

琉球大学大学院理工学研究科

博士前期課程

物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題

専門

2008年度二次募集

2008年2月19日実施

- ①すべての解答用紙に受験番号を記入のこと。
- ②問題ごとに別々の解答用紙を用いること。
- ③解答用紙は片面のみ使用、縦置き横書き。
- ④用紙が足りない場合は監督官に請求すること。
- ⑤問題冊子は持ち帰ること。

I 以下の各問に答えよ.

(100 点)

図のように、軸が鉛直で頂点が下に向いている円錐がある。質量 m の質点が円錐の内側の面上を運動している。半頂角を α 、重力加速度を g 、円錐の内側と質点の摩擦はないとする。

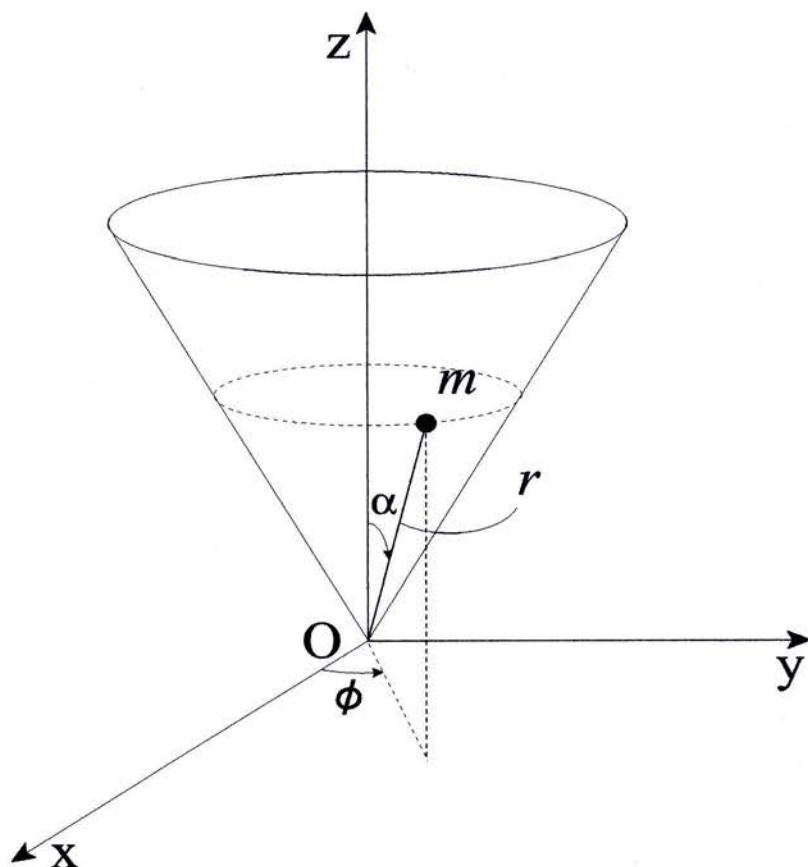
問 1. 頂点 O を原点とし、軸に沿って上向きに z 軸、水平面内で x, y 軸をとる。質点の位置 (x, y, z) を極座標 $(r, \theta = \alpha, \phi)$ で表せ。

