

2012 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門（物理）

2011 年 8 月 22 日

注意事項

1. 解答用紙（B4 白紙）は片面のみ使用し，縦置き横書きで解答すること。
2. すべての解答用紙の左上に受験番号を記入すること。
3. 大問毎に別々の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
5. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I

図のように、なめらかな平面上に置かれた質量 m の質点が 4 本の同等なバネ（自然長 l_0 、バネ定数 k ）でつながれている。質点とつながっていないバネの一端は壁に固定されている。 xy 座標を図のように取る。質点が座標上の原点に位置するとき、すべてのバネの長さは自然長 l_0 となっている。質点を l_0 に比べて十分小さく変位させ、運動させる。バネの重さや空気抵抗は無視できるものとする。以下の各問いに答えよ。

(100 点)

問 1 この系の運動エネルギー T を書け。

問 2 この系のポテンシャルエネルギー U を以下の手順で求める。

- (1) 質点を (x, y) だけわずかに変位させる。この時の x 軸正方向に配置された 1 つのバネに関するポテンシャルエネルギー U_1 は

$$U_1 = \frac{1}{2}kx^2$$

となることを計算により示せ。ただし、微小項である $\left(\frac{x}{l_0}\right)^2$ や $\left(\frac{y}{l_0}\right)^2$ は無視し、 $(1+a)^b \approx 1+ab$ ($|a| \ll 1$) として計算を行うこと。

- (2) 他の 3 つのバネについても同様な計算を行い、全体のポテンシャルエネルギー U を求めよ。

問 3 この系の Lagrange 関数 L を書け。

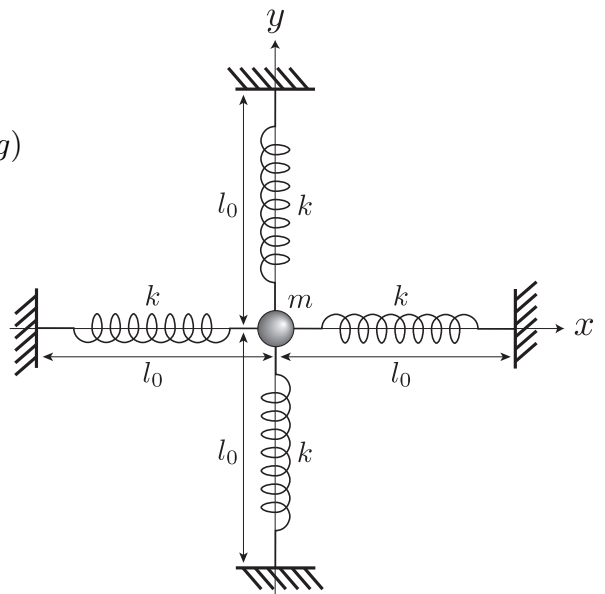
問 4 Lagrange の方法により、運動方程式を求めよ。

問 5 初期条件として $t = 0$ の時、位置 $(0, a)$ から速度 $(v_0, 0)$ を与えたところ、円運動を始めた。

- (1) 運動方程式を解き、質点の軌道 $(x(t), y(t))$ を求めよ。
また、 a と v_0 の関係式を示せ。
- (2) 周期を求めよ。

問 6 次に、この系に対して一様な力 $\vec{F} = (0, -mg)$ ($g > 0$) が存在する場合を考える。問 5 と同じ初期条件で質点を運動させた。

- (1) 質点の軌道の中心座標を求めよ。
- (2) 質点の軌道の概略を問 5 で求めた円軌道と共に xy 平面上に重ねて図示せよ。



II

以下の各問に答えよ.

(100 点)

問 1 等方的な誘電体を考える．ここで，真空中の誘電率は ε_0 とする．

- (1) 電荷密度 ρ の真電荷がある空間に誘電体を置いたときに生じる誘電分極を $\vec{P}$ ，誘電体内の電場を $\vec{E}$ とすると，誘電体内の電束密度は $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ で表される．このとき，誘電体内では，

