2008 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門(物理)

2007 年 8 月 23 日

注意事項

1. すべての解答用紙(B4 白紙)の左上に受験番号を記入すること。
2. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
3. 解答用紙は片面のみ使用し，縦置き横書きで解答すること。
4. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
5. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

$\boxed{\text{I}}$ 以下の各問に答えよ。 (100 点)

図のように，ばね定数 k および c の 2 つのばねがその一端をそれぞれ点 A および B に固定され，点 P で連結されている。点 P には一端に質量 m の質点をつけた長さ l の伸び縮みしないひもが固定されている。ばねは，水平な直線 AB 方向のみに伸縮し，質点 m は直線 AB を含む鉛直面内を振動している。2 つのばねのつりあいの位置を O とし，O から P までの距離を X，鉛直方向とひものなす角を θ とする。重力加速度を g とし，ばねおよびひもの重さは無視できるものとする。また，点 P が O にあるときばねの変形はないものとする。

問 1　点 O を原点，水平方向に x 軸，鉛直下方に y 軸をとる。質点 m の位置 $\mathrm{Q}(x, y)$ の x および y 座標を求めよ。

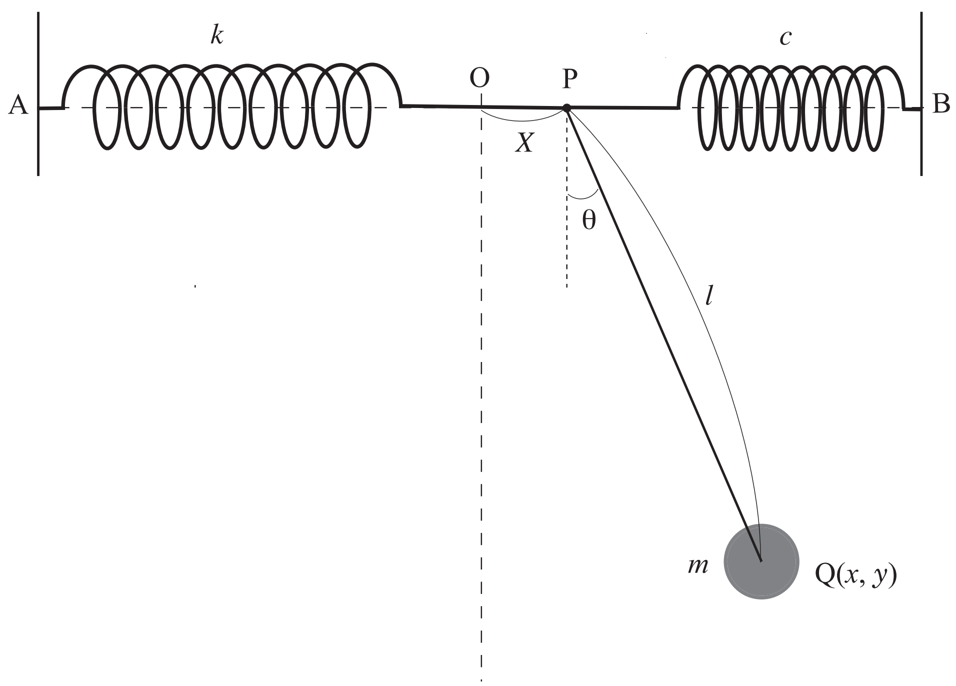
問 2　この系の運動エネルギー T を X および θ を用いて表せ。

問 3　この系の Lagrange 関数 L をかけ。

問 4　Lagrange の運動方程式をかけ。

問 5　θ は十分小さいとし，θ および $\dot{\theta}$ の 2 次以上の項は無視できるとする。$X = Ae^{i\omega t}$ および $\theta = Be^{i\omega t}$ とおいて，角振動数 ω を求めよ。

問 6　質点の周期を点 P が動かない場合と比較し，この質点の運動に等価な単振り子はどのようなものか説明せよ。



$\boxed{\text{II}}$ 以下の各問に答えよ。 (100 点)

問 1 下図のように，真空中に無限に長い導線と xy 平面上に置かれた縦 a，横 b の長方形の導体の回路 ABCD がある。無限に長い導線は y 軸上にあり，この導線には電流 I が y 軸の正の方向へ流れている。回路 ABCD は x の正の方向に速さ v で動いている。時刻 t のとき，導体 AB の x 座標が $X(X = vt)$ で与えられているものとする。また，真空中の透磁率を μ_0 とする。

