

I 図1のように，時刻 t に位置ベクトル \vec{r}_1, \vec{r}_2 にいる質量 m_1, m_2 の質点が相互作用ポテンシャル $V(r)$ ($r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$) を及ぼし合いながら運動している．次の各問に答えよ．
(100 点)

問1 質量 m_2 が質量 m_1 から受ける力を \vec{F} とする．

- (1) 質量 m_1 の運動方程式を書け．
- (2) 質量 m_2 の運動方程式を書け．

問2 全質量 $M = m_1 + m_2$ を用いて，重心座標ベクトルは $\vec{R} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/M$ で定義される．相対座標ベクトルは $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ で定義される．換算質量 μ は $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ で定義される．

- (3) 重心運動の速度が一定であることを示せ．
- (4) 相対運動の加速度と力 \vec{F} の関係を求めよ．
- (5) \vec{F} が相対座標ベクトル \vec{r} に比例することを示せ．

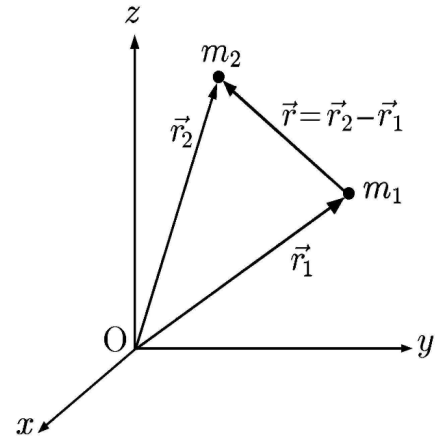


図1: 2個の質点の位置ベクトル

問3 相対運動の角運動量ベクトルは $\vec{\ell} = \vec{r} \times \mu \vec{v}$, ($\vec{v} = d\vec{r}/dt$) で与えられる．

- (6) 角運動量ベクトル $\vec{\ell}$ が保存することを示せ．
- (7) 相対運動は角運動量ベクトル $\vec{\ell}$ に垂直な平面内の運動であることを説明せよ．

問4 $\vec{\ell}$ に垂直な平面内の相対運動を表す \vec{r} を2次元極座標 (r, θ) を用いて表す．

- (8) 相対運動のラグランジアン L を2次元極座標 (r, θ) を用いて書け．
- (9) 動径方向 (r 方向) のラグランジュの方程式を書け．
- (10) 角度方向 (θ 方向) のラグランジュの方程式を書け．

問5 相互作用が万有引力ポテンシャル $V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$, (G : 万有引力定数) の場合を考える．

(11) 相対運動のエネルギー E が有効ポテンシャル $U(r)$ を用いて次の式で書けることを示せ．(ヒント: 角運動量の保存則 $\ell = |\vec{\ell}| = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const}$ を用いて $\dot{\theta}$ を消去する)．

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r), \quad U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{\ell^2}{2 \mu r^2}$$

(12) r の関数として有効ポテンシャル $U(r)$ の図を描け．

(13) エネルギーが $E < 0$, $E > 0$ の場合，どちらが r が有界な運動 (楕円，または円運動)，非有界 (双曲線運動) な運動に対応するか， $U(r)$ の図等を用いて説明せよ．ただし， $\ell \neq 0$ である．(ヒント: 不等式 $\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 = E - U(r) > 0$ を考慮する)．

II 以下の各問に答えよ。

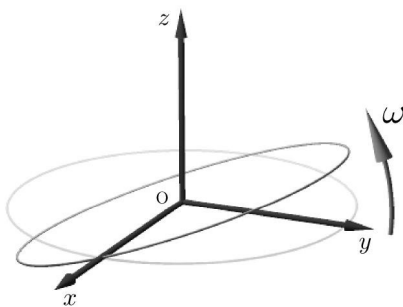
(100 点)