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

が成立していることを説明せよ．

次に，極板の面積 S ，極板間隔 d の平行板コンデンサーの両極板に $\pm Q$ の真電荷を与えたときを考える．極板は極板間隔に比べて十分広いとする．

- (2) コンデンサーの間に誘電率 ε の誘電体をつめたとき (図 1)，極板間の電場の大きさ，電位差，静電容量を求めよ．
- (3) 真空中のコンデンサーの間に厚さ $d/2$ ，誘電率 ε の誘電体を図 2 のようにつめたとき，極板間の真空中の電場の大きさと誘電体内の電場の大きさを求めよ．
- (4) また，このときの極板間の電位差とコンデンサーの静電容量を求めよ．
- (5) (4) の静電容量の結果から，このコンデンサーはある 2 つのコンデンサーを接続したものに見なせる．どのようなコンデンサーをどのように接続したものに見なせるか説明せよ．

次に，極板の面積 S ，極板間隔 d の平行板コンデンサーを電位差 V_0 の電池につなぎ，図 3 のように厚さ $d/2$ ，誘電率 ε の誘電体を挿入した場合を考える．

- (6) 極板間の真空中の電場の大きさと誘電体内の電場の大きさを求めよ．

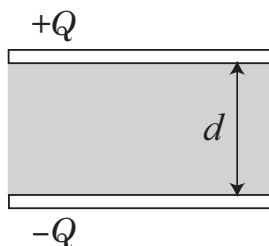


図 1

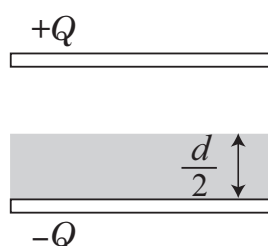


図 2

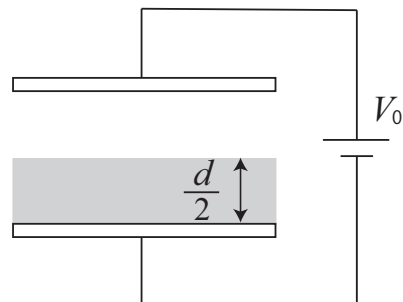


図 3

問2 真空中に無限に長い直線電流 I があるとき、その電流から距離 a だけ離れた点 O における磁束密度 $\vec{B}$ の大きさは

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (\text{A})$$

で表される。ただし、 μ_0 は真空中の透磁率である。

- (1) (A) 式をアンペールの法則、または、ビオ・サバールの法則のどちらか一方を用いて証明せよ。
- (2) 点 O における磁束密度の向きを、電流の向きに垂直な平面内で図示せよ。このとき、電流の向きも明示せよ。
- (3) $\text{div} \vec{B} = 0$ が成立していることを確認せよ。

次に、直線電流 I から距離 a だけ離れた点に、大きさも向きも同じ直線電流をもう一つ平行に置く。(図1)

- (4) 直線電流に作用する単位長さあたりの力の大きさを求めよ。
- (5) その力の向きを図示せよ。

次に、直線電流 I と同じ平面内に、直線電流から距離 a だけ離れた点を中心になるように半径 b ($< a$) の円形導線を置く。(図2)

- (6) 円形導線の内側の点 P における磁束密度の大きさを、図2の r と θ の関数として求めよ。
- (7) 円形導線を貫く磁束を求めよ。
- (8) 円形導線を図2の右方向に動かす。このとき、円形導線にはどのような向きに電流が流れるか説明せよ。

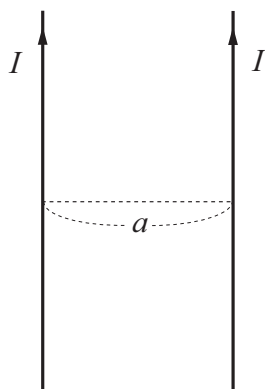


図 1

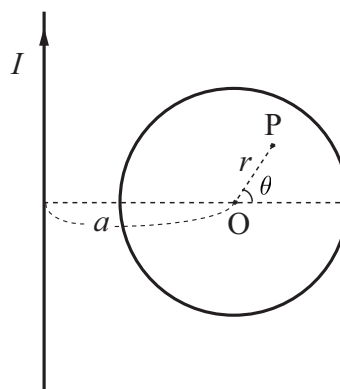


図 2

【参考】 関数 $f(1+x^2)$ の積分 $\int f(1+x^2) dx$ は $x = \tan \theta$ と置くことで解ける場合がある。

関数 $f(\cos \theta)$ の積分 $\int f(\cos \theta) d\theta$ は $\tan \frac{\theta}{2} = t$ と置くことで解ける場合がある。