(1) 回路 ABCD の中心位置の x 座標が x' のとき，中心位置での磁束密度の大きさ B とその向きを求めよ。

(2) 導体 AB の x 座標が X のとき，回路を貫く磁束 Φ を求めよ。

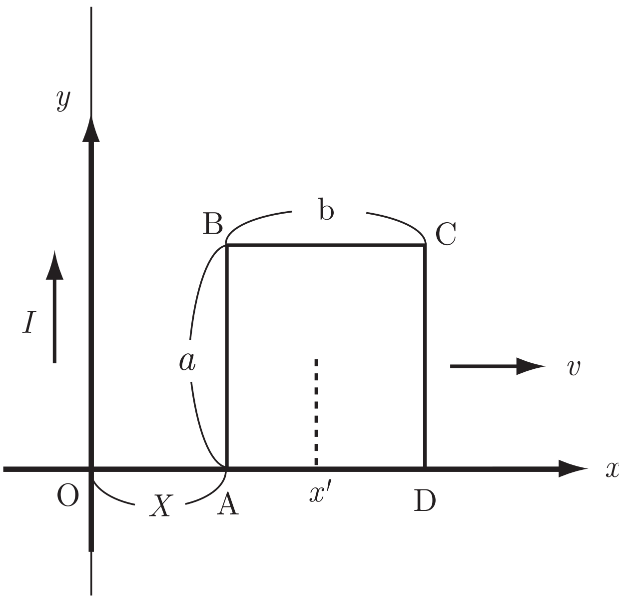
(3) このとき回路に発生する誘導起電力 V を求めよ。

(4) 回路の抵抗を R とするとき，回路を流れる電流 i とその向きを求めよ。

(5) 回路の導体中の電荷 q に働くローレンツ力の大きさ F とその向きを求めよ。

(6) 導体 AD と BC の部分においては，ローレンツ力による起電力は生じない。その理由を述べよ。

(7) 導体 AB と CD 中の電荷 q に働くローレンツ力を用いて，それぞれの導体に発生する誘導起電力 V_{AB} と V_{CD} を求めよ。また，回路全体の起電力 V が，(3) で求めた値と等しくなることを示せ。



問 2　下図のように，真空中に無限の導体があり，その導体の表面 S から距離 a の点 A に点電荷 $+q$ を置いた。ただし，導体の表面は y 軸と一致し，点 A$(a,0)$ は x 軸上にあるとする。また，真空中の誘電率を ϵ_0 とする。

(1) 導体の表面には負の電荷が誘起される。その理由を述べよ。

(2) 電気力線を図示せよ。

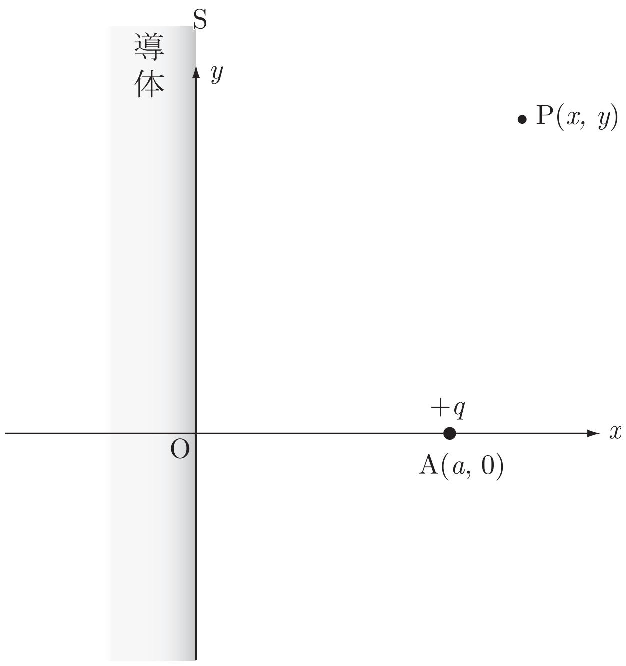
(3) この系の電場や電位を求めるとき，表面に誘起された負の電荷の代わりに，導体の表面 S に関する点 A の対称な点 B$(-a,0)$ に点電荷 $-q$ があるものとして考えることができる。その理由を述べよ。

