

2010 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門(物理)

(二次募集)

2010 年 2 月 16 日

注意事項

1. すべての解答用紙 (B4 白紙) の左上に受験番号を記入すること。
2. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
3. 解答用紙は片面のみ使用し、縦置き横書きで解答すること。
4. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
5. 問題冊子は、各自持ち帰ること。

I

太陽を質量 M の質点、惑星を質量 m の質点として、以下の各問に答えよ。
ただし、万有引力定数を G とする。 (100 点)

太陽は静止していて、そのまわりを惑星が中心力を受けて運動している場合を考える。

問 1 惑星の角運動量が時間に依存せず一定であることを示せ。

問 2 惑星の運動は太陽を含む平面内で起こることを示せ。

問 3 太陽を原点とし、問 2 の平面内における惑星の位置を二次元極座標 (r, θ) を用いて表す。このとき、惑星の運動エネルギー K とラグランジアン L を r と θ を用いて表せ。

問 4 ラグランジュの方程式から、次式が成り立つことを示せ。ただし、 t は時間、 $\dot{\theta}$ は θ の時間による一階導関数である。

$$m \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0.$$

問 5 問 4 の結果から、定数 h を用いて $r^2 \dot{\theta} = h$ と置ける。また、力学的エネルギーを E と置く。このとき、力学的エネルギーの保存則から

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2E}{mh^2} + \frac{2GM}{h^2}u,$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $u = \frac{1}{r}$ と置いた。

問 6 問 5 の式は

$$\frac{du}{d\theta} = \pm \sqrt{A^2 - (u - B)^2},$$

の形に変形できる。この微分方程式を解くことにより、円錐曲線を表す式

$$r = \frac{\ell}{1 + \varepsilon \cos(\theta + \phi)},$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $\ell = \frac{h^2}{GM}$ 、 $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2 M^2 m}}$ 、 ϕ は積分定数であり、 $1 + \frac{2Eh^2}{G^2 M^2 m} \geq 0$ である。

問 7 この円錐曲線は $0 < \varepsilon < 1$ のとき楕円を表す。惑星の軌道が楕円になるためにエネルギー E が満たさなければならない条件を答えよ。また、 $r = r_0$ のときの惑星の速さを v_0 とすると、 r_0 と v_0 がどのような関係にあるか説明せよ。

次に、太陽と惑星の両方を静止していない質点とみなし、太陽と惑星が互いに引力を作用しあいながら運動する場合を考える。

問 8 太陽と惑星の位置ベクトルをそれぞれ \vec{r}_0 と \vec{r}_1 とし、相対位置のベクトルを $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ とすると、次式が成り立つことを示せ。ただし、 r はベクトル \vec{r} の大きさである。

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{(M + m)m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

II 半径 a の 2 枚の円形極板を向かい合わせて作った電気容量 C の平行平板コンデンサー (図 1), 電気抵抗 R の抵抗, スイッチ S , 起電力 V の電池を直列につないだ RC 回路 (図 2) がある. 最初, スイッチ S は開いており, コンデンサーに蓄えられている電荷は 0 である. この回路に関する以下の各問に答えよ. (100 点)

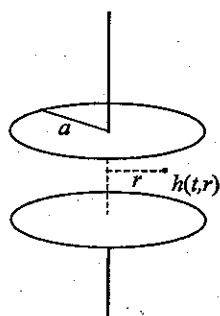


図 1

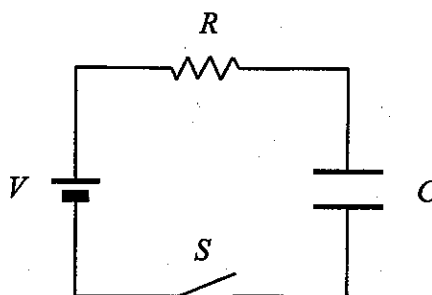


図 2

問 1 時刻 $t = 0$ にスイッチ S を閉じると, 電流 $I(t)$ が回路を流れ, コンデンサーの極板に電荷 $q(t)$ が蓄積した. このとき $I(t)$ と $q(t)$ との関係を示せ.