III

質量 m の量子力学的粒子が、ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x < 0, a < x \end{cases}$$

の中を1次元運動している。以下の問に答えよ。

(100点)

問1 波動関数の絶対値の2乗の意味から、この粒子の運動を記述する波動関数 $\psi(x)$ は、 $x < 0$ 、 $x > a$ においてどうなっているか説明せよ。

問2 前問の結果から、波動関数 $\psi(x)$ は $x = 0$ 、 $x = a$ でどのような境界条件を満たしてなければならないか示せ。

問3 粒子のエネルギー固有値を E とすると、 $E < 0$ となる解は存在しない。

(1) $E < 0$ に対する固有値方程式の解が存在しないことを計算で示せ。

(2) $E < 0$ となる解は存在しないことを、数式を用いずに簡潔に説明せよ。

問4 エネルギー固有値 E が0となる解も存在しない。

(1) $E = 0$ に対する固有値方程式の解が存在しないことを計算で示せ。

(2) エネルギーが0になり得ない理由を不確定性関係に基づいて簡潔に説明せよ。

問5 この粒子のエネルギー固有関数は $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ で与えられる。このこ

とを固有値方程式を解くことにより示し、エネルギー固有値を求めよ。ただし、量子数 n は1以上の整数である。

問6 基底状態と第1励起状態における粒子の存在確率密度の概略を図示せよ。

問7 位置の不確定さ Δx は、 $\Delta x \equiv \sqrt{\langle x - \langle x \rangle \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ で与えられる。

(1) Δx を求め、量子数 n が大きくなるとき、どんな値に近づくか示せ。

(2) n が大きい極限では、粒子の運動は古典力学的な運動に限りなく近づくこと直感的には考えることができる。このことから、 Δx の極限値の意味について考察せよ。

必要なら、以下の公式を利用してもよい。

$$\int_0^a \sin^2 kx \, dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{4k} \sin 2ka$$

$$\int_0^a x \sin^2 kx \, dx = \frac{a^2}{4} - \frac{a}{4k} \sin 2ka + \frac{1}{8k^2} (1 - \cos 2ka)$$

$$\int_0^a x^2 \sin^2 kx \, dx = \frac{a^3}{6} - \frac{1}{8k^3} (2k^2 a^2 - 1) \sin 2ka - \frac{a}{4k^2} \cos 2ka$$

IV 以下の各問に答えよ.

(100 点)

問 1. 図 1 のように, 容器 A と容器 B が体積の無視できる細い管で連結されている. 細い管には弁がついており, はじめ閉じられている. 容器 A, B の容積はそれぞれ V_1 , V_2 とし, 容器 A には温度 T_1 , 圧力 p , 容器 B には温度 T_2 , 圧力 p の同じ理想気体を密封してある. なお, モル数は n , 気体定数は R とする.

- (1) 容器 A, 容器 B 内の理想気体のモル数 n_A , n_B はそれぞれいくらか.
- (2) 次に, 弁を開いたところ, 容器全体は同じ温度 T になった. そのときの容器 A, B 内の理想気体の圧力 p_0 はいくらか. 圧力 p_0 の大きさを, V_1 , V_2 , T_1 , T_2 , T , および p を用いて表せ.

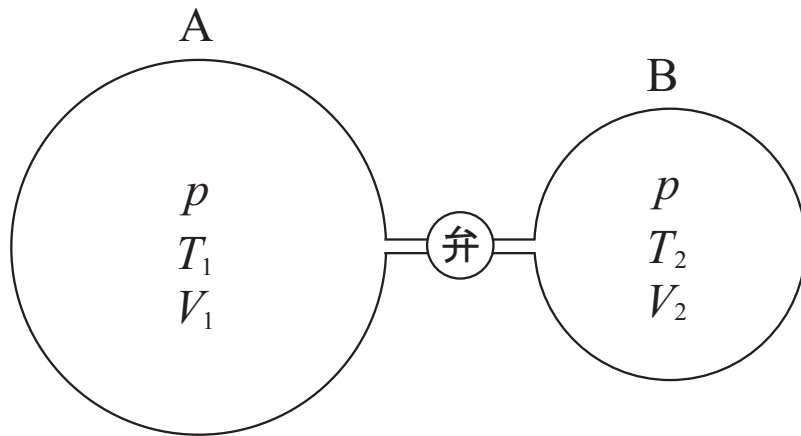


図 1: 細い管で連結された容器 A と容器 B.

