

2009 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門（物理）

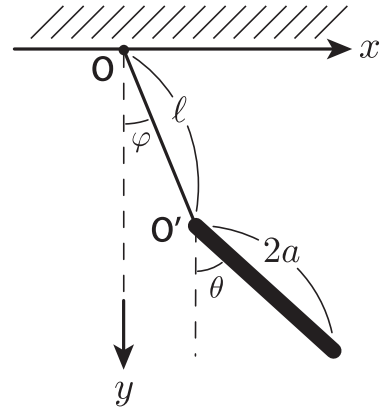
2009 年 2 月 17 日

注意事項

1. 解答用紙（B4 白紙）は片面のみ使用し，縦置き横書きで解答すること。
2. すべての解答用紙の左上に受験番号を記入すること。
3. 大問毎に別々の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
5. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I

長さ ℓ の糸の一端 O を固定し、他端 O' に長さ $2a$ 、質量 M の一様な棒を取り付ける。棒が鉛直面内を自由に運動するとき、鉛直線と糸および棒がなす角をそれぞれ φ 、 θ とする。ただし、空気抵抗や糸の質量、伸縮、たるみは無視できる。以下の各問に答えよ。 (100 点)



- 問 1 点 O' のまわりの棒の慣性モーメント I を a 、 M を用いて示せ。
- 問 2 棒の重心座標 (x, y) を ℓ 、 a 、 φ 、 θ を用いて表せ。ただし、図のように点 O を原点とし、棒が運動する鉛直面内の水平方向に x 軸、鉛直下方に y 軸をとる。
- 問 3 この系のラグランジアン L を示し、微小振動 ($|\varphi|, |\theta| \ll 1$) しているとして運動方程式を導出せよ。 $\sin \alpha = \alpha$ 、 $\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2$ ($|\alpha| \ll 1$) とせよ。

次に、点 O を通る鉛直線上に点 O' を固定する。このとき、棒は点 O' のまわりで鉛直面内を自由に運動できるものとする。

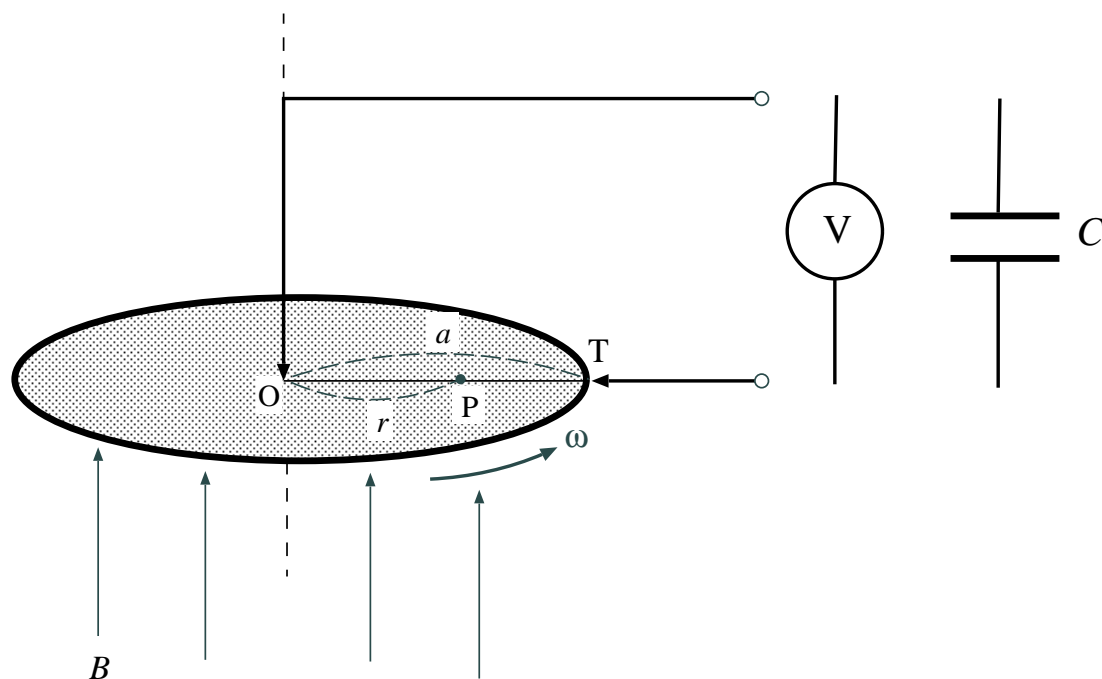
- 問 4 $\theta = 0$ で棒が静止しているとき、棒の下端に初速度 v_0 を与えた。以下の場合の v_0 を求めよ。
 (a) 棒の下端が O' 点と同じ高さに達した。
 (b) 棒が O' 点を中心に 1 回転した。
- 問 5 棒が微小振動 ($|\theta| \ll 1$) するとき、その周期 T を求めよ。
- 問 6 固定点 O' を棒上の任意の位置に移動させることができ、棒の中心から点 O' までの距離を d とする。そのとき、周期 T を最小にする距離 d を求めよ。

