$\boxed{\text{I}}$ 以下の各問に答えよ.

(100 点)

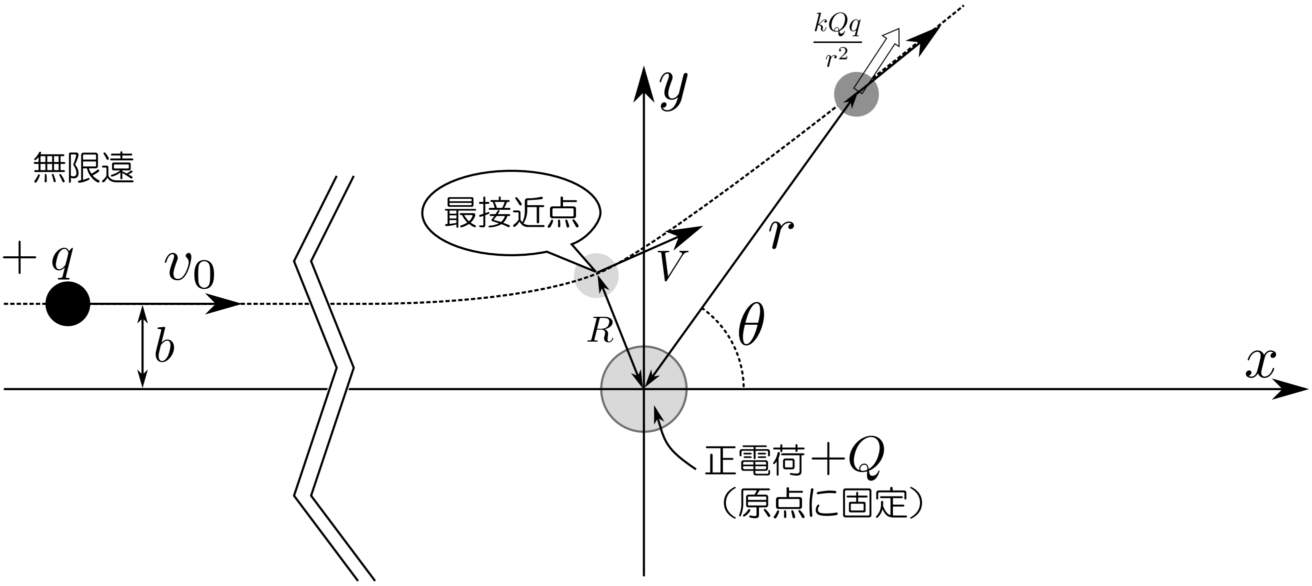
問 1 質量 m の質点が、力 $\vec{F}$ を受けながら運動している。質点の位置はベクトル $\vec{x}(t)$ によって表されているとする。

(1) 運動方程式を書け。

(2) 力 $\vec{F}$ と質点の速度 $\vec{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t}$ が直交している時、運動エネルギー $\dfrac{1}{2}m|\vec{v}(t)|^2$ が一定であることを計算により示せ。

(3) 力 $\vec{F}$ と位置ベクトル $\vec{x}(t)$ が平行である時、原点を中心とした角運動量 $\vec{L}(t) = \vec{x}(t) \times \left(m\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t}\right)$ が保存することを計算により示せ。

問 2 xy 平面上の原点に正電荷 Q を固定し、無限遠から正電荷 q を持つ質量 m の粒子を図のように入射させた。図の通りに極座標 (r,θ) を置き、運動は全てこの二次元面上で起こるものとする。無限遠に位置していた時、粒子の速度は x 軸正方向を向き、速さ v_0 であり、その位置は x 軸から y 方向に $b(\neq 0)$ だけ離れていた。



この粒子は k を正の定数として $\dfrac{kQq}{r}$ の位置エネルギーを持ち、$\dfrac{kQq}{r^2}$ の力が原点から離れる方向に働く。

(1) 平面極座標 (r,θ) を使って、この粒子のラグランジアンを記せ。

(2) 平面デカルト座標 (x,y) を使って、この粒子のラグランジアンを記せ。

(3) (1) の答もしくは (2) の答のどちらかから、角運動量の保存則

$$mr^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = (\text{一定}) \qquad \text{もしくは、} \qquad m\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = (\text{一定})$$