(4) 点 P(x, y) での電位 ϕ を求めよ。

(5) 求めた電位 ϕ から x 軸方向の電場の大きさ E_x を計算せよ。

(6) 導体表面の電荷密度 σ と導体表面付近の電場 E の関係をガウスの法則から示せ。

(7) 求めた E_x の $x \to 0$ の極限から，導体表面の電荷密度 σ を求めよ。



III 質量mの粒子が１次元の空間内で力を受けないで運動している場合を考える。１次元シュレーディンガー方程式は波動関数$\psi(x,t)$を用いて，

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

で与えられる。ここで，$\hbar$はプランク定数を表す。以下の各問に答えよ。　(100 点)

問１　粒子の運動量p_xを用いて，古典力学におけるハミルトニアンHを書け。

問２　波動関数$\psi(x,t)$が比例定数をEとして，

$$\psi(x,t)=\phi(x)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right)$$

と表されるとき，$\phi(x)$が満たすシュレーディンガー方程式を書け。

問３　問２において，$\phi(x)$の満たす方程式の解を求めたところ，波動関数は

$$\psi(x,t)=\exp\left\{-i\left(\frac{E}{\hbar}t-\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)\right\}$$

で与えられた。この波動関数$\psi(x,t)$が１次元シュレーディンガー方程式を満足することを示せ。

問４　微小区間$[x,x+dx]$において，その中に粒子を見出す確率密度を求めよ。

問５　系の角振動数をω，波数をkとすると，波動関数は

$$\psi(x,t)=\exp\{-i(\omega t-kx)\}$$

で与えられる。このとき，

（１）比例定数Eを$m,\hbar,k$を用いて表せ。

（２）Eの物理的意味を述べよ。

問６　角振動数と波数の異なる２つの波

$$\psi_1(x,t)=\exp\{i(k_1x-\omega_1t)\},\quad \psi_2(x,t)=\exp\{i(k_2x-\omega_2t)\},\quad k_2>k_1>0$$

において，群速度vは$v=\dfrac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1}$であり，２つの波の位相速度$u_1$，$u_2$はそれぞれ$u_1=\dfrac{\omega_1}{k_1}$，$u_2=\dfrac{\omega_2}{k_2}$で与えられる。$u_2>u_1$を満たすとき，位相速度$u_1$，$u_2$よりも群速度$v$が常に大きいことを示せ。

問７　一般に，群速度v_Gは$v_G=\dfrac{d\omega}{dk}$で与えられる。このとき，$v_G=\dfrac{\hbar k}{m}$であることを示せ。

$\boxed{\text{IV}}$　比熱に関する以下の各問に答えよ。 (100 点)

問１　熱平衡状態を保った準静的な変化をする気体を考える。

(1) 熱力学の第 1 法則から, この系の熱量 Q の変化 $d'Q$ が次式で表されることを示せ。

$$d'Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right\} dV$$

ここで, T, V, P, U はそれぞれ温度, 体積, 圧力, 内部エネルギーである。

(2) (1) の結果を用いて, 定積変化における比熱 C_V を求めよ。

(3) 定圧変化における比熱 C_P が次式で表されることを示せ。

$$C_P = C_V + \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right\}\left(\frac{dV}{dT}\right)_P$$

(4) 1 モルの単原子理想気体を考えると, 気体定数を R として $U = \frac{3}{2}RT$ の関係がある。このとき, 定積比熱 C_V と定圧比熱 C_P はそれぞれ R の何倍の値となるか。

問２　体積 V の箱の中の N 個の区別できない自由粒子が温度 T の熱平衡状態にある。このとき, この系のハミルトニアン $\mathcal{H}$ は運動量 p_i を用いて $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_{3N}^2)$ で与えられる。ただし, m は自由粒子の質量である。

(1) この系の状態数 $W(E)$ が

$$W(E) = \frac{V^N C(N)}{h^{3N} N!}(\sqrt{2mE})^{3N}$$

で表されるとき, この系のエントロピー S を求めよ。ただし, E はこの系のエネルギー, $C(N)$ は N の関数, h はプランク定数である。また, ボルツマン定数を k_B とする。

(2) $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V$ を用いて, エネルギー E を温度の関数として求めよ。