問 2. この系の運動エネルギー T と位置エネルギー U を、 r, ϕ, α などを用いて表せ。

問 3. この系の Lagrange 関数 L を、 r, ϕ, α などを用いて書け。

問 4. Lagrange の運動方程式を書け。

問 5. 質点が一定の高さで水平な円周上をまわるための初期条件として、初速度 v_0 を求めよ。また、質点を打ち出す向きを答えよ。

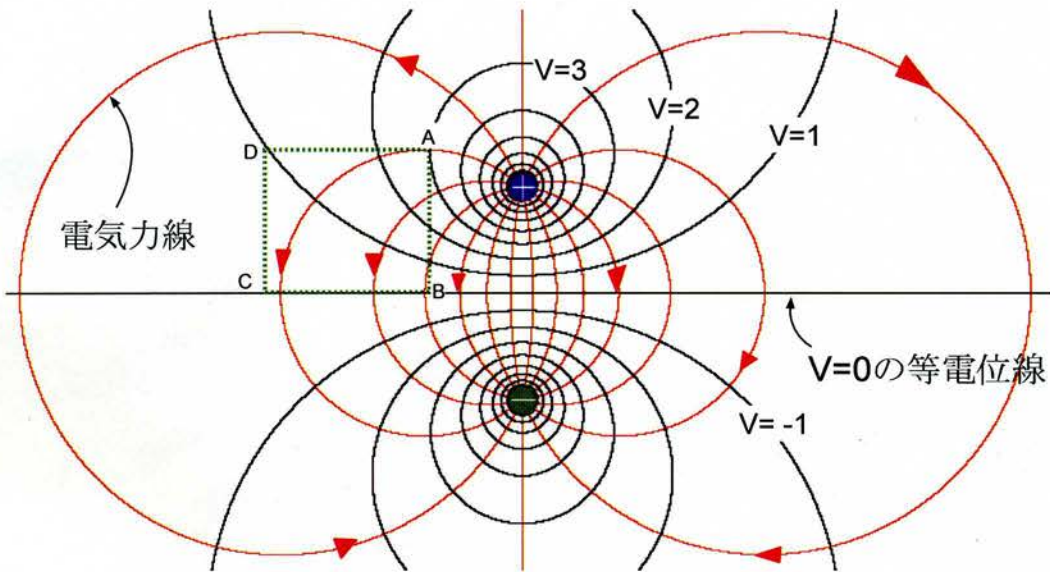


II 以下の各問に答えよ。

(100 点)

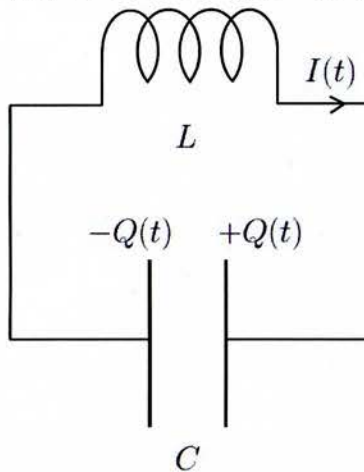
問 1 Maxwell 方程式 4 つ（微分形でも積分形でもよい）を書き下し、それぞれの物理的意味を述べよ。

問 2 図のように配置された電荷がある。図の曲線は電場・電位を表現する電磁力線と等電位線である。図中の $V = \dots$ は、その線上の電位の値（単位はボルト）を示している。



- (1) 等電位線と電磁力線は互いに垂直であるが、そうなる理由は何か？
- (2) 小さな点電荷（電気量 $q[\text{C}]$ ）が、図の A 点から B 点まで移動した。このとき、電場のした仕事はどれだけか？
- (3) この電荷が A 点 \rightarrow B 点 \rightarrow C 点 \rightarrow D 点 \rightarrow A 点と一周した時、電場のした仕事はどれだけか。また、そのような値になることは、Maxwell 方程式のうち、どの方程式が関係しているかを説明せよ。

問 3 自己インダクタンス L のコイルと、静電容量 C のコンデンサを使って図のような回路を作った。



最初、コンデンサに電荷 Q_0 が溜められ、回路は開いた状態にあった。スイッチを入れて回路を閉じた後、時間が t だけ経過した後、回路を流れる電流が $I(t)$ 、コンデンサに溜まる電荷が $Q(t)$ になっていたとする ($I(t), Q(t)$ の符号は図のようにとる)。導線の抵抗は無視する。

- (1) 電荷の保存則からくる、 $I(t)$ と $Q(t)$ の関係式を作れ。
- (2) キルヒホッフの法則からくる、 $I(t)$ と $Q(t)$ の関係式を作れ。
- (3) 以上の二式を解いて、 $Q(t) = Q_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}$ という解を求める過程を示せ。
- (4) コイルの持つエネルギーとコンデンサの持つエネルギーの和が一定になることを示せ。

III 以下の各問に答えよ。

(100 点)