II

以下の各問に答えよ。

(100 点)

図のように，磁束密度 B の一様な磁場中におかれた半径 a の導体円板が B の方向に一致させた中心軸のまわりに角速度 ω で回転している。



- 問1 OT 上の O から r だけ離れたところの点 P を考える。 P の位置にある電子 (質量 m ，電荷 $-e$) の速度 v および電子に働く力 (ローレンツ力) F_L をそれぞれ求めよ。
- 問2 上の力は，運動する物体中に電荷を動かそうとする電場 E が生じ，その電場から受ける力と考えることもできる。これから，点 P における電場 E を求めよ。また， OT 間の起電力の大きさ V_{OT} を求めよ。
- 問3 電圧計 V の両端を，導体円板の中心 O と縁 (円周) T に接している導線にそれぞれ接続すると V には電圧が表示される。このとき回路に電流が流れると，電圧計 V で測定される電圧の大きさは上で求めた V_{OT} とは異なる。その理由を具体的に述べよ。
- 問4 角速度 ω が大きくなると， F_L と反対向きの遠心力 F_m が大きくなる。 F_L と F_m が釣り合う場合の， ω と B の関係を示せ。
- 問5 次に，電圧計 V の代わりに電気容量 C のコンデンサーをつなぎ，十分時間がたった後のある時刻 t_0 で導体円板の角速度を ω から 0 にした。コンデン

サーの極板上の電荷 Q が、時刻 t_0 からの経過時間 t でどのように変化するかを考える。ただし、OT 間の電気抵抗を R とし、導線の抵抗は無視できるものとする。

- (1) 導体円板の回転が止まると、コンデンサーに蓄えられていた電荷 Q はどうなるか。
- (2) R の両端の電圧 (電圧降下) V_R とコンデンサーの極板間の電圧 V_C をそれぞれ求めよ。ただし、 R を流れる電流を i とする。
- (3) 微小時間 dt 間の電荷の変化量 dQ は、 $dQ = -idt$ で与えられる。このことと (2) から得られる V_R と V_C が等しいとして、 Q に関する微分方程式をかけ。
- (4) 上で得られた微分方程式を解き、電荷 Q の時間変化を図示せよ。ただし、 $t = 0$ のときの電荷を Q_0 とする。

以下の各問に答えよ。ただし, $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数)とする。 (100 点)

問 1 三角ポテンシャルのモデルは, 絶縁体と接合する半導体の界面や異種半導体界面の近傍に束縛されている電子を扱うためにしばしば用いられる。ここでは, 界面に垂直な方向(x 軸方向)の運動のみを考える。質量 m の電子が, 次のような三角ポテンシャル $V(x)$ により束縛されている。

$$V(x) = \begin{cases} Ax & (x \geq 0) \\ \infty & (x < 0) \end{cases} \quad (A \text{ は正の定数})$$

