

2011 年度  
琉球大学大学院理工学研究科  
博士前期課程  
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題  
専門（物理）

2010 年 8 月 23 日

注意事項

1. 解答用紙(B4 白紙)は片面のみ使用し, 縦置き横書きで解答すること。
2. すべての解答用紙の左上に受験番号を記入すること。
3. 大問毎に別々の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
5. 問題冊子は, 各自持ち帰ること。

I

図1のように、半径  $r$  で表面の摩擦と厚みを無視できる半球殻があり、そこに質量  $m$  の質点を置いて運動させる。半球殻の中心  $O$  から頂点へ向かう鉛直軸を  $z$  軸とし、中心  $O$  から赤道方向に向かう水平軸を  $x$  軸とする。図のように  $z$  軸からの天頂角を  $\theta$ ,  $x$  軸からの方位角を  $\varphi$  とする。  $x$  軸がつねに水平面と平行になるように半球殻を設置し、重力加速度を  $g$  として、以下の各問に答えよ。

(100点)

半球殻を図1のように固定して、質点を半球頂点に置き、 $x$  軸方向 ( $\varphi = 0$ ) に初速  $v_0$  で斜面に沿って運動を始めた。

- 問1 質点が斜面に沿って角度  $\theta$  にあるときの速度  $v$  の大きさを求めよ。
- 問2 そのとき、球面がおよぼす垂直抗力  $N$  を求めよ。
- 問3 質点が球面から離れるとき、水平面からの高さ  $h$  を求めよ。

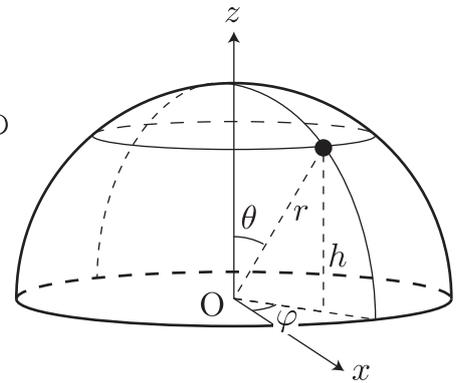


図1

次に、半球殻を図2のように固定して、質点を半球内側に置く。

- 問4 質点が球面上を運動するとき、その速度  $v$  は  $\theta$  方向、 $\varphi$  方向の単位ベクトル  $e_\theta$ ,  $e_\varphi$  を用いて  $v = r\dot{\theta} e_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi} e_\varphi$  と表せる。質点の運動エネルギーと位置エネルギーを求めよ。
- 問5 Lagrange の方法により、運動方程式を求めよ。
- 問6  $z$  軸方向の角運動量が保存されることを示せ。
- 問7 水平方向に初速度を与えたところ、 $\theta = \theta_0$  の水平面上を回り続けた。このときの角速度  $\dot{\varphi}$  を求めよ。
- 問8 半球の最下点付近で微小振動をするとき、その周期を求めよ。ただし、質点は  $\varphi = \varphi_0$  の鉛直面内で運動するとし、 $|\theta| \ll 1$  のとき  $\sin\theta \approx \theta$  とする。

