

2009 年度  
琉球大学大学院理工学研究科  
博士前期課程  
物質地球科学専攻・物理系

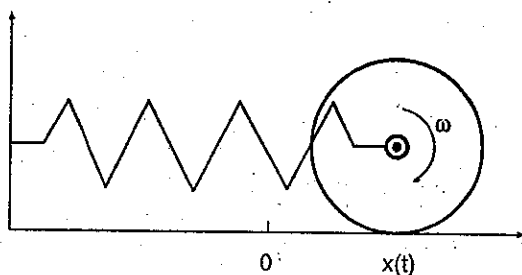
入学試験問題  
専門(物理)

2008 年 8 月 25 日

注意事項

1. すべての解答用紙（B4 白紙）の左上に受験番号を記入すること。
2. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
3. 解答用紙は片面のみ使用し、縦置き横書きで解答すること。
4. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
5. 問題冊子は、各自持ち帰ること。

Ⅰ 水平な床の上に図のような質量  $M$ 、半径  $a$  の一様な円柱を置き、その両端の回転軸に質量の無視できる同一のばね（ばね定数  $k$ ）をつなぎ、他端を壁に固定する。円柱は常に壁と平行の状態を保って壁に垂直な方向に運動しているとする。ばねが自然長にある時の円柱の軸の位置を原点、そこから壁と反対方向へずれた軸の位置を  $x$  とする。 (100 点)



問 1 円柱が床の上を滑らずに運動するとき、次の問いに答えよ。

- (1) 円柱の密度が一定であるとして、軸のまわりの慣性モーメント  $I$  を求めよ。ただし、ばねを固定している回転軸の寄与は無視できるとする。
- (2) この円柱の軸の並進速度を  $v(t) = dx(t)/dt$ 、軸のまわりの角速度を  $\omega(t)$ 、円柱が床から受ける静止摩擦力を  $F$  として、 $v$  についての運動方程式と  $\omega$  についての回転の運動方程式を書け。慣性モーメントの大きさは  $I$  としてよい。
- (3) 円柱が床の上を滑らずに運動する条件  $v = a\omega$  を用いて前問の運動方程式を解き、時刻  $t$  における円柱の位置  $x(t)$  の形を求めよ。
- (4) 円柱はそれを質点とみなした場合よりも、ゆっくりとした運動をする。その物理的理由を述べよ。

問 2 円柱が回転せずに床の上を滑るとき、重力加速度を  $g$ 、動摩擦係数を  $\mu$ 、静摩擦係数を  $\mu_0$  として次の問いに答えよ。

- (1) 摩擦力を  $F$  として円柱の運動方程式を書け。
- (2) 原点から初速度  $v_0 (> 0)$  で壁と反対の方向へ円柱を発射したとき、 $N = Mg$  の抗力に対して大きさ  $\mu N$  の摩擦力  $F$  が壁に向かう向きに働く。この時、 $v(t) > 0$  の場合の運動方程式を解け。
- (3) 円柱が  $v_0$  で動き出してから最初に円柱の速度  $v(t)$  が 0 になったとき、そのまま静止する条件を求めよ。
- (4) 円柱が  $v_0$  で動き出してから最初に静止するまでに円柱が摩擦によって失ったエネルギーはどれだけか。

Ⅱ 以下の各問いに答えよ.

(100点)

問1 図1のように、真空中に置かれた長さ $l$ 、内半径 $a$ の円筒導体と外半径 $b$ の円筒導体と同軸をなしている。円筒導体の間には自由に動かすことができる同じ長さの誘電体(誘電率 $\epsilon$ )が挿入されている。この円筒の内側の導体に電荷 $Q$ を外側の導体に電荷 $-Q$ を与えた。真空中の誘電率を $\epsilon_0$ とする。また、導体の厚さおよび端の影響は無視できるものとする。

- (1) 導体の中心軸からの距離を $r$ とすると、 $r < a$ ,  $a < r < b$ ,  $b < r$ の領域における電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。
- (2) 2つの導体間の電位差 $V$ を求めよ。
- (3) この円筒導体の電気容量 $C$ を求めよ。
- (4) 次に、図2のように誘電体を $x$  ( $x < l$ ) だけ引っ張り出した。電荷と電位差の関係を求めることによって、このときの電気容量 $C'$ を求めよ。ただし、導体の表面と内面は滑らかであり、導体と誘電体の間に摩擦はないものとする。
- (5) 更に、静電エネルギー $U$ を求めて、誘電体を引き戻そうとする力の大きさ $F$ を求めよ。
- (6) その後、誘電体を完全に取り出した。取り出すのに必要な仕事 $W$ を求めよ。