電子の基底状態のエネルギーの近似値を, 変分法により求めることにする。 $b(>0)$ をパラメータ, C を規格化定数とする試行関数を $\phi(x) = Cx \exp\left(-\frac{1}{2}bx\right)$ とおく。また, 定積分

$$I_n = \int_0^\infty x^n \exp(-bx) dx \quad (n=0,1,2,\dots) \text{ とする。ここで, } \exp \text{ は指数関数を表す。}$$

(1) 漸化式 $I_n = \frac{n}{b} I_{n-1} \quad (n \geq 1)$ が成り立つことを示し, これを用いて $I_n \quad (n \geq 0)$ を n と b で表せ。

(2) 規格化条件 $\int_0^\infty |\phi(x)|^2 dx = 1$ を用いて, $|C|^2$ を b で表せ。

(3) 運動エネルギー K の期待値 $\langle K \rangle = \int_0^\infty \phi^*(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \phi(x) dx$, ポテンシャル V の期待値 $\langle V \rangle = \int_0^\infty \phi^*(x) V(x) \phi(x) dx$ を b で表せ。

(4) b を変数として, 電子のエネルギーの期待値 $\langle H \rangle (= \langle K \rangle + \langle V \rangle)$ の最小値を求めよ。この最小値が基底状態のエネルギーの近似値となる。

問 2 中心力場内の粒子の p 軌道は次のような形で表される。

$$\phi_x(\mathbf{r}) = x f(r), \quad \phi_y(\mathbf{r}) = y f(r), \quad \phi_z(\mathbf{r}) = z f(r)$$

ここで, 力の中心は xyz 直交座標系の原点にあり, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ である。また, $f(r)$ は $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ を変数とする微分可能な関数である。角運動量の z 成分 L_z は

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \text{ と表される。}$$

(1) 偏導関数 $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x} \phi_x(\mathbf{r})$, $\frac{\partial}{\partial y} \phi_x(\mathbf{r})$ を求めよ。

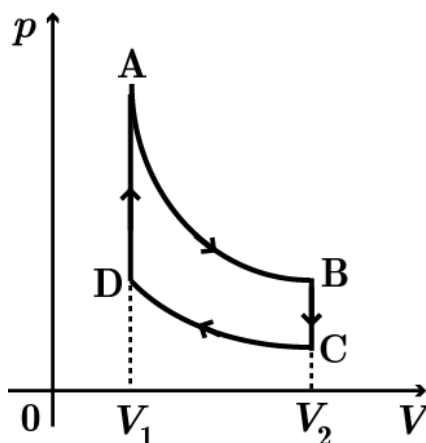
(2) 3つの関数 $\phi_z(\mathbf{r})$, $\phi_\pm(\mathbf{r}) = \phi_x(\mathbf{r}) \pm i\phi_y(\mathbf{r})$ (複号同順) が L_z の固有関数であることを示し, 各固有関数に対する固有値を求めよ。

IV

以下の各問に答えよ。ただし、 k_B をボルツマン定数とする。

(100点)

問1 1モルの理想気体において、図のような準静的過程 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ を考える。各状態



の圧力 p ，体積 V ，温度 T は状態 $A(p_A, V_1, T_A)$ ， $B(p_B, V_2, T_B)$ ， $C(p_C, V_2, T_C)$ ， $D(p_D, V_1, T_D)$ で与えられる。各過程の状態変化は以下の通りである。

- (i) $A \rightarrow B$ では，気体を断熱膨張させる。
- (ii) $B \rightarrow C$ では， V_2 を一定に保ったまま放熱させる。
- (iii) $C \rightarrow D$ では，気体を断熱圧縮させる。
- (iv) $D \rightarrow A$ では， V_1 を一定に保ったまま吸熱させる。

ただし，定圧比熱 C_p と定積比熱 C_V の比熱比を $\gamma = C_p / C_V$ ，気体定数を R とする。必要ならば断熱過程で成立するポアッソンの式： $pV^\gamma = \text{一定}$ およびメイヤールの式： $C_p - C_V = R$ を使ってもよい。

