

2007 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門（物理）

2007 年 2 月 19 日

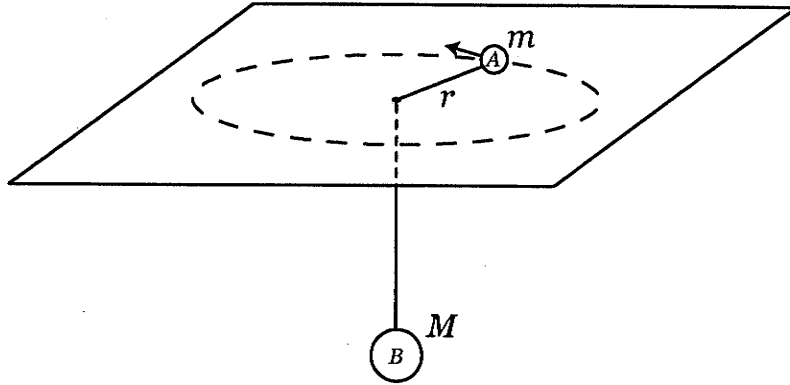
注意事項

1. すべての解答用紙（B4 白紙）の左上に受験番号を記入すること。
2. 大問毎に別々の解答用紙を使用すること。
3. 解答用紙は片面のみ使用し、縦置き横書きで解答すること。
4. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
5. 問題冊子は、各自持ち帰ること。

I

図のように質量 m の質点 A を、なめらかで水平な板の上に置き、板上の小さな穴に通した長さ l の糸の一端に A を取り付ける。糸の他端に質量 M の質点 B を取り付け、図のように吊り下げる。質点 A が回転運動をし、質点 B は鉛直方向のみ運動をする場合、以下の各問に答えよ。ただし、摩擦と糸の質量は無視できるものとし、重力加速度は g とする。

(100 点)



- 問 1. この系のラグランジアン L を極座標 (r, θ) で示し、ラグランジュの運動方程式を導出せよ。ただし、板上の糸の長さは r 、質点 A の回転角を θ とする。
- 問 2. 質点 A が半径 R の等速円運動をし、質点 B が静止しているとするとき、A の角速度を求めよ。
- 問 3. このとき、質点 A の回転中心まわりの慣性モーメント I の大きさと、それに働く力のモーメントの大きさ N を求めよ。また、この系で角運動量が保存されることを示せ。
- 問 4. 質点 B を引っ張って、質点 A の回転半径を $\frac{R}{2}$ にしたとき、A の角速度を求めよ。
- 問 5. 質点 A の回転半径を $\frac{R}{2}$ にしたときの張力を求めよ。
- 問 6. 回転半径が R から $\frac{R}{2}$ になるときに、質点 A になされた仕事を求めよ。

Ⅱ 以下の各問に答えよ。

(100 点)

問1 原点 O を中心とする半径 a の球面上で一様に電荷が分布している。電荷量を Q 、誘電率を ϵ_0 とする。

- (1) 球の外側での電場の方向は、どうなるか。また、なぜそうなるか。
- (2) 球の外側での電場の大きさを求めよ。
- (3) 球の内側での電場の大きさを求めよ。また、電場の方向はどうなるか。
- (4) 無限遠方を電位の基準点 (電位 0) としたとき、球の外側での電位を求めよ。
- (5) 球の内側での電位を求めよ。
- (6) 球を接地したとき、球の内外での電位を求めよ。

問2 誘電率 ϵ_1 の物質 1 と誘電率 ϵ_2 の物質 2 とが平面を境に接している。それぞれの物質中の電気力線が境界面の法線方向となす角を θ_1, θ_2 とする。境界面上に真電荷は存在しないとする。また、物質 1 での電場と電束密度をそれぞれ E_1, D_1 、物質 2 での電場と電束密度をそれぞれ E_2, D_2 とする。

- (1) 境界面での電場 E_1 と E_2 の間には、どのような関係が成り立つか。
- (2) 境界面での電束密度 D_1 と D_2 の間には、どのような関係が成り立つか。
- (3) $\tan\theta_2/\tan\theta_1$ を求めよ。

問3 透磁率 μ_1 の物質 1 と透磁率 μ_2 の物質 2 とが平面を境にして接している。それぞれの物質中の磁束線が境界面の法線となす角をそれぞれ θ_1, θ_2 とする。また、物質 1 での磁場と磁束密度をそれぞれ H_1, B_1 、物質 2 での磁場と磁束密度をそれぞれ H_2, B_2 とする。

- (1) 境界面での磁場 H_1 と H_2 の間には、どのような関係が成り立つか。
- (2) 境界面での磁束密度 B_1 と B_2 の間には、どのような関係が成り立つか。
- (3) $\mu_1, \mu_2, \theta_1, \theta_2$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

III 以下の各問に答えよ.