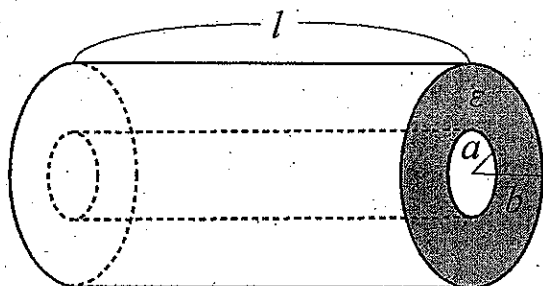


図1

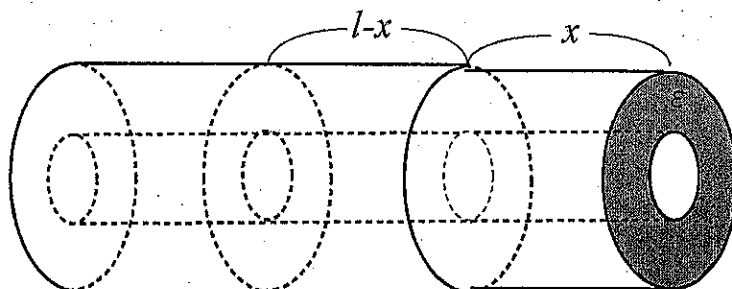


図2

問2 図3のように、真空中に置いてある半径  $a$  の1巻きの円形導線に電流  $I$  が流れている。導線を通る電流によって作られる磁束密度に関して、以下の問いに答えよ。ただし、真空中の透磁率を  $\mu_0$  とする。

- (1) 導線上の微小部分  $\Delta s$  が、円形導線の中心  $O$  から導線を含む面に垂直に距離  $x$  の点  $P$  に作る磁束密度の大きさ  $\Delta B$  を求めよ。また、 $\Delta B$  の向きを図示せよ。
- (2) 円形導線によって作られる点  $P$  での磁束密度の大きさ  $B$  が

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

となることを示せ。また、この  $B$  の向きを図示せよ。

次に、半径  $a$  の1巻きの円形導線を多数つないで、単位長さあたりの巻数  $n$  の有限の長さのソレノイドを作り、このソレノイドに電流  $I$  を流した。

- (3) 図4のように、中心軸上の点  $Q$  から距離  $x$  と  $x + \Delta x$  の間の微小部分  $\Delta x$  にある円形導線を通る電流が点  $Q$  の位置に作る磁束密度の大きさ  $\Delta B$  を求めよ。
- (4) (3) で求めた  $\Delta B$  を図4の  $\theta$  で積分することによって、中心軸上の点  $Q$  における磁束密度の大きさ  $B$  を  $\theta_1, \theta_2, \mu_0, n, I$  で表せ。ただし、図5に示されているように、 $\theta_1$  はソレノイドの右端と点  $Q$  を結ぶ直線と中心軸との間の角であり、 $\theta_2$  はソレノイドの左端と点  $Q$  を結ぶ直線と中心軸との間の角である。
- (5) ソレノイドの両端を無限遠に伸ばすと、得られた  $B$  が  $\mu_0 n I$  と一致することを示せ。