(1) 過程(ii)において気体が放熱する熱量 Q_{BC} と，過程(iv)において気体が吸熱する熱量 Q_{DA} をそれぞれ C_V を用いて表せ。

(2) このサイクルで気体になされた全仕事 W を求めよ。

(3) このサイクルの熱効率 $\eta = W / Q_{DA}$ を γ ， V_1 ， V_2 で表せ。

問2 体積 V の密閉された容器に単原子分子からなる 1モルの理想気体が入っている。質量 m の理想気体の分子は容器の中を自由に飛び回り，分子どうしや壁との衝突はすべて完全弾性衝突とする。気体分子の速度の x, y, z 成分がそれぞれ v_x, v_y, v_z であるとき，エネルギー等分配則：

$$\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_y^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

が成立する。ただし，系の温度を T とする。

(1) 気体の内部エネルギー E がアボガドロ数を N として， $E = \frac{3}{2} N k_B T$ で与えられることを示せ。

(2) 容器の中で速さ v で運動している分子の 2 乗平均速度は $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ であることを示せ。

問3 温度 T の熱浴との間でエネルギーを交換している系の集合を考える。カノニカル集合では，系がエネルギー E_j の微視的状态 j に見出される確率は $\exp(-\beta E_j)$ に比例する。ただし， $\beta = \frac{1}{k_B T}$ である。

(1) 系の分配関数 Z を E_j を用いて表せ。

(2) 系の平均エネルギーが， $\langle E \rangle = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta}$ で与えられることを示せ。

2009 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2009 年 2 月 17 日

注意事項

1. 解答用紙（B4 白紙）は片面のみ使用し，縦置き横書きで解答すること。
2. すべての解答用紙の左上に受験番号を記入すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I 次の英文を読んで各問に答えよ。

(30点)

A Bose–Einstein condensate (BEC) is a state of matter of bosons confined in an external potential and cooled to temperatures very near to absolute zero (0 K, -273.15°C). Under such conditions, a large fraction of the atoms collapse into the lowest quantum state of the external potential, at which point quantum effects become apparent on a macroscopic scale.

This state of matter was first predicted by Satyendra Nath Bose and Albert Einstein in 1924-25. Bose first sent a paper to Einstein on the quantum statistics of light quanta (now called photons). Einstein was impressed, translated the paper himself from English to German and submitted it for Bose to the Zeitschrift für Physik which published it. Einstein then extended Bose's ideas to material particles (or matter) in two other papers.

Seventy years later, the first gaseous condensate was produced by Eric Cornell and Carl Wieman in 1995 at the University of Colorado at Boulder NIST-JILA lab, using a gas of rubidium atoms cooled to 170 nanokelvin (nK) (1.7×10^{-7} K). Cornell, Wieman, and Wolfgang Ketterle at MIT were awarded the 2001 Nobel Prize in Physics in Stockholm, Sweden for their achievements.

A) "Condensates" are extremely low-temperature fluids which contain properties and exhibit behaviors that are currently not completely understood, such as spontaneously flowing out of their containers. The effect is the consequence of quantum mechanics, which states that since continuous spectral regions can typically be neglected, systems can almost always acquire energy only in discrete steps. If a system is at such a low temperature that it is in the lowest energy state, it is no longer possible for it to reduce its energy, not even by friction. Without friction, the fluid will easily overcome gravity because of adhesion between the fluid and the container wall, and it will take up the most favorable position (all around the container).