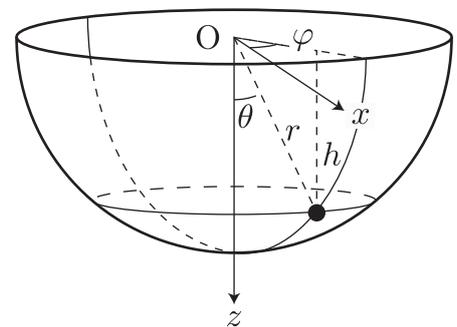


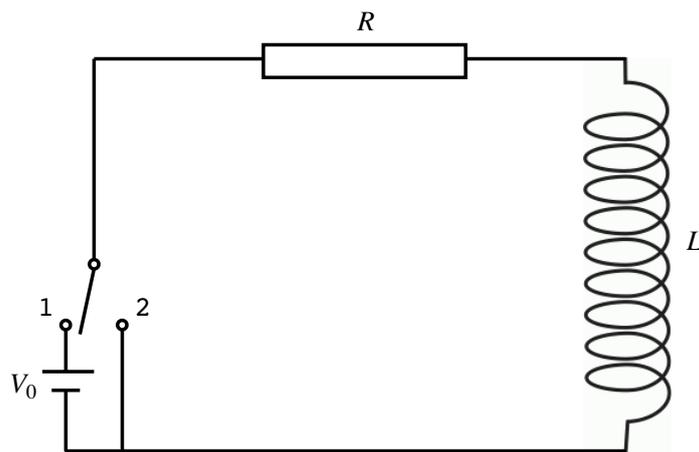
図2

## II

以下の各問に答えよ。

(100 点)

- 問1 コイルに流れる電流が変化するとそのコイルを貫く磁束が変化するため、この電流の変化を妨げるような誘導起電力が生ずる。断面積  $S$ 、長さ  $l$  の十分に長い鉄心に単位長あたり  $n$  回の割合で導線を巻いた。このコイルのインダクタンス  $L$  を求めよ。ただし、鉄心の透磁率は  $\mu$  である。
- 問2 次にインダクタンス  $L$  を含んだ回路について考える。図 1 に示したように、 $L$ 、直流抵抗  $R$  および電池  $V_0$  をつなぐ。

図 1:  $RL$  回路。

- (1) スイッチを 1 につないだ後の電流  $I$  について考える。ある瞬間  $t$  において成り立つオームの法則 (微分方程式) をかけ。
- (2) 上で得られた微分方程式を解き、 $I$  の時間変化を図示せよ。ただし、 $t = 0$  で  $I = 0$  である。
- (3) 十分時間がたった後、スイッチを 2 につないだ。スイッチを 2 につないだ後の電流は、初期条件を  $t = 0$  で  $I = V_0/R$  として上の微分方程式を解き、

$$I = \frac{V_0}{R} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

を得る。この式は、 $L$  が大きくなると電流変化が緩やかになることを示している。すなわち、インダクタンス  $L$  は、電磁誘導によって電流の急激な変化を妨げるように働くことを示している。この回路の時定数  $\tau$  は、 $\tau = L/R$  で与えられる。これは、上式で表される電流がどのような値になる時間か。

問3 図2に示したホイートストンブリッジ回路は、抵抗を精度良く測定するために用いられる回路で、一般に直流電源を用いる。図で  $P$  が未知抵抗、 $Q$  および  $R$  が既知抵抗、 $S$  は可変抵抗である。また、 $G$  は検流計である。

