

2006年度

琉球大学大学院理工学研究科

博士前期課程入学試験問題

物質地球科学専攻・物理系

『物 理 学 問 題』

注意事項

1. 全ての解答用紙（B4白紙）に受験番号を記入すること
2. 大問ごとに別々の解答用紙を用いること
3. 答用紙は片面のみ使用し、縦置き横書きで解答すること
4. 解答用紙が足りない場合は監督官に請求すること
5. 問題冊子は試験終了後、各自持ち帰ること

I

以下の各問に答えよ.

(100 点)

図 1 のように, 一端を壁 P および Q に固定した同じばね定数で同じ長さの 2 つのばね A および B に質量 m の質点 R をつけた. 質点 R が直線 PQ 上の点 O にあるとき, ばねの長さは ℓ である. また質点 R が直線 PQ 上の点 O にあるとき, それぞれのばねは力 F で質点を引っ張っている. 質点 R は, 直線 PQ を含む平面内で微小振動しているとし, 重力およびばねの質量は無視できるものとする.

問 1 質点 R が O の位置にあるときを, ばねのポテンシャルエネルギーの原点とする. ばね A の長さが $\ell + \Delta\ell$ になったときのばね A のポテンシャルエネルギー U_A が, $U_A = F\Delta\ell$ で表されることを示せ. ($\Delta\ell$ の高次の項は無視する.)

問 2 質点 R の直線 PQ 上の点 O からの PQ に垂直方向の変位を x とする. ばね A の伸び $\Delta\ell$ が $\Delta\ell \approx \frac{x^2}{2\ell}$ で与えられることを示せ.

問 3 ばね B についても同様に考えることができる. この系の Lagrange 関数 L を求めよ.

問 4 運動方程式を求めよ.

問 5 $x = A\sin(\omega t + \alpha)$ とおいて, 角振動数 ω を求めよ.

問 6 $t = 0$ のとき, $x = 0$ とする. x の時間変化を周期がわかるように図示せよ.

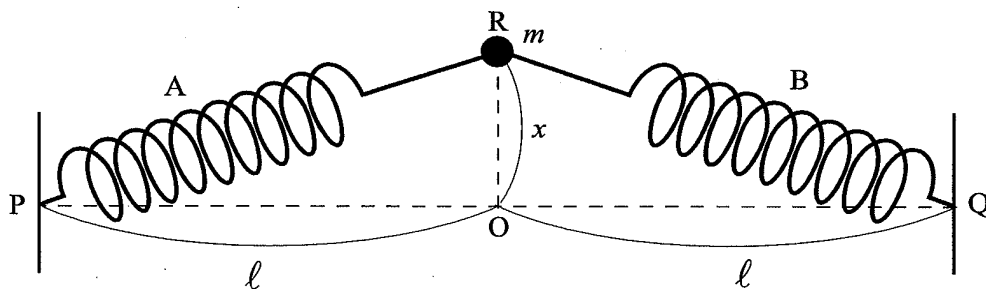


図 1

問7 図1に、AおよびBと同じばねC、質量 m の質点Sを追加し、図2のような力学系にした。PQ上の点OおよびO'からの質点RおよびSの変位をそれぞれ x_1 および x_2 とし、この系のLagrange関数 L を求めよ。ただし、質点RおよびSは微小振動しているとする。

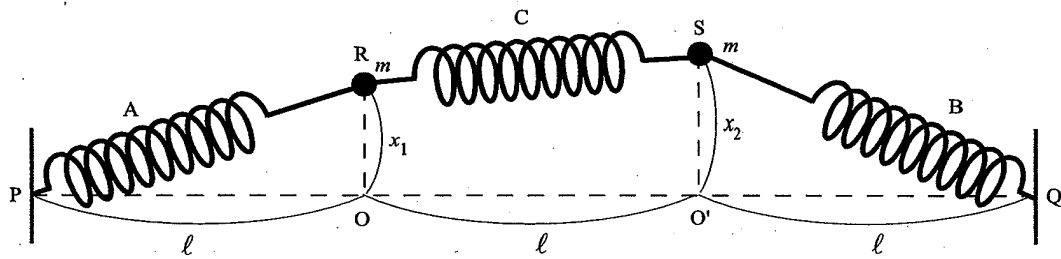


図 2

Ⅱ 真空中に半径 a 、 b の同心導体殻 A、B でできた球形コンデンサーが置かれている。中心からの距離を r として、以下の各問いに答えなさい。真空の誘電率を ϵ_0 とする。 (100 点)