問 1 質量 m の粒子が一次元ポテンシャル $V(x)$ の中で運動している。

- (1) 波動関数 $\psi(x, t)$ の満たすシュレーディンガー方程式を書け。
- (2) $|\psi(x, t)|^2$ の物理的意味を述べよ。ただし, $\psi(x, t)$ は規格化された波動関数である。
- (3) 波動関数が $\psi(x, t) = u(x)e^{-iEt/\hbar}$ とおける場合, $u(x)$ の満たす時間に依存しないシュレーディンガー方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) u(x) = Eu(x)$$

と書けることを示せ。

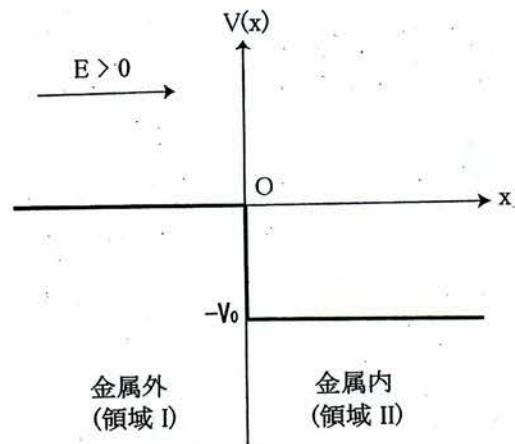
問 2 金属中の伝導電子は金属内ではほぼ自由に運動できるが, 光電効果に見られるように, 金属外に出るときには一定のエネルギー (仕事関数) を必要とする。この状況は, 図のような簡単なポテンシャル $V(x)$ のモデルで表される。金属の外 (領域 I, $x < 0$, $V(x) = 0$) から金属 (領域 II, $x > 0$, $V(x) = -V_0 < 0$) に垂直に入射する電子の振舞いを調べるために, 図のように, 左からエネルギー E ($E > 0$) を持つ電子が入射する場合を考える。

- (1) 波動関数を $\psi(x, t) = u(x)e^{-iEt/\hbar}$ とおき, 領域 I と領域 II における $u(x)$ の満たすシュレーディンガー方程式を書け。
- (2) 領域 I のシュレーディンガー方程式の解が

$$u_1(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx},$$

$$k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$$

で与えられることを示せ。ここで, A_1 , A_2 は複素定数である。右辺第 1 項は入射波, 第 2 項は反射波を表す。



- (3) 領域 II のシュレーディンガー方程式の解が

$$u_2(x) = A_3 e^{ik'x} + A_4 e^{-ik'x}, \quad k' = \sqrt{2m(E + V_0)/\hbar^2}$$

で与えられることを示せ。ここで, A_3 , A_4 は複素定数である。右辺第 1 項は透過波である。ここで, $A_4 = 0$ とおく必要がある。その理由を述べよ。

- (4) 係数 A_1 , A_2 , A_3 の間の関係は $x = 0$ において波動関数がなめらかにつながる条件, すなわち, $u_1(0) = u_2(0)$, $du_1(0)/dx = du_2(0)/dx$ から求められる。 A_2/A_1 と A_3/A_1 を求めよ。
- (5) 入射波と透過波の確率の流れの密度は, それぞれ $S_1(x, t) = (\hbar k/m)|A_1|^2$, $S_3(x, t) = (\hbar k'/m)|A_3|^2$ で与えられる。これから, 透過率 $T = S_3(x, t)/S_1(x, t)$ は

$$T = \frac{4kk'}{(k + k')^2}$$

となることを示し, さらに T をエネルギー E の関数として表せ。入射波のエネルギー E がポテンシャルの深さ V_0 に比較して十分大きいとき, 逆に, E に比較して V_0 が十分大きいとき, 透過率はどうかを述べよ。

- (6) 透過率 T について, 古典力学に従う粒子と量子力学に従う粒子の間にどのような違いがあるか。

IV 以下の各問に答えよ。

(100 点)

問1 熱力学の第一法則 ($dU = -PdV + dQ$) によると、気体の内部エネルギーの変化は気体になされた仕事と気体に加えられた熱エネルギーの和で表される。