(100 点)

問1 質量 m の 1 次元粒子が角振動数 ω_0 の調和振動子ポテンシャル $U(x) = m\omega_0^2 x^2/2$ の中で運動している. このときのハミルトニアンは

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x)$$

で与えられる. 基底状態の波動関数が $\phi(x) = Ne^{-\alpha^2 x^2/2}$ (N は規格化定数) で与えられるとして α の値と基底状態のエネルギー固有値 E_0 を求めよ.

問2 古典力学ではこの系の最低エネルギー E_0 は 0 である. 量子力学では E_0 が 0 より大きくなるのはなぜか, その物理的な理由を述べよ.

問3 次に原点の両側 $x = \pm a$ に最小値を持つポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega_0^2(x+a)^2 & (x < 0) \\ \frac{1}{2}m\omega_0^2(x-a)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

の中の粒子の運動を考える. この時のハミルトニアンを H とする. 問1 で求めた基底状態 $\phi(x)$ はもはやこの系の固有状態とはなり得ない. そこで, エネルギー固有状態が $\phi(x \pm a)$ の重ね合わせ

$$\psi(x) = c_1\phi(x+a) + c_2\phi(x-a)$$

で表せるとする. これをシュレディンガーエネルギー固有値方程式 $H\psi = E\psi$ へ代入して, c_1 と c_2 についての方程式になおすと

$$\begin{pmatrix} E - E_0 & \frac{1}{2}\Delta E \\ \frac{1}{2}\Delta E & E - E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

となることを示せ. 但し,

$$\begin{aligned} \int \phi(x+a)H\phi(x+a)dx &= \int \phi(x-a)H\phi(x-a)dx \approx E_0 \\ \int \phi(x+a)H\phi(x-a)dx &= \int \phi(x-a)H\phi(x+a)dx = -\frac{1}{2}\Delta E \\ \int \phi(x+a)\phi(x-a)dx &\approx 0 \end{aligned}$$

とし, $\Delta E \ll E_0$ とする.

問4 前問で求めた行列の固有値方程式を解いて, 固有値 E と固有ベクトル (c_1, c_2) を求めよ.

問5 問4 で求めた粒子の最低エネルギーと第1励起状態のエネルギー差が 1.0×10^{-4} eV であるとし, 粒子が電荷をもっているとする. 電磁波をあてて基底状態から第1励起状態へ励起させるときに吸収される電磁波の振動数は何 Hz か, 光子と粒子のエネルギー保存法則を用いて求めよ. 但し, $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$, プランク定数は $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ である.

IV

以下の各問に答えよ.

(100点)

問1 次の2つの条件を満たす1モルの理想気体を考える.

①状態方程式が $pV = RT$ で与えられる.

②定積熱容量 C_V は一定値である.

(1)内部エネルギー U の全微分を, エントロピー S と体積 V を独立変数として表せ.

(2)理想気体の内部エネルギーは温度と体積の関数と考えたとき, 体積に依存しない

こと, すなわち, Joule の法則 $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$ を導け.

(3)今の場合, エントロピーの全微分は, 温度と体積を独立変数とした場合,

$$dS = \frac{C_V}{T} dT + \frac{p}{T} dV$$

で与えられる. 状態方程式を利用して, 温度と圧力を独立変数とした場合のエントロピーの全微分を導け. この全微分の式から, Mayer の式 $C_p = C_V + R$ を導け.

(4)断熱過程の場合には,

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.}$$

が成立することを導け. ただし, $\gamma = C_p/C_V$ である.

必要なら, マクスウェルの関係式 $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ を使ってもよい.

問2 N 個の独立な粒子から成る系がある. おのおのの粒子は, $-\varepsilon_0, \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 > 0$) の2つのエネルギー状態しかとり得ないとする. この系をカノニカル分布の方法で取り扱い, 以下の問いに答えよ.