問1. 図1のように、A と B の間に誘電率 ϵ の誘電体で満たし、中心に電荷 q 、A に電荷 Q を与えた。

- (1) $r < a$ 、 $a < r < b$ 、 $b < r$ の領域での電束密度の大きさ D を求めよ。
- (2) $r < a$ 、 $a < r < b$ 、 $b < r$ の領域での電場の強さ E を求めよ。
- (3) $a < r$ の領域において、電場の強さ E を r の関数として図示せよ。
- (4) A と B の電位 V_A 、 V_B を求めよ。
- (5) このコンデンサーの静電容量 C を求めよ。
- (6) $a < r < b$ の領域に蓄えられる静電エネルギーを求めよ。
- (7) A と B を導線でつないだとき、A と B の電荷 Q'_A 、 Q'_B を求めよ。

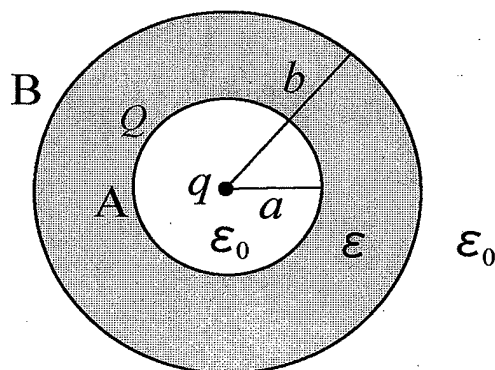


図 1

問2. 図2(a)のように、A を接地した球形コンデンサーの静電容量 C は、図2(b)のように、B を接地したものと比較して $4\pi\epsilon_0 b$ だけ大きい。この違いの原因について説明しなさい。

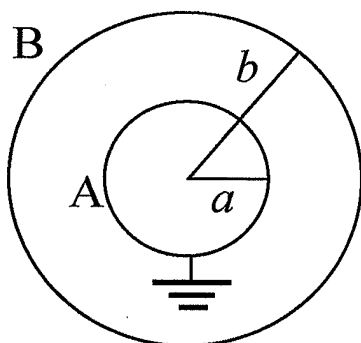


図 2 (a)

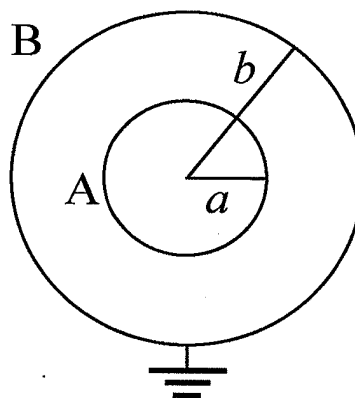


図 2 (b)

Ⅲ

以下の各問に答えよ。

(100 点)

注意：答だけでなく計算の途中経過も適宜書くこと。

問1 中心力ポテンシャル $V(r)$ 中にある質量 m の古典的な粒子の Hamiltonian を書け。ただし、空間は3次元、すなわち運動量は $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ 、原点からの距離は $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。

問2 問1の粒子に対する Schrödinger 方程式を直交座標で書け。

問3 エネルギーが E の固有状態にある時、問2の方程式は極座標表示では

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\hbar^2} L^2 + \frac{2mr^2}{\hbar^2} [E - V(r)] \right\} u(r, \theta, \phi) = 0$$

となる。ただし、

$$-\frac{1}{\hbar^2} L^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

である。 $u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$ と書いたとき、 $R(r)$ と $Y(\theta, \phi)$ に対する方程式を導け。

問4 角運動量演算子 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ の z 成分 L_z は極座標表示では $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ である。 $[L^2, L_z] = 0$ であることを示せ。

問5 $Y_{2,1}(\theta, \phi) = \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$ は全角運動量が2、角運動量の z 成分が1の固有関数であることを示せ。ただし、規格化定数については考えなくて良い。

問6 問4、5の L^2 と L_z のように、交換可能な演算子の同時固有関数は書くことができるが、 L_x と L_z のような交換しない演算子の同時固有関数は書くことができないことを証明せよ。

問7 固有状態とは何か説明せよ。さらに問6の事実を踏まえて、不確定性原理について説明せよ。

IV

以下の各問いに答えよ。

(100 点)

問 1 1 モルの単原子理想気体において、状態 A (p_1, V_1, T_1) から状態 B (p_2, V_2, T_2) への準静的変化を考える。気体定数を R とする。