気体の内部エネルギーの変化を調べるため、図1のようにピストンAに圧力 P_1 、ピストンCに圧力 P_2 ($P_1 > P_2$ とする) を加え続け、体積 V_1 (内部エネルギー U_1) の気体を準静的に圧縮し体積を変化させる実験を行った (ジュール-トムソンの実験)。このとき気体分子は細孔のある隔壁Bを準静的に通過し下図のように右室に移り、体積 V_2 (内部エネルギー U_2) に変化した。ただし、気体と外部との熱の出入りは無く、ピストンとシリンダーとの摩擦抵抗は無視できるものとする。

(1) 図1の過程は断熱過程の準静的変化である。準静的変化とはどのような変化か、断熱過程とはどのような過程かそれぞれ説明せよ。

(2) 図1の断熱過程において、ピストンA, Cが気体にした全仕事 W を圧力 (P_1, P_2) と体積 (V_1, V_2) で表せ。

(3) 図1の断熱過程において、気体の内部エネルギーの変化と気体になされた全仕事の関係を求めよ。

(4) 温度 T 、体積 V の気体の内部エネルギーは $U(T, V)$ で表される。状態方程式 $PV = RT$ (R は気体定数) で表される理想気体について図1のジュール-トムソンの実験を行ったところ温度 T は変化が無かった。この場合、内部エネルギー U_1 と U_2 の関係を書け。またこの関係から明らかになる理想気体の内部エネルギーの性質について述べよ。

(5) 図2の2つの曲線 a, b は理想気体の断熱変化、または等温変化のどれかを表している。図1下図の理想気体を、ピストンAを固定してピストンCで V_2 から V_3 になるまで断熱圧縮した。この場合の状態変化を示す曲線として適当なものは図2の a, b のどちらであるか答えよ。またその理由を説明せよ。

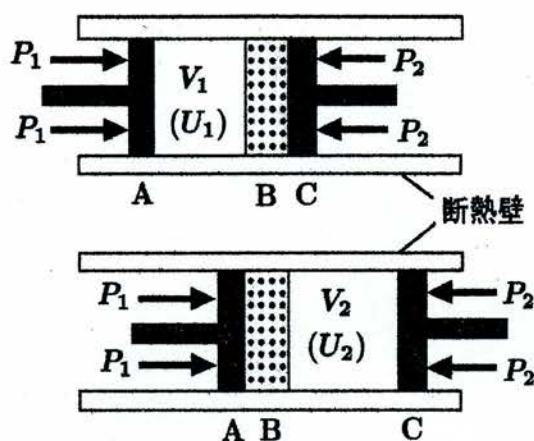


図1: ジュール-トムソンの実験

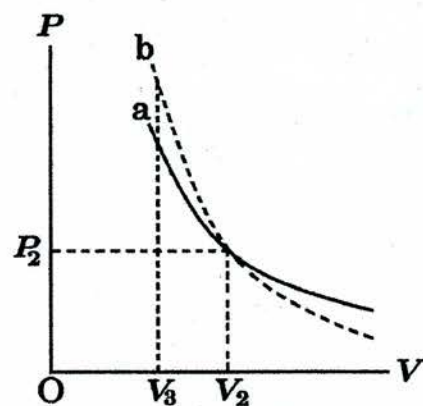


図2: 理想気体の圧力 - 体積変化

問2 正準集合の統計平均について次の各問に答えよ。

(1) 1つの系がエネルギー E_j の状態を占める確率は $p_j = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E_j)$ で表される。ここで $\beta = 1/k_B T$ を表し、 Z は分配関数と呼ばれている。確率 p_j の考えから分配関数 Z を求めよ。

(2) 系の平均エネルギー $\langle E \rangle = \sum_j E_j p_j$ を求める式を $\log Z$ を用いて表せ。

琉球大学大学院理工学研究科

博士前期課程

物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題

英語

2008年度二次募集

2008年2月19日実施

- ①すべての解答用紙に受験番号を記入のこと。
- ②解答用紙は片面のみ使用、縦置き横書き。
- ③用紙が足りない場合は監督官に請求すること。
- ④問題冊子は持ち帰ること。

問題文はAAPPS 17 (No.7) (2007)2- (Association of Asia Pacific Societies17巻 (2007年) 第6号2ページから)に掲載された記事の一部である。