(3) 比熱 C_V を求めよ。

(4) この系の分配関数 Z が次式で表されることを示せ。

$$Z = \frac{V^N}{h^{3N} N!}(\sqrt{2\pi m k_\mathrm{B} T})^{3N}$$

ここで, $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を用いてよい。

(5) この系の Helmholtz の自由エネルギー F を求めよ。

(6) $P = -(\frac{\partial F}{\partial V})_T$ を用いて, 状態方程式を求めよ。

(7) $E = k_\mathrm{B} T^2 (\frac{\partial \ln Z}{\partial T})$ を用いて, 比熱 C_V を求めよ。

(8) 問 1 の (4) で得られた定積比熱と問 2 の (7) で得られた比熱はどのような場合に等しくなるか述べよ。

2008 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2007 年 8 月 23 日

注意事項
1. すべての解答用紙(B4 白紙)の左上に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみ使用し，縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

$\boxed{\text{I}}$ 次の文章を読んで，以下の各問に答えよ。 (30 点)

Newton's theory of gravity was formulated to deal with a finite collection of bodies, the solar system. <u>However, problems arose when one tried to apply it to the whole universe: if the material content of the universe were finite, why did it not all fall together to make one big body? At the time, and indeed until the 1920s, no-one considered the possibility that the bodies in the universe could be moving systematically towards or away from each other.</u>(1) Newton therefore suggested that the universe contained an infinite number of bodies, uniformly distributed and at rest relative to each other, and that they would not fall towards each other because there would be no preferred point for condensation. This concept of an infinite, uniform and static universe raised a number of problems. First of all, the gravitational potential would be infinite, and the gravitational force on a body would not be well defined. In an attempt to overcome this difficulty it was suggested that the Newtonian law of attraction should be weakened at large distances. This could be done by adding a 'cosmological term' to Poisson's equation

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho + \Lambda\Phi$$

where Φ is the gravitational potential, Λ is the 'cosmological constant' and ρ the material density. <u>Another problem, first pointed out by Halley, later Olbers, and nowadays referred to as 'Olbers' paradox', was that if the universe had existed in its present state for an infinite time, almost every line of sight would end on the surface of a star, and therefore the sky ought to be as bright as the surface of the sun.</u>(2) Because of the finite velocity of light, this difficulty could be overcome by postulating that the stars had been in their fixed positions for ever, but that they had begun to shine only at some finite time in the past. However, it was not clear why they should suddenly have started to shine after all that time.

(GENERAL RELATIVITY An Einstein Centenary Survey ed. By S.W. Hawking & W. Israel, Chapter 1 より抜粋。)

問1　下線部 (1) を代名詞の内容も含めて和訳せよ。

問2　下線部 (2) を和訳せよ。

問3　Newton が提案した宇宙モデルは，______, ______, ______ な宇宙として特徴付けることが出来る。これらの 3 つの英単語を本文より抜き出せ。また，それらの日本語訳を書け。

II 次の文章を読んで，以下の各問に答えよ。参考のために，文章の最後にいくつかの単語の意味が説明してある。 (30 点)

João came to me often with this problem. I always made time to talk with him, because I was attracted by his energy and his fresh way of seeing physics. But for many months, I didn't think very hard about what he was saying. The turning point came when he showed me an old book in which the problem was discussed. It was a text-book on general relativity by a famous Russian mathematical physicist named Vladimir Fock. I knew some of Fock's work in quantum field theory (all physicists do), but I had never seen his book on relativity. The problem João was trying to get me to think about was a homework problem in Fock's book. Once I saw it, I recalled my idea from ten years earlier, and the whole thing came together. The key was indeed to keep the principles of Einstein's special theory but to change the rules so that all observers agree that both the speed of light *and* the Planck scale are universal. (1) Actually, the speed that is constant is no longer the speed of all photons, only very low-energy ones.

At first we didn't see what to do with this idea. We had a story, with some pieces of the math, but not yet a full a theory. At about this time, I went on a trip that included a stop in Rome, where I spent many hours talking with Giovanni Amelino-Camelia. All of a sudden I understood what he was saying. He had come to the same idea we were developing, and he had come to it earlier and worked it out first. Nevertheless, there was a lot about the way he had worked out the idea that I didn't understand. The math seemed complicated, and it appeared to be tied to a formalism invented some ten years earlier by a group of Polish mathematical physicists – a formalism that I certainly couldn't penetrate.