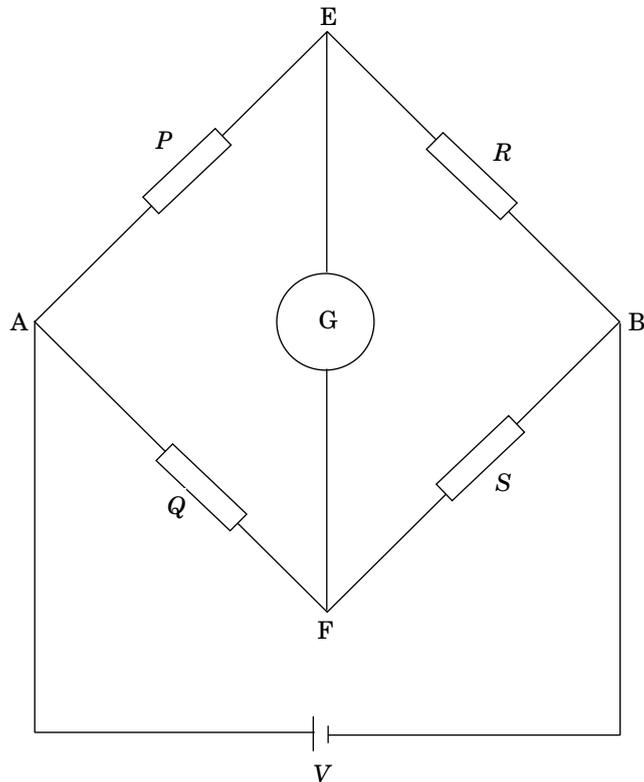


図 2: ホイートストンブリッジ。

- (1) EF 間に電流が流れないとき、抵抗間には次の関係が成り立つことを示せ。

$$PS = QR \quad (1)$$

- (2) 図2の回路は、材料や構造物に貼り付けて微小な伸び縮みを検出するためのセンサーであるひずみゲージ(ストレインゲージ)の抵抗測定に使用される。このひずみゲージに使用されている抵抗体の断面積を  $A$ 、長さを  $l$  とする。抵抗体がひずみのため、長さが  $l$  から  $l + \Delta l$  に変化したとき、抵抗体の抵抗が  $R$  から  $R + \Delta R$  に変化した。抵抗体の体積  $V (= Al)$  はひずみの前後で変化しないものとする、ひずみ  $\varepsilon = \Delta l / l$  と抵抗変化  $\Delta R$  の間に以下の関係が成り立つことを示せ。ただし、抵抗体の電気抵抗率はひずみにより変化しないものとする。また、 $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon$  とし、高次の微量は無視する。

$$\Delta R / R = 2\varepsilon$$

- (3) インダクタンス  $L$  のコイルおよびキャパシタンス  $C$  のコンデンサーを含む交流回路においても、定常状態では図 2 の直流抵抗の代わりに対応する複素インピーダンス  $\dot{P}$ ,  $\dot{Q}$ ,  $\dot{R}$  および  $\dot{S}$  を用いて式 (1) と同様な関係が得られる。すなわち、

$$\dot{P}\dot{S} = \dot{Q}\dot{R}$$

である。この関係を用いて、インダクタンス  $L$  を測定する交流回路(マックスウェルブリッジ)を図 3 に示す。この回路で EF 間に電流が流れなくなるとき、直流抵抗  $r$  とインダクタンス  $L$  は、 $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  および  $C$  を用いてどのように表されるか。ただし、M は交流メーターである。

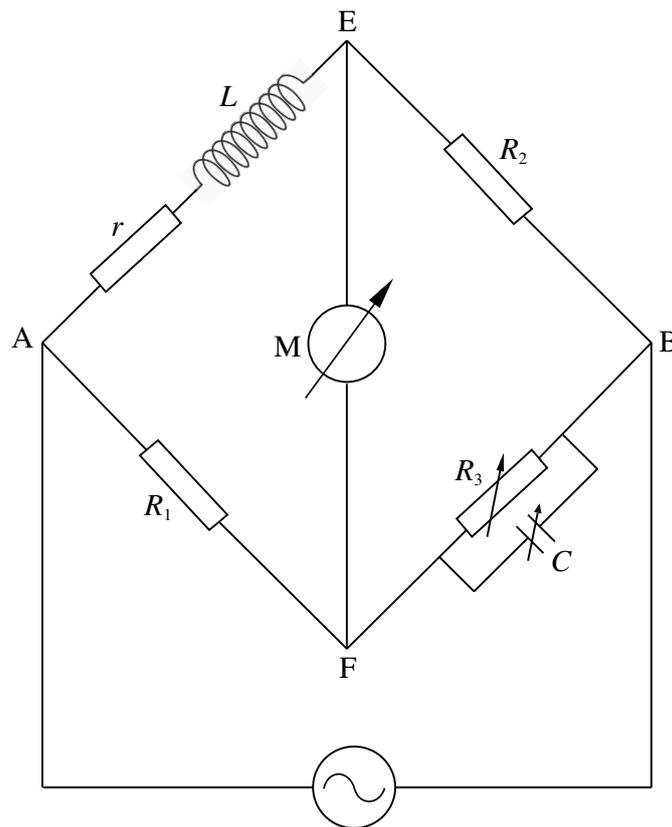


図 3: マックスウェルブリッジ。

III 水素原子における電子のエネルギー固有値  $E$  と固有関数  $\psi(\mathbf{r})$  を決めるシュレディンガー方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