を導け。

(4) エネルギー保存則と角運動量保存則から、粒子が最も正電荷 Q に近づいた点での距離（図の R）を求めよ。導出の過程も示せ。

II　以下の各問に答えよ。　（100 点）

問１　真空中に置いた半径 a の導体球に電荷 Q を与えた。真空の誘電率を ε_0 とする。

(1) 球の中心からの距離 r の関数として，電場の強さ E および電位 ϕ を求めよ。ただし，$r\to\infty$ で，$\phi\to 0$ とする。

(2) 静電場そのものにエネルギーが蓄えられているものとみなし，電場の全エネルギー U を求めよ。電場のエネルギー密度 u_E は，次の関係式で与えられる。

$$u_E=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

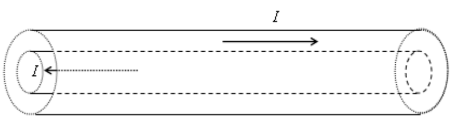
次に，この球を半径 b（$a<b$）の薄い導体球殻で覆った。球と球殻の中心は一致している。球殻には電荷 $-Q$ を与えた。

(3) 中心からの距離 r の関数として，電場の強さ E を求めよ。

(4) 球と球殻の間の電位差 V を求めよ。

(5) 電気容量 C を求めよ。

問２　下図のように，真空中に，薄い導体でつくった半径 a と b（$a<b$）の無限に長い中空円筒を，中心軸を一致させて置いた。図のように，それぞれの円筒に同じ強さの電流 I を逆向きに流した。真空の透磁率を μ_0 とする。



(1) 中心軸からの距離 r の関数として，磁場 B を求めよ。

次に，２つの円筒の長さ ℓ の部分に着目する。

(2) この部分の自己インダクタンス L を求めよ。

(3) この部分の磁場に蓄えられる全エネルギー U を求めよ。磁場のエネルギー密度 u_B は，次の関係式で与えられる。

$$u_B=\frac{1}{2\mu_0}B^2$$

$\boxed{\textbf{III}}$ z 軸の正の向きに静磁場 B $(B>0)$ をかけたとき，質量 m，電荷 $-e$ の電子のスピンの運動を考える．磁場による電子のハミルトニアンは

$$H=\frac{e\hbar}{2m}\,\sigma_z B=\hbar\omega_0\sigma_z$$

と表される．ここで，$\hbar=h/(2\pi)$ (h はプランク定数)，$\omega_0=eB/(2m)$ である．また，σ_z はパウリ行列である．ここでは，ハミルトニアンにおいて運動エネルギーは考えない．以下の各問に答えよ． (100 点)

問 1 波動関数 $\psi(t)$（t は時間）の満たす時間に依存するシュレーディンガー方程式は $i\hbar d\psi(t)/dt = H\psi(t) = \hbar\omega_0\sigma_z\psi(t)$ である．H は 2×2 行列なので，$\psi(t)$ は 2 成分持たなければならない．波動関数を $\psi(t)=\binom{a}{b}e^{-iEt/\hbar}$ ($a,\ b$ は定数) とおくとき，エネルギー固有値が $E=\hbar\omega_0,\ -\hbar\omega_0$ となることを示せ．また，それらに属する規格化された固有関数はそれぞれ

$$\psi_1(t)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\omega_0 t}=\begin{pmatrix}e^{-i\omega_0 t}\\0\end{pmatrix},\qquad \psi_2(t)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\omega_0 t}=\begin{pmatrix}0\\e^{i\omega_0 t}\end{pmatrix}$$

となることを示せ．

問 2 σ_x の固有値は ±1 であり，固有値 1 に属する規格化された固有関数は $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ であることを示せ．

問 3 時刻 t における波動関数は $\psi(t)=c_1\psi_1(t)+c_2\psi_2(t)=\begin{pmatrix}c_1e^{-i\omega_0 t}\\c_2e^{i\omega_0 t}\end{pmatrix}$ ($c_1,\ c_2$ は定数) で与えられる．初期状態 $\psi(0)$ が σ_x の固有値 1 に属する固有状態 $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ であったとするとき，

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-i\omega_0 t}\\e^{i\omega_0 t}\end{pmatrix}$$

を示せ．

問 4 問 3 の状態 $\psi(t)$ における電子のスピン $\mathbf{S}=(\hbar/2)(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ の期待値は

$$\langle\psi(t)|\mathbf{S}|\psi(t)\rangle=\left(\frac{\hbar}{2}\cos(2\omega_0 t),\ \frac{\hbar}{2}\sin(2\omega_0 t),\ 0\right)$$

となることを示せ．

問 5 問 4 における電子のスピンの期待値 $\langle\psi(t)|\mathbf{S}|\psi(t)\rangle$ はどのような運動をするか．xyz 空間の図を描いて説明せよ．

問 6 初期状態 $\psi(0)$ が σ_z の固有値 1 に属する固有状態 $\psi(0)=\binom{1}{0}$ であったとすると，電子のスピンの期待値 $\langle\psi(t)|\mathbf{S}|\psi(t)\rangle$ はどのような運動をするか．xyz 空間の図を描いて説明せよ．