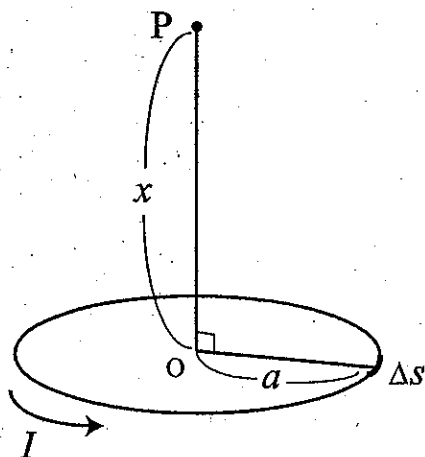


図3

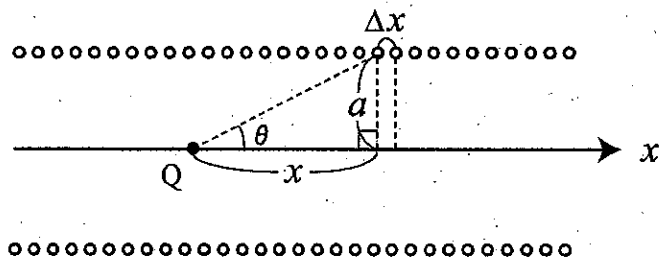


図4

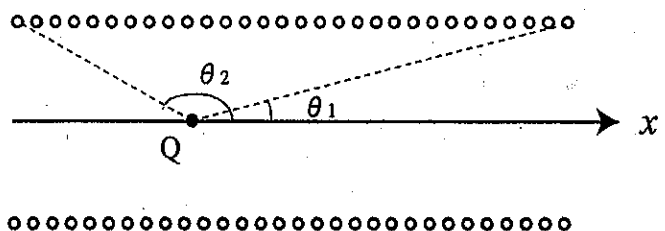


図5

### III

以下の各問いに答えよ。ただし、 $\hbar = h/2\pi$  ( $h$  はプランク定数) とする。(100点)

問1 質量  $m$  の自由粒子が1次元運動をしている。

- (1) この粒子に対する定常状態のシュレーディンガー方程式を書け。ただし、波動関数を  $\psi(x)$ 、エネルギー固有値を  $E$  とせよ。
- (2) 波動関数の絶対値の自乗  $|\psi(x)|^2$  は、 $x \rightarrow \pm\infty$  のとき発散してはならない。その物理的な理由を書け。
- (3) (1)のシュレーディンガー方程式と前問の条件を用いて、エネルギー固有値  $E$  は負になり得ないことを示せ。
- (4) 運動量演算子の固有値を  $\hbar k$ 、固有関数を  $\varphi_k(x)$  とする。 $\varphi_k(x)$  を求めよ。ただし、 $\varphi_k(x)$  を規格化する必要はない。また、運動量の固有状態において、位置と運動量の不確定性関係はどのようなになっているか。 $\varphi_k(x)$  の性質に基づいて議論せよ。
- (5)  $\varphi_k(x)$  は1次元自由粒子のハミルトニアン  $\hat{H}$  の固有関数でもある。このことに基づいて、1次元自由粒子の基底状態の縮退度と基底状態以外のエネルギー固有状態の縮退度はそれぞれどうなっているか。また、なぜ縮退度がそのようになるか、粒子の運動状態に基づいて簡潔に説明せよ。

問2 質量  $m$ 、角振動数  $\omega$  の1次元調和振動子がある。

- (1) この系のハミルトニアン  $\hat{H}$  を書け。また、基底状態において粒子の存在確率はどのようなになっているか、不確定性関係に基づいて考察せよ。
- (2) ハミルトニアン  $\hat{H}$  の期待値が次の不等式を満足することを示せ。

$$\langle \hat{H} \rangle \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (\Delta x)^2$$

また、この不等式で等号が成り立つ条件は何か。ただし、 $\Delta A \equiv \sqrt{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle}$  である。

- (3) 位置と運動量の不確定性関係  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$  と(2)の不等式に基づいて、ハミルトニアン  $\hat{H}$  の期待値の最小値を求めよ。また、そのときの  $\Delta x$  と  $\Delta p$  を求めよ。
- (4) この問題を量子論で取り扱った場合は、古典論で取り扱った場合と比べて粒子の運動状態にどのような違いが現れるか。本質的に重要であると思われる違いを挙げるとともに、それが生ずる理由についても簡潔に説明せよ。

# IV

以下の各問いに答えよ。

(100点)

問1 1モルの理想気体が準静的に断熱変化するときを考える。ただし、気体の圧力を  $P$ 、体積を  $V$ 、温度を  $T$  とする。

(1) 定積熱容量を  $C_V$ 、気体定数を  $R$  としたとき、熱力学第1法則を用いて

$$C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0$$

の関係があることを示せ。

(2)  $C_V$  が温度に依存しないとき、(1) の結果を用いて、 $TV^{\gamma-1} = A$  の関係があることを示せ。ただし、 $A$  は  $V$ 、 $T$  に依存しない定数であり、 $\gamma = \frac{C_V + R}{C_V}$  とする。