1. 棒線1を施した部分(1)、(2)、(3)を和訳せよ。
2. 棒線2を施した部分(4)を和訳せよ。
3. Fig.2の説明文(棒線3を施した部分(5)、(6))を和訳せよ。
4. 「magnetoresistance」とはどういう現象かまず日本語で説明し、次に英語でそれを記述せよ。さらに「negative magnetoresistance」とはどういうことか？日本語と英語で説明せよ。
5. 抵抗の変化が何故生じるのか？それは、磁場を増加させて行くと、magnetic layerの磁化状態が変化することが背後の現象として引き起こされる。電子がmagnetic layerから隣のmagnetic layerへ移動するときに、磁化の状態により移動のし易さが変化し、それが試料の抵抗変化となる。

Fig.2 左側の測定図について
次の間に答えよ。

- (1) ゼロ磁場のときの各 magnetic layer の磁化状態を図示せよ。
- (2) 磁場の充分強いときの各 magnetic layer の磁化状態を図示せよ。
- (3) 測定図を読みとり、どこで磁化状態の変化が起こるか詳細に答えよ。

(日本語で可)

単語の意味

increase :	(n) 増加、増進
diminution :	(n) 減少、縮小
spin-orbit coupling	スピン-軌道結合

The 2007 Nobel Prize in Physics

The Discovery of Giant Magnetoresistance

Compiled by the Class for Physics of the Royal Swedish Academy of Sciences

The Royal Swedish Academy of Sciences
(Kungl. Vetenskapsakademien)
Information Department
P. O. Box 50005
SE-104 05 Stockholm, Sweden
E-mail: info@kva.se
Website: www.kva.se

1. INTRODUCTION

The phenomenon called **magnetoresistance** (MR) is the change of resistance of a conductor when it is placed in an external magnetic field. For ferromagnets like iron, cobalt and nickel this property will also depend on the direction of the external field relative to the direction of the current through the magnet. Exactly 150 years ago W. Thomson [1] (Lord Kelvin) measured the behaviour of the resistance of iron and nickel in the presence of a magnetic field. He wrote "*I found that iron, when subjected to a magnetic force, acquires an increase of resistance to the conduction of electricity along, and a diminution of resistance to the conduction of electricity across, the lines of magnetization*". This difference in resistance between the parallel and perpendicular case is called **anisotropic magnetoresistance** (AMR) [2]. It is now known that this property originates from the electron spin-orbit coupling. In general magnetoresistance effects are very small, at most of the order of a few per cent.

The most useful material has been an alloy between iron and nickel, $\text{Fe}_{20}\text{Ni}_{80}$ (permalloy). In general, however, there was hardly any improvement of the performance of magnetoresistive materials since the work of Kelvin. The general consensus in the 1980s was that it was not possible to significantly improve on the performance of magnetic sensors based on magnetoresistance.

Therefore it was a great surprise when in 1988 two research groups independently

discovered materials showing a very large magnetoresistance, now known as **giant magnetoresistance** (GMR). These materials are so called magnetic multilayers, where layers of ferromagnetic and non-magnetic metals are stacked on each other [Fig. 1]. The widths of the individual layers are of nanometre size — i.e. only a few atomic layers thick. In the original experiments leading to the discovery of GMR one group, led by Peter Grünberg [3], used a trilayer system $\text{Fe}/\text{Cr}/\text{Fe}$, while the other group, led by Albert Fert



© CNRS Photolibary, photo: C. Lebedinsky

Albert Fert

1/2 of the prize

France

Université Paris-Sud
Unité Mixte de Physique
CNRS/THALES
Orsay, France

b. 1938



© Forschungszentrum Jülich

Peter Grünberg

1/2 of the prize

Germany

Forschungszentrum Jülich
Jülich, Germany

b. 1939

The content of this Highlight on "The 2007 Nobel Prize in Physics" was relayed originally by the Nobel Foundation on the website Nobel e-Museum. Permission for reprinting in the Bulletin of this news release was requested and granted.