(Wikipedia: Bose–Einstein condensate より引用)

condensate : (液体・気体の) 凝縮(物), Zeitschrift für Physik : 物理学の学術雑誌,
Boulder NIST-JILA lab : Boulder city にある国立標準技術研究所(NIST)と宇宙物
理学研究所(JILA)からなる研究所,

MIT : Massachusetts Institute of Technology マサチューセッツ工科大学,

fluid: 流体, 流動体, friction: 摩擦, gravity: 重力,

adhesion: 粘着(作用), 付着, spectral: スペクトルの

- 問 1 Bose-Einstein condensate (BEC)について説明せよ。
問 2 Bose からの手紙に対して Einstein はどのようなことを行ったか。
問 3 2001 年のノーベル物理学賞の受賞理由はどのようなことかを説明せよ。
問 4 下線部 A) を和訳せよ。

Ⅱ 次の英文を読んで各問に答えよ。

(4 0 点)

From 1882 to 1923 Kamerlingh Onnes served as professor of experimental physics at the University of Leiden. In 1904 he founded a very large cryogenics laboratory and invited other researchers to the location, which made him highly regarded in the scientific community. A) In 1908, he was the first physicist to liquify helium, using the Hampson-Linde cycle and cryostats. Using the Joule-Thomson effect, he lowered the temperature to less than one degree above absolute zero, reaching 0.9 K. At the time this was the coldest temperature achieved on earth. The original equipment is at the Boerhaave Museum in Leiden.

B) Kamerlingh Onnes conducted (in 1911) electrical analysis of pure metals (mercury, tin and lead) at very low temperatures. Some, such as William Thomson (Lord Kelvin), believed that electrons flowing through a conductor would come to a complete halt or, in other words, metal resistivity will become infinity at absolute zero. Others, including Kamerlingh Onnes, felt that a conductor's electrical resistance would steadily decrease and drop to nil. Augustus Matthiessen pointed out when the temperature decreases, the metal conductivity usually improves or in other words, the electrical resistivity usually decreases with temperature. At 4.2 kelvin the resistance was zero according to the observation of Kamerlingh Onnes and his co-workers. The drop to zero was experimentally observed to be abrupt. Kamerlingh Onnes stated that the "Mercury has passed into a new state, which on account of its extraordinary electrical properties may be called the superconductive state". He published more articles about the phenomenon, initially referring to it as "supraconductivity" and, only later adopting the term "superconductivity".

Kamerlingh Onnes received widespread recognition for his work, including the 1913 Nobel Prize in Physics for (in the words of the committee) "his investigations on the properties of matter at low temperatures which led, inter alia, to the production of liquid helium".

Kamerlingh Onnes died in Leiden. Some of the instruments he devised for his experiments can still be seen at the Boerhaave Museum in Leiden. C) The apparatus he

used to first liquefy helium is on display in the lobby of the physics department at Leiden University, where the low temperature lab is also named in his honor. His student and successor as director of the lab Willem Hendrik Keesom was the first person who was able to solidify helium, in 1926.

(Wikipedia: Heike Kamerlingh Onnes より引用)

cryogenics: 低温学, liquify: 液化する,
cryostat: 低温 (自動) 装置, 冷却器, nil: 無, 零点,
on account of: ...の理由で, extraordinary: 非常な, 異常な, 驚くべき,
inter alia: なかんずく, とりわけ(由来はラテン語からで among other things のこと),
"supraconductivity": superconductivity のこと, successor: (…の) 後継者

問 1 下線部 A) を和訳せよ。

問 2 下線部 B) を読み, 下記の各問に答えよ。

- (1) カマリング・オネスが超伝導を発見する以前には, 低温での電気抵抗はどのようなになると考えられていたか。
- (2) カマリング・オネスは, 超伝導を発見する際に, どのような測定をして, どのような結果を得たか。

問 3 下線部 C) を和訳せよ。

III 次の文章を英訳せよ。 (30点)

- 1) 一定量の気体の体積は, 一定の気圧の下では絶対温度に正比例する。しかしながらこのことは, 絶対 0 度のときに気体の体積が 0 であることを意味しない。なぜならば, 絶対温度が 0 になる前に, 気体は液化するか凝固するからである。

気圧: atmospheric pressure, 液化する: liquify, 凝固(固化)する: solidify

- 2) 近年肺がんの発病率は, どの種のがんよりも増加している。そしてタバコをよく吸う人では, タバコを吸わない人に比べて 20 倍も発病しやすいことが統計的に示されている。

肺がん: lung cancer, 発病率(発生率): incidence,
統計的に, 統計上: statistically