ヒント：パウリ行列は $\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$，$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ で与えられる．一般に，$\phi_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\phi_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}c&d\\e&f\end{pmatrix}$ のとき，次のように計算される：

$$\langle\phi_1|\phi_2\rangle=(a_1^*\ a_2^*)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=a_1^*b_1+a_2^*b_2,\quad \langle\phi_1|A|\phi_2\rangle=(a_1^*\ a_2^*)\begin{pmatrix}c&d\\e&f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}.$$

IV　以下の各問に答えよ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　（１００点）

固体表面に独立した N_{S} 個の吸着位置があり，固体表面は古典的理想気体と接触している．これらの系全体が絶対温度 T で平衡状態にある．気体分子の質量を m とし，気体の分子数 N_{G} は N_{S} と比べて十分に大きい．各吸着位置は，気体分子１個だけを吸着できる．分子のエネルギーは，気体中で静止しているときを基準にして測るものとし，どの吸着位置についても，吸着分子のエネルギーは一定値 $-\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ とする．以下で τ は，ボルツマン定数 k_{B} を用いて，$\tau = k_{\mathrm{B}}T$ と定義される．　また，プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする．

まず，吸着分子系に注目し，吸着分子数を N_{A} 個とする．

（１）N_{S} 個の吸着位置に，N_{A} 個の同等な吸着分子を１個ずつ配置する仕方の数 M_{C}（異なる N_{S} 個のものから N_{A} 個とる組合せの数）を，階乗を用いて表しなさい．

（２）吸着分子数が N_{A} 個のときの吸着分子系の分配関数 Z_{A} は

$$Z_{\mathrm{A}} = M_{\mathrm{C}} \exp\left(N_{\mathrm{A}}\varepsilon/\tau\right)$$

により与えられる．前問（１）の M_{C} を掛ける理由を述べなさい．ここで，exp は指数関数を表す．

（３）吸着分子系のヘルムホルツの自由エネルギー F_{A} は，$F_{\mathrm{A}} = -\tau \log Z_{\mathrm{A}}$ から得られる．前問（１），（２）より，Z_{A} を N_{A}，N_{S}，ε，τ を用いて表し，それから F_{A} を求めなさい．N_{A}，N_{S}，$N_{\mathrm{S}} - N_{\mathrm{A}}$ はいずれも１と比べて十分に大きく，次の近似式を用いなさい．

$$N \gg 1 \text{ のとき}\quad \log N! \approx N \log N - N$$

（4）吸着分子系の化学ポテンシャル μ_{A} は，$\mu_{\mathrm{A}} = \left(\dfrac{\partial F_{\mathrm{A}}}{\partial N_{\mathrm{A}}}\right)_{\tau}$ から得られる．

μ_{A} を求めなさい．

次に気体に注目する．気体のヘルムホルツの自由エネルギー F_{G} は，次のように表される．

$$F_{\mathrm{G}} = N_{\mathrm{G}}\tau\left[\log\left(\frac{N_{\mathrm{G}}}{n_{\mathrm{Q}}V}\right)-1\right]$$

ここで，$n_{\mathrm{Q}} = \left(\dfrac{m\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ であり，V は気体の体積である．

（5）気体の圧力 p は，N_{G}, V, τ を用いてどのように表されるか．

（6）F_{G} から気体の化学ポテンシャル μ_{G} を求めなさい．

次に吸着分子系と気体の間の平衡に注目する．

（7）固体表面の吸着の被覆度 $\theta = N_{\mathrm{A}}/N_{\mathrm{S}}$ は，次のような形で表される．

$$\theta = \frac{p}{p + p_0(\tau)}$$

τ を変数とし，$n_{\mathrm{Q}}, \varepsilon$ を用いて表される $p_0(\tau)$ を求めなさい．

I 次の文章を読んで，以下の各問に答えよ。 (30 点)

The Royal Swedish Academy of Sciences awarded the 2010 Nobel Prize to Andre Geim and Konstantin Novoselov of the University of Manchester in the United Kingdom for “ground-breaking experiments” on graphene. In a paper published in Science in October 2004, Geim and Novoselov announced that they had been able to for the first time create a sheet of carbon atoms one atom thick.

The remarkable characteristics of graphene hold a tremendous amount of promise for future applications. It is both the thinnest material ever created while stronger than the world’s strongest steel. According to the Royal Swedish Academy of Sciences, “In our 1 m^2 hammock tied between two trees you could place a weight of approximately 4 kg before it would break. It should thus be possible to make an almost invisible hammock out of graphene that could hold a cat without breaking.”