FIG. 2 の拡大図を次ページに示す。

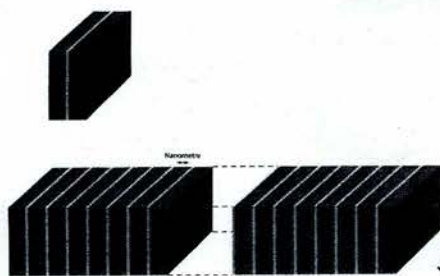


Fig. 1: Schematic figure of magnetic multilayers. Nanometre thick layers of iron (green) are separated by nanometre thick spacer layers of a second metal (for example chromium or copper). The top figure illustrates the trilayer Fe/Cr/Fe used by Grünberg's group [3], and the bottom the multilayer $(\text{Fe/Cr})_n$, with n as high as 60, used by Fert's group [4].

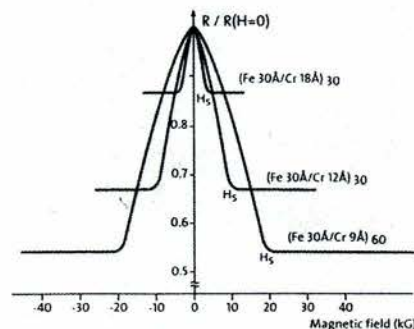
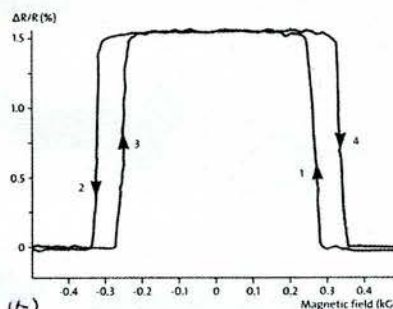


Fig. 2: After Refs. [3] and [4]. Left: Magnetoresistance measurements [3] (room temperature) for the trilayer system Fe/Cr/Fe . To the far right as well as to the far left the magnetizations of the two iron layers are both parallel to the external magnetic field. In the intermediate region the magnetizations of the two iron layers are antiparallel. The experiments also show a hysteresis behaviour (difference 1 and 4 (2 and 3)) typical for magnetization measurements. Right: Magnetoresistance measurements [4] (4.2K) for the multilayer system $(\text{Fe/Cr})_n$. To the far right ($>H_S$, where H_S is the saturation field) as well as to the far left ($<-H_S$) the magnetizations of all iron layers are parallel to the external magnetic field. In the low field region every second iron layer is magnetized antiparallel to the external magnetic field. $10 \text{ kG} = 1 \text{ Tesla}$.

[4], used multilayers of the form $(\text{Fe/Cr})_n$ where n could be as high as 60.

In Fig. 2 the measurements of Grünberg's group are displayed (left) together with those of Fert's group (right). The y-axis and x-axis represent the resistance change and external magnetic field, respectively. The experiments show a most significant negative magnetoresistance for the trilayer as well as the multilayers. The systems to the right, involving large stacks of layers, show a decrease of resistance by almost 50% when subjected to a magnetic field. The effect is much smaller for the system to the left, not only because the system is merely a trilayer but also because the experiments led by Grünberg were made at room temperature, while the experiments reported by Fert and co-workers were performed at very low temperature (4.2K).

Grünberg [3] also reported low temperature magnetoresistance measurements for a system with three iron layers separated by two chromium layers and found a resistance decrease of 10%.

Not only did Fert and Grünberg measure strongly enhanced magnetoresistivities, but they also identified these observations as a new phenomenon, where the origin of the magnetoresistance was of a totally new type. The title of the original paper

from Fert's group already referred to the observed effect as "Giant Magnetoresistance." Grünberg also realized at once the new possibilities for technical applications and patented the discovery. From this very moment the area of thin film magnetism research completely changed direction into magnetoelectronics.

The discovery of giant magnetoresistance immediately opened the door to a wealth of new scientific and technological possibilities, including a tremendous influence on the technique of data storage and magnetic sensors. Thousands of scientists all around the world are today working on magnetoelectronic phenomena and their exploration. The story of the GMR effect is a very good demonstration of how a totally unexpected scientific discovery can give rise to completely new technologies and commercial products.

