.
⑤問題冊子は持ち帰ること.

1 以下の問いに答えよ. (30点)

We will now write a summary of the main conclusions of our experiments. We will, however, put the results in a form which makes them true for a general class of such experiments. We can write our summary more simply if we first define an "ideal experiment" as one in which there are no uncertain external influences, i.e., no jiggling or other things going on that we cannot take into account. We would be quite precise if we said: "An ideal experiment is one in which all of the initial and final conditions of the experiment are completely specified." What we will call "an event" is, in general, just a specific set of initial and final conditions. (For example: "an electron leaves the gun, arrives at the detector, and nothing else happens.") Now for our summary.

SUMMARY

(1) The probability of an event in an ideal experiment is given by the square of the absolute value of a complex number ϕ which is called the probability amplitude:

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}=\text{Probability},\\ &\phi=\text{Probability amplitude},\\ &P=|\phi|^2.\end{aligned} \tag{1.6}$$

(2) When an event can occur in several alternative ways, the probability amplitude for the event is the sum of the probability amplitudes for each way considered separately. There is interference:

$$\begin{aligned}&\phi=\phi_1+\phi_2,\\ &P=|\phi_1+\phi_2|^2.\end{aligned} \tag{1.7}$$

(3) If an experiment is performed which is capable of determining whether one or another alternative is actually taken, the probability of the event is the sum of the probabilities for each alternative. The interference is lost:

$$P=P_1+P_2 \tag{1.8}$$

One might still like to ask: "How does it work? What is the machinery behind the law?" No one has found any machinery behind the law. No one can "explain" any more than we have just "explained." No one will give you any deeper representation of the situation. We have no ideas about a more basic mechanism from which these results can be deduced.

We would like to emphasize a very important difference between classical and quantum mechanics. We have been talking about the probability that an electron will arrive in a given circumstance. We have implied that in our experimental arrangement (or even in the best possible one) it would be impossible to predict exactly what would happen. We can only predict the odds! This would mean, if it were true, that physics has given up on the problem of trying to predict exactly what will happen in a definite circumstance. Yes! physics has given up. We do not know how to predict what would happen in a given circumstance, and we believe now that it is impossible—that the only thing that can be predicted is the probability of different events. It must be recognized that this is a retrenchment in our earlier ideal of understanding nature. It may be a backward step, but no one has seen a way to avoid it.

(From The Feynman Lectures on Physics Vol.III *Quantum Mechanics*)

問1 線で囲まれた部分を和訳せよ.

問2 ファインマンは古典力学と量子力学にどのような違いがあると言っているかについて述べよ.

2 以下の問いに答えよ.（30点）

It is known that Maxwell's electrodynamics—as usually understood at the present time—when applied to moving bodies, leads to asymmetries which do not appear to be inherent in the phenomena. Take, for example, the reciprocal electrodynamic action of a magnet and a conductor. The observable phenomenon here depends only on the relative motion of the conductor and the magnet, whereas the customary view draws a sharp distinction between the two cases in which either the one or the other of these bodies is in motion. For if the magnet is in motion and the conductor at rest, there arises in the neighborhood of the magnet an electric field with a certain definite energy, producing a current at the places where, parts of the conductor are situated. But if the magnet is stationary and the conductor in motion, no electric field arises in the neighborhood of the magnet. In the conductor, however, we find an electromotive force, to which in itself there is no corresponding energy, but which gives rise—assuming equality of relative motion in the two cases discussed—to electric currents of the same path and intensity as those produced by the electric forces in the former case.

Examples of this sort, together with the unsuccessful attempts to discover any motion of the earth relatively to the "light medium", suggest that the phenomena of electrodynamics as well as of mechanics possess no properties corresponding to the idea of absolute rest. They suggest rather that, as has already been shown to the first order of small quantities, the same laws of electrodynamics and optics will be valid for all frames of reference for which the equations of mechanics hold good. We will raise this conjecture (the purport of which will hereafter be called the "Principle of Relativity") to the status of a postulate, and also introduce another postulate, which is only apparently irreconcilable with the former, namely, that light is always propagated in empty space with a definite velocity c which is independent of the state of motion of the emitting body. These two postulates suffice for the attainment of a simple and consistent theory of the electrodynamics of moving bodies based on Maxwell's theory for stationary bodies. The introduction of a "luminiferous ether" will prove to be superfluous inasmuch as the view here to be developed will not require an "absolutely stationary space" provided with special properties, nor assign a velocity-vector to a point of the empty space in which electromagnetic processes take place.

(From Einstein, "*ON THE ELECTRODYNAMICS OF MOVING BODIES*")

問1 第 1 パラグラフの内容を，図を書いて簡潔に説明せよ.

問2 第 2 パラグラフを和訳せよ.

3 大学院進学を志望する理由を50語程度の英文で説明せよ．(20点)

4 以下の文章を英訳せよ．(20点)

(1) 物理学において重要な3つの保存則である，エネルギー，運動量，角運動量の保存則は，それぞれ時間の一様性，空間の一様性，空間の等方性から導かれる．

(2) 統計力学では，系のハミルトニアンから分配関数を求め，それを用いてヘルムホルツの自由エネルギーを表し，それから熱力学的な諸量を導き出す．

(3) 20世紀における物理学上の2大成果は相対性理論と量子力学である．一般市民には相対性理論がよく知られているが，現代物理学における重要度では量子力学が遙かに上である．

(4) 一般に物体や空間内の1点に生じた変化が有限の速さで伝わる現象を波動という．電子などの物質粒子は波としての性質を持ち，物質波と呼ばれている．