で与えられる．ここで， $m$  ( $e$ ) は電子の質量 (電荷の大きさ) を表し， $\epsilon_0$  と  $\hbar$  は，それぞれ，真空の誘電率，プランク定数を  $2\pi$  で割ったものである．また，陽子の位置を原点とする． (100点)

問1 波動関数が動径方向の座標  $r$  だけの関数  $\psi(r)$  としたとき，固有値方程式 (1) は

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \left(\alpha^2 - \frac{\beta}{r}\right)\right]\psi(r) = 0 \quad (2)$$

のように表されることを示せ．ここに， $\alpha, \beta$  は  $\alpha = \sqrt{2m|E|}/\hbar$ ， $\beta = me^2/(2\pi\epsilon_0\hbar^2)$  である．

問2 電子の基底状態は  $A$  を規格化定数として  $\psi_0(r) = Ae^{-\alpha r}$  で与えられる．基底状態の固有値方程式 (2) を解き，そのエネルギー固有値  $E_0$  は

$$E_0 = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \quad (3)$$

で与えられることを示せ．

問3 同じ体系が古典力学に従うとする．電子が半径  $r$  の円運動を行っているとするとき，遠心力とクーロン力の釣り合いの式を用いて，電子のエネルギーは

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (4)$$

で与えられることを示せ．そして (3) と (4) を比較して基底状態  $\psi_0(r)$  に対応する電子の古典軌道半径  $a_0$  (ボーア半径) を求めよ．

問4 ボーア半径  $a_0$  が有限であること，即ち，電子が原子核に落ち込まない理由を不確定性関係に基づいて説明せよ．

問5 電子の角運動量演算子は  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times (-i\hbar\nabla)$  で与えられる．このとき，基底状態  $\psi_0(r)$  における角運動量の値を求めよ．

問6 節のある固有関数  $\psi_1(r) = A(1 + c_1r)e^{-\alpha r}$  に対するエネルギー固有値は  $E_1 = -(e^2/8\pi\epsilon_0) \cdot 1/4a_0$  で与えられる． $\psi_1(r)$  状態のエネルギー  $E_1$  が  $\psi_0$  状態のエネルギー  $E_0$  よりも高くなる物理的理由を述べよ．

**IV**

以下の各問に答えよ.

(100点)

問1 張力が $\sigma$ で長さが $L$ のまっすぐに伸びた針金において, 温度 $T$ で外から熱量 $d'Q$ を加えたところ,  $dL$ だけ伸びて外から準静的に仕事 $d'W$ がなされた. 以下の各問に答えよ.

(1) 外から入ってくる熱量 $d'Q$ は系のエントロピー $S$ の変化に比例し $d'Q = TdS$ で与えられる. 準静的仕事が $d'W = \sigma dL$ であるとき, 針金の内部エネルギーの変化 $dE$ を $T, S, L, \sigma$ で表せ.

(2) 系のギブスの自由エネルギーを $G = E - TS - L\sigma$ とすると,  $G$ のルジャンドル変換 $dG = -SdT - Ld\sigma$ を示せ.

(3) マクスウェルの関係式 $\left(\frac{\partial S}{\partial \sigma}\right)_T = \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_\sigma$ を示せ.

(4) 張力 $\sigma$ を一定に保った場合の比熱を $C_\sigma$ とすると, 熱量が $d'Q = C_\sigma dT + T\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_\sigma d\sigma$

で与えられることを示せ. ここに,  $C_\sigma = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\sigma$ である.

(5) 断熱変化において, 張力 $\sigma$ の増加および $\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_\sigma > 0$ を考える. このとき, 系の温度がどうなるか述べよ.