問1 電磁場の基礎方程式であるマクスウェル方程式を記述し、各々の方程式の物理的意味を述べよ。必要な物理量は定義して用いてよい。

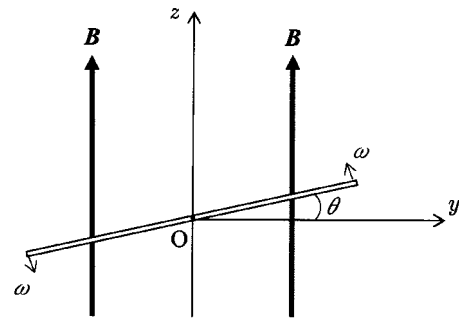
問2 半径 a の球内に密度 ρ の正電荷が一様に分布している。

- (1) 球内外の電場の強さ E を求めよ。
- (2) 各電場に対する電位 ϕ を求めよ。ただし、無限遠における電位をゼロとする。
- (3) 電場 E と電位 ϕ を、球の中心からの距離 r の関数として、各々グラフに示せ。ただし、 $r=0$ と a での値をグラフに書き込むこと。
- (4) 静電エネルギー U を求めよ。

問3 図のように、半径 a 、抵抗 R の円形コイルが、中心と原点が一致するように、 xy 平面上に置かれている。これに z 軸方向に一様な磁場（磁束密度 B ）をかけて、 x 軸のまわりに一定の角速度 ω で回転させる。コイルの自己誘導は無視するものとする。



(a) x 軸のまわりに回転させる。



(b) x 軸方向からみた図

- (1) 時刻 t にコイルが xy 平面となす角を $\theta = \omega t$ として、コイルを貫く磁束 Φ を求めよ。
- (2) コイルに生じる起電力 V 、及びこの V によってコイルに流れる電流 I を求めよ。
- (3) 単位時間あたりに、コイルに発生するジュール熱 Q を求めよ。
- (4) コイルの磁気モーメント $\mathbf{m} = IS\mathbf{n}$ を求めよ。ここで S はコイルの面積であり、 \mathbf{n} はこの面に垂直な単位ベクトルである。
- (5) コイルにはたらく回転軸のまわりの力のモーメント \mathbf{N} を求めよ。
- (6) コイルを回転させるために必要な単位時間あたりの仕事 W を求めよ。
- (7) ここで起こっているエネルギー保存について説明せよ。

III 質量 m の 1 次元調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2$$

と表される．ここで， k はばね定数である．以下の各問に答えよ． (100 点)

- 問 1 (1) 波動関数 $\psi(x, t)$ (t は時間) の満たす時間に依存するシュレーディンガー方程式を書け．
(2) 時刻 t において，調和振動子が領域 $a < x < b$ に見出される確率について述べよ．ただし， $\psi(x, t)$ は規格化されているとする．
(3) 交換関係 $[x, p] = i\hbar$ を示せ．ただし， $p = -i\hbar\partial/\partial x$ である．

問 2 演算子 $e^{iHt/\hbar}$ は $e^{iHt/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} (iHt/\hbar)^n / n!$ と定義され，次の性質を満たす：

$$(a) \frac{\partial}{\partial t} e^{iHt/\hbar} = \frac{i}{\hbar} H e^{iHt/\hbar} = \frac{i}{\hbar} e^{iHt/\hbar} H, \quad (b) (e^{iHt/\hbar})^\dagger = e^{-iHt/\hbar}.$$

$e^{iHt/\hbar}$ の展開式 (定義式) を使って，上の (a) と (b) を示せ． $H^\dagger = H$ に注意せよ．

問 3 シュレーディンガー方程式の解は

$$\psi(x, t) = e^{-iHt/\hbar} \psi(x, 0)$$

と表すことができる．このことを，両辺を時間で微分することにより，直接確かめよ． $e^{-iHt/\hbar}$ は時間推進演算子と呼ばれている．

問 4 量子状態 $\psi(x, t)$ における演算子 B の平均値は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) B \psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, 0) B(t) \psi(x, 0) dx$$

である．この等式が成立することを示せ．ここで， $B(t)$ はハイゼンベルク表示の演算子 $B(t) = e^{iHt/\hbar} B e^{-iHt/\hbar}$ である．

問 5 演算子 $B(t)$ はハイゼンベルクの運動方程式

$$\frac{dB(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, B(t)] = \frac{i}{\hbar} e^{iHt/\hbar} [H, B] e^{-iHt/\hbar}$$