(3) (2) の関係から、 $PV^{\gamma} = RA$  であることを示せ。

(4) 温度が  $T_1$ 、 $T_2$  のときの体積を、それぞれ  $V_1$ 、 $V_2$  とする。体積が  $V_1$  から  $V_2$  になったときの気体が外部にした仕事を  $T_1$ 、 $T_2$  を用いて求めよ。

(5) (4) の結果は、気体が外部にした仕事と何が等しいことを意味しているか説明せよ。

問2 温度  $T$  で熱平衡状態にある  $N$  個の独立な1次元調和振動子からなる系を考える。ただし、ボルツマン係数を  $k_B$ 、 $\hbar = h/(2\pi)$  ( $h$  はプランク定数)、角振動数を  $\omega$  とする。

(1) 古典モデルでは、エネルギーの平均値が  $E = Nk_B T$  で与えられる。この系の熱容量を求めよ。

(2) アインシュタインモデルでは、調和振動子のエネルギーを量子論的に

$$E_0 = \hbar\omega(n_1 + n_2 + \cdots + n_N + \frac{N}{2}) \quad (n_i = 0, 1, 2, \dots)$$

とする。この系の分配関数  $Z$  が

$$Z = (2 \sinh \frac{\hbar\omega}{2k_B T})^{-N}$$

で表されることを示せ。

(3) この結果から、エネルギーの平均値  $E$  と熱容量  $C$  が、それぞれ

$$E = \frac{N}{2} \hbar\omega \coth \left( \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right)$$

$$C = \frac{N\hbar^2\omega^2}{4k_B T^2} \frac{1}{(\sinh(\hbar\omega/2k_B T))^2}$$

と表されることを示せ。

(4)  $k_B T \ll \hbar\omega$  と  $k_B T \gg \hbar\omega$  における熱容量を求めよ。ここで、 $\sinh x \approx e^x/2$  ( $x \gg 1$ )、 $\sinh x \approx x$  ( $|x| \ll 1$ ) を用いてよい。

(5) (1) と (4) で得られた熱容量を比較し、それらの結果が示すことを説明せよ。

2009 年度  
琉球大学大学院理工学研究科  
博士前期課程  
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題  
英語

2008 年 8 月 25 日

注意事項

1. すべての解答用紙（B4 白紙）の左上に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみ使用し、縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は、各自持ち帰ること。

I 次の文章を読んで、以下の問いに答えなさい。(40 点)

Once upon a time a student lay in a garden under an apple tree reflecting on the difference between Einstein's and Newton's views about gravity. He was startled by the fall of an apple nearby. As he looked at the apple, he noticed ants beginning to run along its surface. His curiosity aroused, he thought to investigate the principles of navigation followed by an ant. With his magnifying glass, he noted one track carefully, and, taking his knife, made a cut in the apple skin one mm above the track and another cut one mm below it.<sup>(1)</sup> He peeled off the resulting little highway of skin and laid it out on the face of his book. The track ran as straight as a laser beam along this highway. No more economical path could the ant have found to cover the ten cm from start to end of that strip of skin.<sup>(2)</sup> Any zigs and zags or even any smooth bend in the path on its way along the apple peel from starting point to end point would have increased its length.

"What a beautiful geodesic," the student commented.<sup>(3)</sup>

His eye fell on two ants starting off from a common point P in slightly different directions. Their routes happened to carry them through the region of the dimple at the top of the apple, one on each side of it. Each ant conscientiously pursued his geodesic. Each went as straight on his strip of appleskin as he possibly could. Yet because of the curvature of the dimple itself, the two tracks not only crossed but emerged in very different directions.

"What happier illustration of Einstein's geometric theory of gravity could one possibly ask?" murmured the student. "The ants move as if they were attracted by the apple stem.<sup>(4)</sup> One might have believed in a Newtonian force at a distance.<sup>(5)</sup> Yet from nowhere does an ant get his moving orders except from the local geometry along his track. This is surely Einstein's concept that all physics takes place by 'local action'. What a difference from Newton's 'action at a distance' view of physics! Now I understand better what this book means."