問2 互いに独立な1次元調和振動子の $N$ 個の理想的な集団を考える. 量子力学によれば, 調和振動子1個における系のハミルトニアンは, 変位を $x$ , 振動子の質量を $m$ , 角振動数を $\omega$ , プランク定数を $2\pi$ で割った値を $\hbar$ とすると,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

で記述される. このとき, 量子数 $n$ における固有関数 $\varphi_n$ はシュレーディンガー方程式

$$H\varphi_n = \varepsilon_n \varphi_n$$

を満たし, エネルギー $\varepsilon_n$ は

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

で与えられる. 以下の各問に答えよ.

(1) 調和振動子1個の状態は量子数 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ で特徴づけられる. このとき,  $N$ 個の独立な系の分配関数 $Z$ が次式で表されることを示せ. ただし,  $k_B$ をボルツマン定数,

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$Z = \frac{1}{2^N \sinh^N \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right)}$$

(2) 系のヘルムホルツの自由エネルギー  $F$  を求めよ.

(3) 系の内部エネルギー  $E$  を計算したところ,

$$E = \frac{N\hbar\omega}{2} + \frac{N\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}$$

であった. 高温領域 ( $\beta\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \rightarrow 0$ ) において, 古典系での内部エネルギー

$E = Nk_B T$  に一致することを示せ. 必要ならば,  $\exp(x) \approx 1 + x$ ,  $|x| \ll 1$  を用いてよい.

(4) 系の定積比熱  $C_V$  は  $E$  を用いて,  $C_V = \left( \frac{dE}{dT} \right)_V$  で与えられる. このとき, 低温領域

( $\frac{k_B T}{\hbar\omega} \rightarrow 0$ ) での  $C_V$  の振る舞いを説明せよ. 必要ならば,  $\sinh(x) \approx \exp(x)$ ,  $x \gg 1$  を用いてよい.

2011 年度  
琉球大学大学院理工学研究科  
博士前期課程  
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題  
英語

2010 年 8 月 23 日

注意事項

1. 解答用紙(B4 白紙)は片面のみ使用し, 縦置き横書きで解答すること。
2. すべての解答用紙の左上に受験番号を記入すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は, 各自持ち帰ること。

I 次の英文を読んで各問に答えよ。

(30点)

1) Hayabusa was an unmanned spacecraft developed by the JAXA to return a sample of material from a small near-Earth asteroid named 25143 Itokawa to Earth for further analysis. Hayabusa, was launched on 9 May 2003 and rendezvoused with Itokawa in mid-September 2005. After arriving at Itokawa, Hayabusa studied the asteroid's shape, spin, topography, colour, composition, density, and history.

2) In November 2005, it landed on the asteroid and attempted to collect samples but it is not clear whether the sampling mechanism worked as intended. Nevertheless, there is a high probability that some dust was trapped in the sampling chamber during contact with the asteroid, so the chamber was sealed, and the spacecraft returned to Earth on 13 June 2010.

Hayabusa carried a tiny mini-lander (weighing only 591 g, and approximately 10 cm tall by 12 cm in diameter) named "MINERVA". 3) This solar-powered vehicle was designed to take advantage of Itokawa's very low gravity by using an internal flywheel assembly to hop across the surface of the asteroid, relaying images from its cameras to Hayabusa whenever the two spacecraft were in sight of one another.

MINERVA was deployed on 12 November 2005. 4) The lander release command was sent from Earth, but before the command could arrive, Hayabusa's altimeter measured its distance from Itokawa to be 44 m and thus started an automatic altitude keeping sequence. As a result, when the MINERVA release command arrived, MINERVA was released while the probe was ascending and at a higher altitude than intended, so that it escaped Itokawa's gravitational pull and tumbled into space.