- (1) 熱力学第 1 法則から熱量の変化 $d'Q$ を、内部エネルギー E および圧力 p 、体積 V を用いて表せ。
- (2) 定圧比熱 C_p は定積比熱 C_v 、内部エネルギー E および圧力 p 、体積 V 、温度 T を用いて、 $C_p = C_v + \left\{ \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right\} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ で与えられることを示せ。
- (3) 内部エネルギー E を求めたところ、 $E = \frac{3}{2}RT$ であった。このとき、系の定圧比熱 C_p および定積比熱 C_v を R で表せ。
- (4) 状態 A から B に断熱変化したとき、比熱比 $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ を求め、体積と温度との間に成立する関係を TV 平面上に描け。

問 2 長さ L の太い鉄棒の先端に温度 T の熱源を接触させた。このとき、鉄棒の内部での熱の拡散は不可逆過程であることを説明せよ。

問 3 質量 m 、角振動数 ω をもつ区別できる調和振動子 N 個の系のハミルトニアンが

$$H(q_v, p_v) = \sum_{v=1}^N \left(\frac{p_v^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_v^2 \right)$$

で与えられるとき、系の分配関数 $Z(T, V, N)$ を計算したところ

$$Z(T, V, N) = \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^N$$

であった。ここに、 k_B はボルツマン定数であり、 \hbar はプランク定数である。

- (1) 分配関数 $Z(T, V, N)$ を用いて、系の自由エネルギー F を表せ。
- (2) 系のエントロピー S が

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, N}$$

で与えられるとき、内部エネルギー E を求めよ。

- (3) 系のエントロピーは内部エネルギーについて、示量性かまたは示強性の量のいずれかであるか説明せよ。

2006 年度

琉球大学大学院理工学研究科

博士前期課程入学試験問題

物質地球科学専攻・物理系

『英 語 問 題』

注意事項

1. 全ての解答用紙（B4 白紙）に受験番号を記入すること
2. 答用紙は片面のみ使用し、縦置き横書きで解答すること
3. 解答用紙が足りない場合は監督官に請求すること
4. 問題冊子は試験終了後、各自持ち帰ること

I

以下の各問題について解答せよ。(100点)

[1] 次の英文を読み、次の各問いに答えよ。

A few hundred years ago, a method was devised to find partial answers to such questions. *Observation, reason, and experiment* make up what we call the *scientific method*. We shall have to limit ourselves to a bare description of our basic view of what is sometimes called *fundamental physics*, or fundamental ideas which have arisen from the application of the scientific method.

What do we mean by "understanding" something? We can imagine that this complicated array of moving things which constitutes "the world" is something like a great chess game being played by the gods, and we are observers of the game. We do not know what the rules of the game are; all we are allowed, to do is to *watch* the playing. Of course, if we watch long enough, we may eventually catch on to a few of the rules. *The rules of the game* are what we mean by *fundamental physics*. Even if we knew every rule, however, we might not be able to understand why a particular move is made in the game, merely because it is too complicated and our minds are limited. If you play chess you must know that it is easy to learn all the rules, and yet it is often very hard to select the best move or to understand why a player moves as he does. So it is in nature, only much more so; but we may be able at least to find all the rules. Actually, we do not have all the rules now. (every once in a while something like castling is going on that we still do not understand.) Aside from not knowing all of the rules, what we really can explain in terms of those rules is very limited, because almost all situations are so enormously complicated that we cannot follow the plays of the game using the rules, much less tell what is going to happen next. We must, therefore, limit ourselves to the more basic question of the rules of the game. If we know the rules, we consider that we "understand" the world.

(from *The Feynman Lectures On Physics*)

問1 第1パラグラフ(最初の段落)を和訳せよ。

問2 第2パラグラフで著者が述べている大意を300字程度に簡潔に述べよ。

[2] 各自の卒業研究について次の各問いに答えよ。

問 1 卒業研究の課題研究を 300 字程度の日本語で説明せよ。

問 2 上記の日本語を英訳せよ。

[3] 次の各英文を日本語に訳せよ。

- (1) English is not the language that has always been spoken in the British Isles, nor indeed is it the only language that is spoken there today. English was originally a foreign language imported by foreign invaders.
- (2) I have so often seen people in supermarkets, where there is very little that a child could break, and where anything he did break would hardly cost over a dollar, get all upset because he is touching or picking up the various things he sees. Why not? This is how he learns about them.
- (3) The United States became an independent country in 1776. Before that it was part of Great Britain. The people of the United States fought a war with the army which the king sent from England.
- (4) When we have a holiday in prospect, we make plans beforehand so that when the time comes we may know exactly where we want to go, and what we want to do. If we do not do that, the holiday finds us unprepared and the greater part of it is wasted.