And so saying, he opened his book and read, "Don't try to describe motion relative to faraway objects. *Physics is simple only when analyzed locally.* And locally the world line that a satellite follows [in spacetime, around the Earth] is already as straight as any world line can be. Forget all this talk about 'deflection' and 'force of gravitation'.<sup>(6)</sup> I'm inside a spaceship. Or I'm floating outside and near it. Do I feel any 'force of gravitation'? Not at all. Does the spaceship 'feel' such a force? No. Then why talk about it? Recognize that the spaceship and I traverse a region of spacetime free of all force. Acknowledge that the motion through that region is already ideally straight".

The dinner bell was ringing, but still the student sat, musing to himself. "Let me see if

I can summarize Einstein's geometric theory of gravity in three ideas: (1) locally, geodesics appear straight; (2) over more extended region of space and time, geodesics originally receding from each other begin to approach at a rate governed by the curvature of spacetime, and this effect of geometry on matter is what we mean today by that old word 'gravitation'; (3) matter in turn warps geometry. The dimple arises in the apple because the stem is there. I think I see how to put the whole story even more briefly: Space acts on matter, telling it how to move. In turn, matter reacts back on space, telling it how to curve.<sup>(7)</sup> In other words, matter here", he said, rising and picking up the apple by its stem, "curve space here. To produce a curvature in space here is to force a curvature in space there", he went on, as he watched a lingering ant busily following its geodesic a finger's breadth away from the apple's stem. "Thus matter here influences matter there. That is Einstein's explanation for 'gravitation'".

Then the dinner bell was quiet, and he was gone, with book, magnifying glass---and apple.

("Gravitation", C.W. Misner, K.S. Thorne and J. A. Wheeler)

注. Ant(s)=あり, Geodesic(s)=測地線, Curvature=曲率

問 1. 下線部 (1) を和訳しなさい。

問 2. 下線部 (2) を和訳しなさい。

問 3. 下線部 (3) で、なぜこの学生はありが描いた測地線を美しいと感動しているのか。

問 4. 下線部 (4) を和訳しなさい。

問 5. 下線部 (5) の "force at a distance" の意味を簡単に説明しなさい。

問 6. 下線部 (6) で、'deflection' や 'force of gravitation' についての話を忘れなさいと書いてあるが、これはどうしてか。

問 7. 下線部 (7) を和訳しなさい。

問 8. 本文中に、この学生がアインシュタインの重力理論についてまとめた箇所がある。その箇所を見つけ、その内容を箇条書きにして簡潔にまとめなさい。

問 9. この文章の内容を反映したタイトルをつけるとしたら、次の 4 つのうちのどれになるか。一つ選び、番号を書きなさい。

① The parable of the apple

② Newton versus Einstein

③ Ant

④ Geodesics on earth

II 大学での学生生活を振り返り、印象に残っている思い出を(英単語)で 200 字程度にまとめた英語の文章を作りなさい。(20 点)

III 次の文章を英語に直しなさい。(20 点)

1. 私の専門は素粒子物理学です。しかし、私自身は、学部では実験物理学を学び、大学院の修士課程では、固体物理を学んだ人間でした。もちろん数学の勉強もしましたが、自分自身が数学者と思ったことはないし、誰も私のことを数学者だとは思っていません。にもかかわらず、私が数学の解説書を書こうとしていますが、それにはある理由があるのです。

注. 素粒子物理学: elementary particle physics, 固体物理学: solid state physics

2. 僕は君から送られてきた e-mail を読もうとした。でも、なんて書いてあるかわからなかった。完全に文字化けしていたから。隣に座っていた女の子にどうすれば文字化けをなおせるか聞いたかったけど、恥ずかしくて聞く勇気がなかった。

注. 文字化けする: garble

IV 次の文章を<sup>和</sup>英訳しなさい。(20 点)

1. I spoke to the travel agent today about our upcoming trip, and she said that they don't mail out airline tickets anymore the way they used to. Instead, they arrange electric tickets. What we do is log onto the airline's website and find our reservation. Then we print out our ticket reservations. We take the printouts to the airport with our passports and they issue the tickets and boarding passes there.

2. There is only one thing that I enjoy more than reading a good novel or short story. And that is rereading a good novel or short story. Going back to a book that you have enjoyed previously enables you to recall, and in a way to relive the pleasure it provided

the first time. But it also does more. When I reread a book, especially a long time after first picking it up, I notice new details and experience new thoughts that excluded me the first time.