問 2 電荷 $q(t)$ の時間変化を満足する方程式が

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}q(t) + \frac{V}{R}$$

で表されることを示せ.

問 3 方程式を解いて, 電荷 $q(t)$ を求めよ. また, $q(t)$ と時間 t との関係を図示せよ.

問 4 時間 t が十分経過した後の電荷 $q(\infty)$ を求めよ.

問 5 回路を流れる電流 $I(t)$ を求めよ.

問 6 回路に電流 $I(t)$ が流れているとき, 導線から垂直に距離 r だけ離れた位置に作る磁場 $H(t, r)$ の大きさをアンペールの法則を用いて求めよ. また, アンペールの法則を記述して, 物理的意味を述べよ.

問 7 コンデンサーに蓄えられる電荷 $q(t)$ を使って, コンデンサー極板間の電束密度 $D(t)$ の大きさをガウスの法則を用いて求めよ. ただし, 端の影響は無視できるものとする. また, ガウスの法則を記述して, 物理的意味を述べよ.

問 8 コンデンサー極板間に流れる変位電流密度 $i_D(t)$ を求めよ.

問 9 図 1 のように, コンデンサーの中心線からの距離を r とするとき, $0 < r < a$ と $a < r$ の領域におけるコンデンサー極板間の磁場 $h(t, r)$ の大きさを求めよ.

III x 軸上を運動する自由粒子の波動関数について考える。時刻 $t = 0$ において規格化された波束が

$$\Psi(t=0, x) = C \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_0^2} + ik_0x\right)$$

で与えられるとする。但し、 C, σ_0, k_0 は正の実数とする。以下の問に答えなさい。但し、必要があれば、次のガウス積分の公式（但し、 a は $a > 0$ である定数とする） $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$, $\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-ax^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を用いなさい。

(100 点)

1. 粒子の存在確率を 1 に規格化する規格化条件を使って、定数 C を σ_0 で表しなさい。
2. $\Psi(t=0, x)$ を用いて、運動量 p の期待値 $\langle p \rangle$ を求めなさい。
3. $\Psi(t=0, x)$ を用いて、位置と運動量の不確定さを $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ で定義するとき、ハイゼンベルクの不確定性関係の等号成立のときの等式 $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ が成り立つことを証明しなさい。
4. 時刻 $t = 0$ で与えられた波束 $\Psi(t=0, x)$ のその後の時間発展について調べたい。以下のステップに従って、任意の時刻での波動関数 $\Psi(t, x)$ を求めなさい。

(a) 波束 $\Psi(t=0, x)$ を固有関数 $L^{-\frac{1}{2}} \exp(ikx)$ で Fourier 展開し、

$$\Psi(t=0, x) = \sum_k f_k L^{-\frac{1}{2}} \exp(ikx),$$

と表すと、展開係数 f_k は、

$$f_k = A \exp\left[-\frac{\sigma_0^2}{2}(k - k_0)^2\right],$$

と表されることを示しなさい。但し、ここで A は σ_0, L に依存するある定数である。ちなみに上で x 積分を実行する場合、波束の性質から積分範囲を $-\infty$ から ∞ まで伸ばして良いことに注意。

(b) 任意の時刻 t の波動関数を求めるためには、シュレディンガー方程式の変数分離解より時間依存性が、 $\exp(-iE_k t)$ (但し、 $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$) と決まるので、Fourier 展開を

$$\Psi(t, x) = \sum_k f_k \exp(-iE_k t) L^{-\frac{1}{2}} \exp(ikx),$$

と表す。ここで、 L は十分大きいとして、 $\sum_k \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk$ と置き換え、 $\Psi(t, x)$ を求めなさい。

(c) 実は具体的に計算しなくても、シュレディンガー方程式の形から $\Psi(t, x)$ の定性的な振る舞いは理解できる。この定性的な振る舞いを簡単に答えなさい。

IV

以下の各問に答えよ。

(100 点)