を満たすことを示せ．

問 6 上の結果を使って，ハイゼンベルク表示の位置演算子 $x(t) = e^{iHt/\hbar} x e^{-iHt/\hbar}$ に対して， $dx(t)/dt$ を求めよ．また，対応する古典的關係式について述べよ．必要があれば， $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ ， $[XY, Z] = X[Y, Z] + [X, Z]Y$ (a, b は定数， X, Y, Z は演算子) を使え．

問 7 同様に，運動量演算子 $p(t) = e^{iHt/\hbar} p e^{-iHt/\hbar}$ の場合に， $dp(t)/dt$ を求めよ．また，対応する古典的關係式について述べよ．

IV 以下の各問に答えよ．

(100 点)

- 問 1 (1) 内部エネルギー U , エントロピー S , 体積 V を持つ系を考える . U を S と V の関数 $U(S, V)$ と考えると , 内部エネルギーの変化は

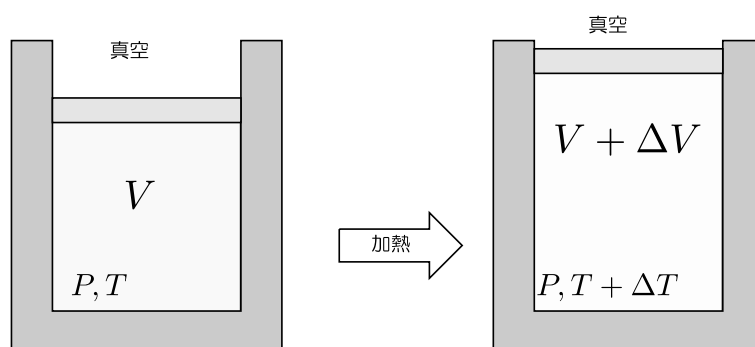
$$dU = TdS - PdV$$

となるというのが熱力学第一法則である . P は圧力 , T は絶対温度である . T, P を

$$\left. \frac{\partial U}{\partial (\text{ある変数})} \right|_{\text{別の変数}}$$

のような U の偏微分係数として表現せよ .

- (2) 圧力 P , 温度 T の気体を図のようなシリンダーに質量のあるピストンで封入した (外部は真空である) . ピストンやシリンダーは熱を伝えない材質でできている , 摩擦はない . ゆっくりと気体に熱 Q を与えたところ , 気体の温度が上昇し , 気体は ΔV



だけ膨張した . 気体が仕事をしない場合 , $\Delta U = Q$ が成立するが , この場合は気体が仕事をしているのでそうでない . この場合は Q は気体のエンタルピー ($H = U + PV$ で定義される) の増加 ΔH に等しいことを示せ .

- (3) 熱力学第 2 法則にはいろいろな表現がある . その一つは

(a) 「孤立系もしくは断熱された系に於いては、エントロピーは減少することはない」 (端的に表現すれば「エントロピーは増大する」ということ)

であり , もう一つは

(b) 「一つのサイクルに於いて低温の物体から熱を受け取り高温の物体にこれを与える以外に何の変化も残さないようにすることはできない」 (端的に表現すれば「熱は高温から低温に流れる」ということ)

である . エントロピーの増加量は $\frac{\text{流れ込む熱量}}{\text{絶対温度}}$ で定義されている ($\Delta S = \frac{Q}{T}$) . この定義を使って , 「熱が高温から低温に流れる (b)」時には「エントロピーが増大する (a)」ことを説明せよ .

問2 二つの系 A, B を統計力学的に考える．両者の間で熱の移動は行なわれるが，粒子は移動しないし，体積も一定とする．系 A のエネルギー E_A と系 B のエネルギー E_B の和 $E_t = E_A + E_B$ は一定であるとする．A の取り得る状態数を $W_A(E_A)$ ，B の状態数を $W_B(E_B)$ とする．

- (1) 全体の取り得る状態の数が最大になるような状態が実際に実現するであろう (その確率が最も大きい)．全体の取り得る状態の数を $E_B = E_t - E_A$ に注意しながら E_A で微分し，状態数が最大となる条件を求めよ．
- (2) 状態数が最大となる条件を

$$\frac{\partial}{\partial E_A}(\text{系 A に関する量}) = \frac{\partial}{\partial E_B}(\text{系 B に関する量})$$