(1)系の分配関数 Z を求めよ.

(2)ヘルムホルツの自由エネルギー F を求め, さらに内部エネルギー U と熱容量 C を求めよ.

(3)内部エネルギー U と熱容量 C の $T \rightarrow 0$ と $T \rightarrow \infty$ での温度依存性を求めよ.

(4)内部エネルギー U がそれぞれの極限で(3)で求めたような振る舞いをする理由を直観的に説明せよ.

2007 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2007 年 2 月 19 日

注意事項

1. すべての解答用紙（B4 白紙）の左上に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみ使用し，縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I 次の文章を読んで、以下の問いに答えなさい。(20 点)

A profound change has taken place during the present century in the opinions physicists have held on the mathematical foundations of their subject. Previously they supposed that the principles of Newtonian mechanics would provide the basis for the description of the whole of physical phenomena and that all the theoretical physicist had to do was suitably to develop and apply these principles. With the recognition that there is no logical reason why Newtonian and other classical principles should be valid outside the domains in which they have been experimentally verified has come the realization that departures from these principles are indeed necessary. Such departures find their expression through the introduction of new mathematical formalisms, new schemes of axioms and rules of manipulation, into the methods of theoretical physics⁽¹⁾.

Quantum mechanics provides a good example of the new ideas. It requires the states of a dynamical system and the dynamical variables to be interconnected in quite strange ways that are unintelligible from the classical standpoint. The states and dynamical variables have to be represented by mathematical quantities of different natures from those ordinarily used in physics. The new scheme becomes a precise physical theory when all the axioms and rules of manipulation governing the mathematical quantities are specified and when in addition certain laws are laid down connecting physical facts with the mathematical formalism, so that from any given physical conditions equations between the mathematical quantities may be inferred and vice versa⁽²⁾. In an application of the theory one would be given certain physical information, which one would proceed to express by equations between the mathematical quantities. One would then deduce new equations with the help of the axioms and rules of manipulation and would conclude by interpreting these new equations as physical conditions. The justification for the whole scheme depends, apart from internal consistency, on the agreement of the final results with experiment. (*"The principles of quantum mechanics"*, P.A.M. Dirac)

問 1. 下線部 (1) を和訳しなさい。

問 2. 下線部 (2) を和訳しなさい。

問 3. この文章に内容を反映したタイトルをつけるとしたら、次の 4 つのうち
のどれになるか。一つ選び、番号を書きなさい。

① Quantum mechanics

② Mathematical formulation of the principle

- ③ Scientific revolution
④ The role of experiment in theoretical physics

【I I】 次の文章を読んで、以下の問いに答えなさい。但し、参考のために、文章の最後にいくつかの単語の意味が与えられてある。(40 点)

I have just come from a year of postdoctoral work in Berkeley to be an assistant professor in the Belfer School. The exotic Yeshiva buildings didn't look anything like the Berkeley or Harvard campus, or any other campus for that matter. Finding the Physics Department would be a challenge. A bearded fellow on the street directed me toward the top of one building, where there was a turret or onion dome of some kind. This didn't look promising, but it was the only job I had, so I entered and climbed the spiral staircase (1). At the top was an open door to a very small, dark office containing a massive bookcase filled with large, leather-bound volumes, all of whose titles were written in Hebrew. In the office sat a rabbinical-looking, gray-bearded gentleman reading some ancient tome. The sign said:

Physics Department

Professor Posner

"Is this the Physics Department?" I asked, uncomprehendingly.

"Yes, it is", he said, "and I am the physics professor. Who are you?"

"I'm the new guy, the new assistant professor, Susskind." A kindly but very puzzled look came

over his face.

"Oy vey, they never tell me anything. What new guy?"

"Is the chairman here?" I sputtered.

"I am the chairman. In fact I am the only physics professor, and I don't know anything about a new guy." At that time I was twenty-six years old with a wife and two small children, and it was beginning to look like I might be unemployed (2).

Confused and embarrassed, I slunk out of the building and started to cross the street, when I saw a guy I knew from college named Gary Gruber. "Hey Gruber, what's going on here? I just came from the Physics Department. I thought it was full of physicists, but there seems to be only an old rabbi named Posner."