問 1 始状態 (T_1, V_1) にある n モルの理想気体を体積 V_2 に真空中に断熱自由膨張させた。到達した状態を終状態と呼ぶことにする。

- (1) この過程で気体に加えられた熱量と仕事を求めよ。
- (2) 内部エネルギーの変化量 ΔU を求めよ。また、終状態の温度を求めよ。
- (3) 理想気体のエントロピーの全微分は

$$dS = \frac{C_V}{T} dT + \frac{p}{T} dV$$

と与えられることが分かっている。この過程におけるエントロピーの変化量 ΔS を求めよ。

- (4) この過程が可逆であるか、不可逆であるかについて根拠を明らかにして論じよ。
- (5) 理想気体を温度 T_1 、体積 V_1 の状態から温度 T_1 、体積 V_2 の状態に等温準静的に膨張させる過程は、今問題にしている過程と始状態も終状態も同じである。しかしながら、一方は可逆過程であり、他方は不可逆過程である。どうしてこのような違いが生じるのか説明せよ。

問 2 質量 m の単原子分子 N 個からなる古典理想気体が、体積 V の容器に入れている。

問題を解くときに、必要なら、次の 2 つの公式

$$N! \approx \left(\frac{N}{e}\right)^N \quad (N \gg 1), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$$

を使ってもよい。

- (1) この気体のハミルトニアン(ハミルトン関数) H を書け。
- (2) この気体の分配関数 Z は、

$$Z = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}N}$$

で与えられる。ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。ただし、ヘルムホルツの自由エネルギーが示量性の量(相加的な量)であることが明白になるように表すこと。

- (3) 状態方程式、および内部エネルギー E を求めよ。
- (4) 理想気体の古典統計による取り扱いはある温度以下になると破綻する。その温度のおおざっぱな値を示し、なぜ破綻するのか簡潔に説明せよ。ただし、古典理想気体のエントロピー S は

$$S = \frac{3}{2} Nk_B \log \left[\frac{e^{\frac{5}{2}}}{2\pi} \frac{mk_B T}{\hbar^2} \left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{2}{3}} \right]$$

で与えられる。

- (5) 単原子分子理想気体の分配関数が(2)のように与えられることを、分配関数の定義に基づいて具体的に計算することにより示せ。

2010 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

(二次募集)

2010 年 2 月 16 日

注意事項

1. すべての解答用紙 (B4 白紙) の左上に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみ使用し、縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は、各自持ち帰ること。

I 次の英文を読んで、各問に答えよ。なお、参考のために文章の最後に単語の意味が説明してある。

(50点)

“Shortage Slows a Program to Detect Nuclear Bombs”

The Department of Homeland Security has spent \$230 million to develop better technology for detecting smuggled nuclear bombs but has had to stop deploying the new machines because the United States has run out of a crucial raw material, experts say. (1)

The ingredient is helium 3, an unusual (2) form of the element that is formed when tritium, an ingredient of hydrogen bombs, decays. But the government mostly stopped making tritium in 1989.

“I have not heard any explanation of why this was not entirely foreseeable,” said Representative Brad Miller, Democrat of North Carolina, who is the chairman of a House subcommittee that is investigating the problem.

An official from the Homeland Security Department testified last week before Mr. Miller’s panel, the Investigations and Oversight Subcommittee of the House Science Committee, that demand for helium 3 appeared to be 10 times the supply.

Some government agencies, Mr. Miller said, did anticipate a crisis, but the Homeland Security Department appears not to have gotten the message.

The department had planned a worldwide network using the new detectors, which were supposed to detect plutonium or uranium in shipping containers. The government wanted 1,300 to 1,400 machines, which cost \$800,000 each, for use in ports around the world to thwart terrorists who might try to deliver a nuclear bomb to a big city by stashing it in one of the millions of containers that enter the United States every year. (3)

At the White House, Steve Fetter, an assistant director of the Office of Science and Technology Policy, said the helium 3 problem was short-term because other technologies would be developed. But, he said, while the government had a large surplus of helium 3 at the end of the cold war, “people should have been aware that this was a one-time windfall and was not sustainable.”

Helium 3 is not hazardous or even chemically reactive, and it is not the only material that can be used for neutron detection. The Homeland Security Department has older equipment that can look for radioactivity, but it does not differentiate well between bomb fuel and innocuous materials that naturally emit radiation - like cat litter, ceramic tiles and bananas - and sounds false alarms more often. (4)

Earlier this year, the Pacific Northwest National Laboratory, part of the Energy Department, said in a report, “No other currently available detection technology offers the stability, sensitivity and gamma/neutron discrimination” of detectors using helium 3.