(Wikipedia: Hayabusa より引用)

spacecraft: 宇宙船, develop: 開発する, 製作する, JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency): 宇宙航空研究開発機構, asteroid: 小惑星, launch: 打ち上げる, 25143 Itokawa: 太陽系の小惑星, Rendezvous: ランデブーする, topography: 地形, 地形学, chamber: 箱, 部屋, lander: (宇宙)着陸船, MINERVA (Micro/Nano Experimental Robot Vehicle for Asteroid): 小型ロボット着陸船, take advantage of: 利用する, gravity: 重力, flywheel: はずみ車, assembly: (組み立て) 部品, relay: 中継する, images: 映像, 画像, in sight of: の見える所に, deploy: 配置する, release: 放出, 解除, altimeter: 高度計, altitude: 高さ, 高度, sequence: 一連の動作, 一連のもの(事柄), 連続するもの(事柄), probe: 宇宙探測機, 探査, 探針, tumble: 転がり落ちる.

問1 下線部 1) を和訳せよ。

問2 Hayabusa は, Itokawa に到着後, 何を調べたかを述べよ。

問3 下線部 2) を和訳せよ.

問4 下線部 3) を和訳せよ.

問5 下線部 4) を和訳せよ.

問6 MINERVA はどうして Itokawa に着地できなかったのか. 理由を述べよ.

Ⅱ 次の英文を読んで各問に答えよ.

(40点)

<sup>1)</sup> During the early 1800's, scientists discovered that different elements can belong to chemical families. They listed the elements in order of their increasing atomic masses. When they did this, the scientists discovered that certain physical and chemical properties were repeated at regular intervals.

In 1872, a Russian chemist, Dmitri Mendeleev, tried to arrange the elements in another way. He arranged the elements in the order of their increasing atomic masses.

<sup>2)</sup> He discovered that when he arranged all the elements in a table, elements in the same chemical family were found in the same vertical column. Elements in each family are found at particular periods or places when you put them in order. Mendeleev's chart is called the periodic chart of the elements.

This periodic chart is useful in learning about the chemical elements. <sup>3)</sup> Each vertical column of the chart lists elements with similar properties. For example, the noble gases are found in a single column at the right side. Next to the noble gases is the column containing the halogens. The alkali metals are found in a single column at the far left of the chart. All the columns between the right and left sides of the chart list elements with some similarities.

The two long rows at the bottom contain elements that would all fit in the third column of the chart. They are placed here to avoid making a very long, single column. Hydrogen is usually put alone at the top of the chart since it resembles both the alkali metals and the halogens.

<sup>4)</sup> Each horizontal row of the chart is called a period. Within each row or period, the properties of the elements generally repeat periodically. Each row begins with an alkali metal element and ends with a noble gas.

(W. L. Ramsey, *et al.*: *Holt Physical Science*, Holt, Rinehart and Winston, Publishers (1982)より引用)

問1 (1) 下線部 1)を和訳せよ.

(2) 彼らは, 下線部 1)をすることによって何を見出したか.

問2 下線部 2)を和訳せよ.

問3 下線部 3)を和訳せよ.

問4 下部に置かれた二つの "long row"は, 本当はどこに置かれるべきなのか.  
また, なぜそれを避けたのかを答えよ.

問5 水素が, 表の初めに単独で置かれる理由は何と言っているか. 答えよ.

問6 下線部 4)を和訳せよ.

Ⅲ 次の文章を英訳せよ.

(30点)

- 1) 実験の目的は, 粒子が金原子に衝突したとき, 粒子の軌跡がどのように変化するかをみることであった.
- 2) ほとんどの粒子がそこに何もないかのように金をまっすぐに通り抜けた. しかし, ほんの少しの粒子は, 金が固体であるかのように跳ね返された.  
跳ね返る: bounce off, rebound.
- 3) この実験は原子についての新しいモデルを導いた. このモデルでは, 原子の質量のほとんどはその中心にある大変小さなコアーにあることがわかった. この原子の中心コアーは原子核と呼ばれる.
- 4) すべての陽子と中性子は, 原子核中に見出された. 原子核は正電荷をもつ陽子を含むので, 正に帯電している.  
陽子: proton, 中性子: neutron, 原子核: nucleus.