Gruber found this much more amusing than I did (3). He laughed and said, "I think you probably want the graduate department, not the undergraduate. It's around the corner on One hundred eighty-fourth Street. I'm a graduate student there." Sweet relief!

I walked over to 184th and looked on the side of the street that Gruber had indicated, but I could see nothing that looked like a graduate school of science. The street was just a row of seedy-looking storefronts. One of them advertised: "Abogado –Bail Bonds." Another was empty and boarded up. The biggest storefront was an establishment of the kind that caters bar mitzvahs and Jewish weddings. It looked like it was no longer in business, but a small establishment that prepared kosher food was still in the basement. I passed it once, but on the second pass, I looked a little closer. Sure enough, a small sign next to the caterer's said:

Belfer Graduate School

and pointed up a broad flight of stairs. The stairs had an old stained and worn carpet, and from the lower floor the smell of food floated up. I wasn't sure if I liked the look of this place any better than the last (4) . I climbed up to a big room that I could see was once a ballroom for weddings and bar mitzvahs. Now it was a large space with sofas, comfortable chairs, and much to my relief, blackboards. Blackboards meant physicists.

Surrounding the space were about twenty offices. The entire school was housed in this one-time ballroom. It would have been very depressing except that several people were having a lively physics conversation at one of the boards. What's more, I recognized some of them. I saw Dave Finkelstein, who had arranged my new job. Dave was a charismatic and brilliant theoretical physicist who had just written a paper on the use of topology in quantum field theory that was to become a classic of theoretical physics. I also saw P. A. M. Dirac, arguably the greatest theoretical physicist of the twentieth century after Einstein. Dave introduced me to Yakir Aharonov, whose discovery of the Aharonov-Bohm effect had made him famous. He was talking to Roger Penrose, who is now Sir Roger. Roger and Dave were two of the most important pioneers in the theory of black holes. I saw an open door with a sign that said Joel Lebowitz. Joel, a very well-known mathematical physicist, was arguing with Elliot Lieb, whose name was also familiar. It was the most brilliant collection of physicists that I had ever seen assembled in one place (5) .

They were talking about vacuum energy. Dave was arguing that the vacuum was full of zero-point energy and that this energy ought to affect the gravitational field. Dirac didn't like vacuum energy because whenever physicists tried to calculate its magnitude, the answer would come out infinite. He thought that if it came out infinite, the mathematics must be wrong and that the right answer is that there is no vacuum energy. Dave pulled me into the conversation, explaining as he went. For me this conversation was a fateful turning point – my introduction to a problem that would

obsess me for almost forty years and that eventually led to *The Cosmic Landscape*.
("The cosmic landscape", L. Susskind)

注. turret=小塔、tome=本、chairman=学科長、seedy-looking=みすばらしい、bar mitzvah=(ユダヤ教の)成人式、topology=位相幾何学、quantum field theory=場の量子論

- 問1. 下線部(1)を和訳しなさい。
問2. 下線部(2)で、著者の Susskind は助手として採用されていないのではと心配しているが、そのような気持ちになった理由を簡単に書きなさい。
問3. 下線部(3)で、Gruber は Susskind の現状を面白がっているが、それはどうしてか、簡単に説明しなさい。
問4. 下線部(4)を和訳しなさい。
問5. Belfer 大学院の建物は元は何の建物だったのか、答えなさい。
問6. 本文を読んで、Dave Finkelstein とはどのような人であることがわかるか、簡単に説明しなさい。
問7. 下線部(5)を和訳しなさい。
問8. 本文から Dirac は当時、真空のエネルギーのことが好きではなかったことがわかる。当時、Dirac は真空のエネルギーについて、どうなけばならないと考えていたか、簡潔に書きなさい。

III 大学院に進学した後に、自分が研究したいと思うことを、100語以内で書きなさい。(20点)

IV 次の文章を英訳しなさい。(20点)

「実は彼がどこでそのひらめきを得たのか誰も知らない。それはあたかも隠された記憶、あるいは秘められた情熱みたいなものだった。それにも拘らず、彼の思考のスタイルには明らかに日本の文化の影響があったことは間違いない。科学者の潜在意識(subconsciousness)を理解するうえで、具体的に日本文化のどのような面が彼に強い影響を与えたかを調べてみることは価値がある。」