Helium 3 is used to detect neutrons, the subatomic particles that sustain the chain reaction in a bomb or a reactor. Plutonium, the favorite bomb-making material of most governments with nuclear weapons, intermittently gives off neutrons, which are harder for a smuggler to hide than other forms of radiation. (Detecting the alternative bomb fuel, enriched uranium, is a separate, difficult problem, experts say.) (5)

Helium 3 is rare in nature, but the Energy Department accumulated a substantial stockpile as a byproduct of maintaining nuclear weapons. Those weapons use tritium, which is the form of hydrogen used in the H-bomb, but the hydrogen decays into helium 3 at the rate of 5.5 percent a year. For that reason the tritium in each bomb has to be removed, purified and replenished every few years. It is purified by removing the helium 3.

The declining supply is also needed for physics research and medical diagnostics.

The Energy Department used to make tritium in reactors at its Savannah River Site, near Aiken, S.C., but those were shut after many operational problems. It enlisted the Tennessee Valley Authority to make some tritium in a power reactor, using the same method it had used at Savannah River, breaking up another material, a form of lithium, with neutrons. One of the fragments is tritium. But that project has run into technical problems as well.

Mr. Miller estimated that demand for helium 3 was about 65,000 liters per year through 2013 and that total production by the only two countries that produce it in usable form, the United States and Russia, was only about 20,000 liters. In a letter to President Obama, he called the shortage “a national crisis” (6) and said the price had jumped to \$2,000 a liter from \$100 in the last few years, which threatens scientific research.

(“Shortage Slows a Program to Detect Nuclear Bombs”, By MATTHEW L. WALD, The New York Times より)

Hints: Helium 3 質量数3のヘリウム, tritium 三重水素, The Department of Homeland Security 国家安全保障省, panel 委員会, House subcommittee 下院小委員会, the Office of Science and Technology Policy 科学技術政策局, windfall (収穫前に風で落ちた) 果物, S.C. サウス・カロライナ州

問1 下線部(1)を和訳せよ。

問2 下線部(2)に unusual と記述してあるが、どういう意味で unusual なのか説明せよ。

問3 下線部(3)を和訳せよ。

問4 下線部(4)を和訳せよ。

問5 下線部(5)を和訳せよ。

問6 ヘリウム3は、どのような方法で生成されると本文中で述べられているか？

問7 三重水素の供給方法には2種類あると本文中に述べられている。2種類の方法を述べよ。

問8 下線部(6)に関して、オバマ大統領への手紙では、ある問題が“a national crisis”と呼ばれた。一体何が“国難”であるのか説明せよ。また、何故、“国難”に至ったのかについての経緯を簡単にまとめよ。

II 何故，大学院進学を希望するのか，150語程度の英文で表現せよ。

(20点)

III つぎの文章を英訳せよ。

(30点)

問1 ほとんどの物理学者は J. J. Thomson が電子を発見したと信じており，彼らの多くはそれが 1987 年に起こったことを知っている。もっとも，信頼できるブリタニカ辞典の最近の版では，代わりに 1895 年としているが。

問2 電気って何？J. J. Thomson が電子を発見して以来 100 年以上経ったけれども，この無邪気な質問は，絶えず我々を魅了する。導体中の電子は新しいタイプの流体，即ち“量子流体”を形成し，そこでは粒子は高度に協力的な方法で移動する。

問3 金属における電子の研究は，凝縮系物理学の理解の発展に大いに貢献した。時々，これは，超伝導で生じたような，系の新しい電子の基底状態の発見という形をとる。一方，またある時には，遷移金属の電氣的磁氣的特性の場合のように，我々はよりよいモデルや計算手法の必要性を注意喚起される。

Hints: ブリタニカ辞典 Encyclopedia Britannica, 量子流体 quantum fluid, 凝縮系 condensed matter, 基底状態 ground state, 遷移金属 transition metals, 超伝導 superconductivity