2. BACKGROUND

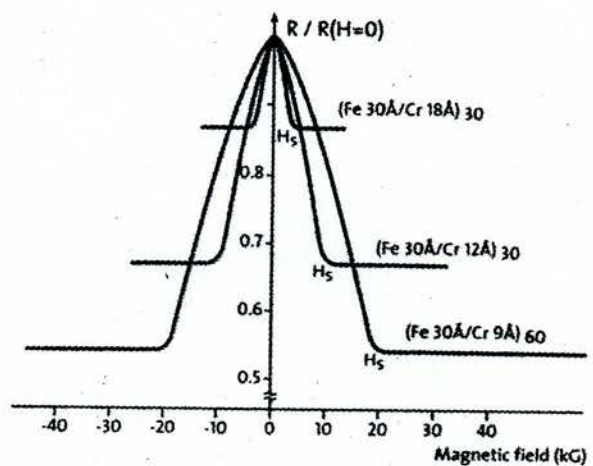
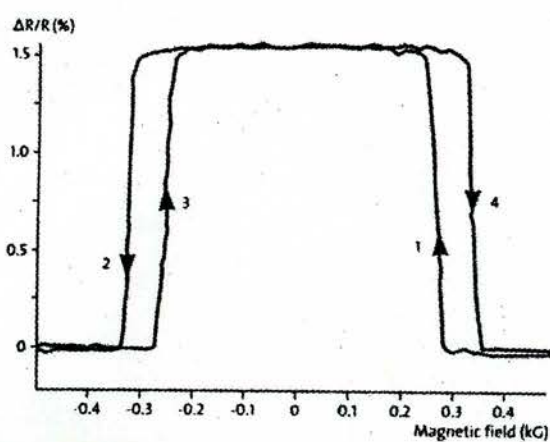
2.1. Ferromagnetic Metals

Among the d transition metals (Sc...Cu, Y...Ag, Lu...Au, i.e. 3d, 4d, and 5d transition elements), the 3d metals iron, cobalt and nickel are well-known to be ferromagnets. Among the lanthanides (the 4f elements, La-Lu) gadolinium is also a ferromagnet. The origin of magnetism in these metals lies in the behaviour of the 3d and 4f electrons, respectively. In the following it is mainly the magnetism in the

3d elements that will be discussed.

In the free atoms, the 3d and 4s atomic energy levels of the 3d transition elements are hosts for the valence electrons. In the metallic state these 3d and 4s levels are broadened into energy bands. Since the 4s orbitals are rather extended in space there will be a considerable overlap between 4s orbitals belonging to neighbouring atoms, and therefore the corresponding 4s band is spread out over a wide energy range (15-20 eV). In contrast to this, the 3d orbitals are much less extended in space. Therefore the energy width of the associated 3d energy band is comparatively narrow (4-7 eV). In practice one cannot make a clear distinction between the 3d and 4s orbitals since they will hybridize strongly with each other in the solid. Nevertheless for simplicity this two band picture will be used here and the 3d electrons will be considered as metallic — i.e. they are itinerant electrons and can carry current through the system, although they are still much less mobile than the 4s electrons.

A useful concept in the theory of solids is the electron density of states (DOS), $n(E)$, which represents the number of electrons in the system having energy within the interval $(E, E+dE)$. According to the exclusion principle for fermions (in this case electrons), only one electron can occupy a particular state. However each state



(5) Fig. 2: After Refs. [3] and [4]. Left: Magnetoresistance measurements [3] (room temperature) for the trilayer system Fe/Cr/Fe. To the far right as well as to the far left the magnetizations of the two iron layers are both parallel to the external magnetic field. In the intermediate region the magnetizations of the two iron layers are antiparallel. The experiments also show a hysteresis behaviour (difference 1 and 4 (2 and 3)) typical for magnetization measurements. Right: Magnetoresistance measurements [4] (4.2K) for the multilayer system $(\text{Fe/Cr})_n$. To the far right ($>H_s$, where H_s is the saturation field) as well as to the far left ($<-H_s$) the magnetizations of all iron layers are parallel to the external magnetic field. In the low field region every second iron layer is magnetized antiparallel to the external magnetic field. $10 \text{ kG} = 1 \text{ Tesla}$.