It would take me many years to appreciate the mathematical subtleties of the subject. I found it impenetrable until I started reading early papers by an English mathematician named Shahn Majid, who was one of the inventors of quantum groups. His work was closely related to the mathematics the Polish group was using. Majid had begun with some visionary ideas about how to express the essential insights of relativity and quantum theory in a single mathematical structure. This had led him to quantum groups (which are a revolutionary extension of the idea of a symmetry) and then to modifications of relativity theory based on a subject we call noncommutative geometry. His insights are at the core of the mathematics required to express DSR (2) clearly, but they were lost – at least, to me – in the complicated papers where I had first seen them expressed.

In any case, João and I ignored mathematics and kept talking about physics. Our progress was interrupted by my move to Canada, to the newly founded Perimeter Institute, in September of 2001. A month later, João came to Perimeter as its second visitor. The theory finally fell into place the afternoon after he arrived. We were working in a café in uptown Waterloo called the Symposium, with comfortable couches. He was jetlagged. I was traumatized and exhausted, having just returned from a weekend in New York following the events of September 11. I fell asleep as João was talking, then woke up to find him dozing.(3) I remembered something he had said as I was losing consciousness, and I played with it on a pad, then fell asleep again. I woke up when he started talking and we had a few mutually lucid minutes before he fell asleep again. And so the afternoon went, as we talked, calculated, and dozed(3) in turn. I can only imagine what the café staff thought. But at some point during that afternoon, we hit on a key factor that had evaded us for months, having to do with trading momenta for positions. When we were done, we had invented a second version of DSR, much simpler than the one developed by Giovanni Amelino-Camelia. Now it is known to experts as DSR II.

This was roughly what João had wanted. In our version, photons that have more energy travel faster. Thus, in the very early universe, when the temperature was very high, the speed of light was, on average, faster than it is now. As you go farther back in time and the temperature approaches the Planck energy, the speed of light becomes infinite. It took somewhat longer to show that this led to a version of a variable-speed-of-light theory that was also consistent with the principles of general relativity, but we eventually got there, too. We call this theory *Gravity's Rainbow*, after Thomas Pynchon's novel.(4)

"Doubly special relativity" is a stupid name, but it has stuck. The idea is an elegant one, by now much studied and discussed. We don't know whether it describes nature, but we know enough about it to know that it could.(5)

The first responses to DSR were not encouraging. Some people said it was inconsistent; others said it was nothing more than a very complicated way of writing Einstein's special relativity theory. A few people made both criticisms.
(THE TROUBLE WITH PHYSICS written by Lee Smolin より抜粋。)

註) João, Vladimir Fock, Giovanni Amelino-Camelia, Shahn Majid は人名。
noncommutative geometry – 非可換幾何学。

問1　下線部 (1) を和訳せよ。
問2　下線部 (2) DSR とは何の略であるか，本文より抜き出せ。
問3　下線部 (3) doze に最も意味の近い単語または熟語を本文より抜き出せ。
問4　下線部 (4) で本文の著者と共同研究者らが新たに考案した理論を *Gravity's Rainbow* 理論と呼ぶようになった理由は何だと考えられるか，簡単に説明せよ。
問5　下線部 (5) を和訳せよ。
問6　本文の著者と共同研究者らが新たに考案した理論を定式化するのに必要な数学はどのようなものとして説明されているか書け。

III　大学での物理学に関する講義や実験で印象に残った内容について，150 語程度の英文で書け。(20 点)

IV　次の文章を英訳せよ。(20 点)

巨視的な世界の不可逆性と物理法則の時間対称性との間のパラドクスについて，初めて説得力のある説明を与えた人はオーストリア人の物理学者 Ludwig Boltzmann であった。Boltzmann の名声は，科学に対する二つの基本的な貢献と結び付けられている。第一の貢献は，「エントロピー」を原子の無秩序さについての数学的に正しく定義された測定基準と解釈したことである。第二の貢献は，いまでは Boltzmann 方程式として知られている，気体の統計的性質を記述する方程式を導いたことである。

註) 巨視的な – macroscopic.　不可逆性 – irreversibility.
時間対称性 – time symmetry.　統計的 – statistical.