と書き直せ．

- (3) この「系 A (または B) に関する量」を定数倍すると，ある物理量になる．その物理量とは何か．

問3 磁束密度 B の磁場中に磁気モーメント μ の粒子を置く．粒子の磁気モーメントが磁場と平行になるか反平行になるかの二つの状態しか取れないとし，それ以外の運動などは考慮しないとする．この二つの状態は $\pm\mu B$ のエネルギーを持つ．このような粒子 N 個 (互いに区別可能) があるとする．ボルツマン定数を k とする．

- (1) この系が一定温度 T に保たれていると考えて，分配関数を求めよ．
- (2) 全エネルギーの期待値を求めよ．これから，高温極限 ($T \rightarrow \infty$) と低温極限 ($T \rightarrow 0$) において系はどのような状態になると考えられるか．
- (3) ヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ．

I 次の文章を読んで、以下の各問に答えよ。

(30 点)

The most important part of any number is the exponent. After that, the next most important number is the first digit of the coefficient (the number that multiplies the power of ten). The second and subsequent digits of the coefficient are just small corrections to the first digit.⁽¹⁾

The number of digits in the coefficient (also called the “number of significant figures”) tells us how well we know that number. For example, if your friend gives you driving directions, there is a tremendous difference between the direction to “drive a couple of dozen miles east and then turn left on Obscure Alley” and the direction to “drive 25.2 miles east and then turn left on Obscure Alley.” The first direction is rather vague and imprecise. You expect to find Obscure Alley somewhere between 12 and 36 miles away. If you miss the left turn, you will probably drive quite far before you turn around to look for it again. The second direction⁽²⁾ is very precise and you expect to find Obscure Alley between 25.1 and 25.3 miles away. If you miss the turn, you will probably turn around by the time you have driven 26 miles. The extra digits in the second set of directions imply that your friend has measured the distance carefully.

Similarly, the silliness of having too many digits is illustrated by the following anecdote. Suppose that you ask a museum guard how old a dinosaur skeleton is. He responds that it is 75 million and 3 (75,000,003) years old. When you look puzzled, he explains that when he started the job three years ago, the skeleton was already 75 million years old.⁽³⁾

Many of us make the same kind of mistake with our calculators. Suppose that we used 23.0 gallons of gasoline to drive 327 miles. If we divide 327 by 23 on our calculator we get 14.2173913... . But this cannot be the answer to our problem.⁽⁴⁾ We did not measure either the miles driven or the fuel consumed to 1 part in a billion so our answer cannot possibly be so precise. Our gas mileage should be 327 miles/23.0 gallons = 14.2 miles/gallon.

(“guesstimation”, L. Weinstein and J. A. Adam, Princeton University Press より抜粋.)

問1 例として 2.58×10^6 を考える。本文中で述べられている以下の(i)から(v)の語句はこの数では何に当たるか、数値で答えよ。(i) the exponent, (ii) the coefficient, (iii) the first digit of the coefficient, (iv) The second and subsequent digits of the coefficient, (v) The number of digits in the coefficient (also called the “number of significant figures”).

問2 下線部 (1) を和訳せよ。

問3 下線部 (2) が指している部分を抜き書きし、これを和訳せよ。

問4 下線部 (3) を和訳せよ。

問5 下線部 (4) で筆者は「これ (this) は我々の問題の答えではない」と述べている。this の指しているものを抜き書きし、これが問題の答えではない理由を説明せよ。

Ⅱ 次の文章を読んで，以下の各問に答えよ。参考のために，文章の最後に単語の意味が説明してある。(30 点)

The space age began 50 years ago with the launch of *Sputnik 1* by the Soviet Union on 4 October 1957. Since that time, some 4500 additional launches have taken place. Today 850 active satellites are in orbit, supporting a wide range of civil and military uses. The US owns and operates roughly half of those satellites.

As a result of this space activity, a tremendous amount of debris has been left orbiting in space. Orbital debris is any human-made object in orbit that no longer serves a useful purpose. It comes in the form of discarded equipment and rocket stages, defunct satellites, bolts and other hardware released during the deployment of satellites, and fragments from the breakup of satellites and rocket stages.