Even with its strength, it is still flexible. It is as good an electrical conductor as copper and better at conducting heat than any other material. It is almost completely transparent and its hexagonal molecular structure is so dense that not even helium can pass through.

It is thought that graphene could hold the key to many future technologies ranging from transparent touch screens and solar panels to strong composite materials and the hypothesized space elevator.

<u>Scientists</u>$_{(1)}$ had been trying for years to isolate such a carbon molecule because of its amazing theorized structural and electrical properties. However all had been frustrated in their attempts. Many had given up, believing that there was no way such a thin sheet of carbon could be stable at room temperatures.

<u>Geim and Novoselov’s technique was as novel as it was simple. They stuck a piece of scotch tape on a chunk of graphite and pulled off a thin layer. After repeated attempts, they were able to isolate a flat sheet of carbon one atom thick, the long sought-after sample of graphene.</u>$_{(2)}$ (APS NEWS, “Graphene Experiments Garner Nobel Prize” より抜粋.)

問1 ノーベル賞委員会はグラフェン(graphene)の性質をどのような例で説明しているかについて，該当部分を和訳せよ。

問2 グラフェンの物性を（物理の用語も用いて）正確に説明している段落は何段落目か述べよ。またその段落を和訳せよ。

問3 下線部 (1) より後の文章で，下線部 (1)と同じ内容を指している単語を全て書け。ただし，品詞は問わない。

問4 下線部 (2) を和訳せよ。

II 次の文章を読んで，以下の各問に答えよ。参考のために，文章の最後に単語の意味が説明してある。 (30 点)

Civilized societies are characterized by the widespread use of a range of materials to construct the artefacts on which that society depends. However, within any such society there will always be an intelligentsia of some sort — priests, teachers and philosophers and so on — who will ponder about the nature of matter, the stuff that constitutes our world, and the individual materials that are the manifestation of that matter. The first ideas about matter in some of the more sophisticated earlier civilizations, such as that of ancient Greece, is that there were just a few simple substances from which all material was constituted. The Greeks, and others, chose the substances air, earth, fire and water as a basic set having a range of properties that would be possessed by all other material. If a material, say a metal, had rigidity then a major part of it would have to be earth, since the other three substances had no rigidity whatsoever. Again, something like honey would have a large component of water since it flows like water but, unlike air and fire, it maintains a fixed volume within a container.

One of the earliest drivers that stimulated the systematic investigation of matter was alchemy, the desire to make gold from base metals and to find the means of extending life — to eternity if possible. Although we now know that these activities were futile in terms of achieving their desired ends, they(1) did nevertheless achieve something quite important. From the ranks of the alchemists there arose a class of individuals now called scientists, the seekers after knowledge for its own sake, and they created the first science — chemistry. From the 17th century onwards knowledge about the nature of matter grew apace and chemists gradually built up an inventory of elements, the atoms that are the constituents of all materials. At first there seemed to be very little relationship between the individual elements they discovered but then a pattern of relationships emerged, connecting elements with similar properties, connections which came to be represented in a tabular form — the Periodic Table.(2)

This neat chemists' world of a fairly large, but finite, number of elements with indivisible atoms started to crumble at the end of the 19th century when physicists began to explore the nature of atoms. This was not actually the goal that they were initially pursuing. The physicists were interested in the way that electricity was conducted through gasses at very low pressure and the phenomenon of radioactivity. Starting with this seemingly unrelated work, step by step they built up a picture of an atom, not as something indivisible but as something with structure that could break down, either spontaneously or by being bombarded in some way. All atoms were now seen as structures consisting of protons, neutrons and electrons, so seeming — with only three components — to return to the simplicity of the early Greeks.(3)

("Materials, Matter and Particles A Brief History" by Michael M Woolfson より抜粋.)

apace – quickly, inventory – list

問1　下線部 (1) they の指示する単語を書け。

問2　下線部 (2) を和訳せよ。ただし代名詞の指示する内容を明らかにして訳すこと。

問3　下線部 (3) のように考えられる理由を 100～150 字程度で説明せよ。

問4　本文中にはギリシャ時代から現代まで the nature of matter について考えてきた人々の「職業名」が書かれている。これらをすべて年代順に挙げよ。

III　大学での物理学に関する講義や実験で印象に残った内容について，150 語程度の英文で書け。 (20 点)

IV　次の文章を英訳せよ。 (20 点)

その当時の課題の一つとして，温度が絶対零度に近づくと金属の抵抗には何が起こるだろうかと言う疑問があった。電子が電気伝導を担っており，抵抗は金属結晶のイオンによる電子の散乱のせいであるということは受け入れられていた。