Space debris is the growing concern. With their high speed in orbit, even relatively small pieces of debris can damage or destroy satellites in a collision. Since debris at high altitudes can stay in orbit for decades or longer, it accumulates as more is produced. As the amount grows, the risk of collisions with satellites also grows. If the amount of debris at some altitudes becomes sufficiently large, it could become difficult to use those regions for satellites. There is currently no effective way to remove large amounts of debris from orbit, so controlling the production of debris is essential for preserving the long term use of space.⁽¹⁾

The debris issue gained prominence in January 2007 when China tested an antisatellite weapon that destroyed one of its defunct weather satellites, the *Feng Yun-1C*, at an altitude of about 850 km. The test added significantly to the debris population near that altitude.

The orbiting objects that are sufficiently large are tracked by the US Space Surveillance Network (SSN), which consists of a mix of radars and optical sensors. That system can track objects in low-Earth orbit (defined as altitudes less than 2000 km) with size larger than 5-10 cm and objects in geosynchronous orbit (at an altitude of 35876 km) larger than roughly a meter. Using SSN data, US Strategic Command maintains a catalog of objects; to be in the catalog, the objects must be tracked by the SSN and its origin must be known. Currently the catalog contains some 12000 objects, including about 850 active satellites. The SSN⁽²⁾ also tracks several thousand additional objects whose origins are not known.

Orbital speeds of debris in low-Earth orbit are greater than 7 km/s, and the relative speed of a piece of debris approaching a satellite in an intersecting orbit may be 10 km/s or higher. To give a sense of the potential destructiveness of debris at those speeds, note that a 1-g mass traveling at 10 km/s has the same kinetic energy as the 100-kg mass traveling in excess of 100 km/hr. Alternately, at 10 km/s, the kinetic energy of a mass m is roughly equal to the energy released in an explosion of a mass $10m$ of high explosive.

Debris between 1 mm and 1 cm in size can damage a satellite if it hits a vulnerable area. Shielding can protect against objects of that size, but adding shielding increases the cost both of building satellites and of launching them, and many satellites have minimal shielding.

Debris larger than about 1 cm can seriously damage or destroy a satellite in a collision, and there is no effective shielding against such particles. Debris particles larger than 1cm but too small to be tracked are especially dangerous because satellites are unlikely to have warning to allow them to avoid colliding with such objects. (3)

Debris larger than 10 cm may be massive enough to create large amounts of additional debris in a collision with a satellite or another large piece of debris.

(“Space debris”, D. Wright, Physics Today, October 2007 より抜粋.)

Hints: debris - デブリ, 破壊物の破片, 残骸, くず。

問1 この論説の中で orbital debris とは何であると定義されているか, また具体的にどのようなものであるのか, 述べよ。

問2 下線部 (1) を和訳せよ。

問3 Space debris の問題が近年特に注目を集めるようになった理由は何か説明せよ。

問4 下線部 (2) SSN とは何か, またそれはどのような役割を果たしているのか説明せよ。

問5 約 1 mm から 1 cm の大きさの debris と satellite との衝突に対する対応策とその問題点は何か, 説明せよ。

問6 下線部 (3) を和訳せよ。

Ⅲ 大学での物理学に関する講義や実験で印象に残った内容について，150 語程度の英文で書け。(20 点)

Ⅳ 次の文章を英訳せよ。(20 点)

問 1 1940 年代から 1950 年代にかけて，一般相対論についての研究はほとんどされなかった。その理由の一部は，ほとんどの物理学者たちが主に原子物理学と核物理学に忙殺されていたことと，一般相対論は宇宙論を除いてはあまり物理的に重要ではないと感じられていたからである。

問 2 研究者たちは，ほぼ半世紀の間，鋭い探針の先の電子や x 線や原子を使って，原子スケールの物質構造の像を描いてきた。最近になって，走査型顕微鏡法開発の進歩により，研究者たちは表面の像を描くだけでなく，その局所的な特徴も定量化することが - しばしば 10 nm よりも細かい解像度で - できるようになってきた。

Hints: 鋭い探針の先 - on sharp tips 像を描く - image
走査型顕微鏡法 - scanning probe microscopy