問 2. 一般に, 物質に熱量 δQ を与えると, 物質の圧力 p , 体積 V , 温度 T が変化する. また, それに伴い内部エネルギー U も変化する. なお, ここでいう状態変化は準静的変化を考えている.

- (1) 内部エネルギー U を, T と V の関数とみなして全微分の形式で表せ.
- (2) 熱量 δQ は式 $\delta Q = dU + pdV$ で与えられる. この式を用いて, 定積熱容量 C_V と定圧熱容量 C_p との間には, 以下の関係式が成り立つことを示せ.

$$C_p = C_V + \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

ただし, ある熱力学的量 A が一定の過程における熱容量 C_A は, 以下の式で定義される.

$$C_A = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_A$$

- (3) いま, ある物質が理想気体 1 モルの場合, 上記 (2) の結果を用いて $C_p - C_V = R$ であることを示せ.

問 3. N 個の 1 次元調和振動子からなる系を考える. 量子力学によれば, この振動子のエネルギーは以下のように与えられる.

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ここで, ω はこの振動子の角振動数である. この系の分配関数 Z を量子論的に導き次式を得た. ただし, $\hbar = h/2\pi$ (h はプランク定数), 系の温度を T , ボルツマン定数を k_B , $\beta = 1/(k_B T)$ とした.

$$Z = \left[\frac{\exp\left(-\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}{1 - \exp(-\beta\hbar\omega)} \right]^N$$

- (1) 上記の分配関数 Z を導出せよ.
(2) 系におけるヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ.
(3) 系の内部エネルギー U は次式で表される. 系の内部エネルギー U を導出せよ.

$$U = \frac{1}{2}N\hbar\omega + \frac{N\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}$$

- (4) 温度 $T \rightarrow 0$ での内部エネルギー U の振る舞いについて議論せよ.
(5) 温度が十分高く, $k_B T \gg \hbar\omega$ のときの内部エネルギー U の振る舞いについて議論せよ.

参考: $(1+x)^{-1} \approx 1-x, \quad |x| < 1.$
 $e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}, \quad |x| < \infty.$

2012 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2011 年 8 月 22 日

注意事項

1. 解答用紙(B4 白紙)は片面のみ使用し, 縦置き横書きで解答すること。
2. すべての解答用紙の左上に受験番号を記入すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は, 各自持ち帰ること。

I 次の英文を読んで各問に答えよ。

(40 点)

About three-fourths of the elements are metals. All metals are alike in some important ways. They are good conductors of both electricity and heat. 1)They can be formed into different shapes by using a hammer or pressure. Aluminum, for example, can be rolled into very thin foil without breaking. Most metals can also reflect light. Reflected light makes metals shiny. Some metals, like aluminum and silver, reflect a white, silvery light. Other metals, such as gold and copper, reflect colored light. However, metals often have a coating that hides their brilliance. Iron is often covered with rust and silver can become tarnished.

Similarity of properties suggests a similarity of structure in the atoms of metals. Close examination of these atoms shows that the similarity is in the outer or valence electrons. Metals have only a few valence electrons for forming bonds. 2)Aluminum, for example, has three valence electrons. In aluminum metals, these electrons are shared equally by neighboring atoms. This sharing of electrons results in a kind of bond. The aluminum atoms are held together by the electrons that are free to move between all neighboring atoms. This kind of bond is called a metallic bond.

Nonmetals are poor conductors of heat and electricity. 3)Most nonmetals are brittle and cannot be easily formed into sheets or other shapes. Some nonmetals, such as carbon and sulfur, are solids at ordinary temperatures. Oxygen, nitrogen, and chlorine, on the other hand, are nonmetals that are gases. Bromine is the only nonmetal that is a liquid at room temperature.

4)Nitrogen and phosphorus are two nonmetallic elements that are very important to living things. Plants require compounds of both of these elements in order to grow. Chemical compounds containing nitrogen and phosphorus are the most important kinds of fertilizers used in farming. If farmers did not use these chemical fertilizers, much less food could be grown on the world's croplands. Nitrogen and phosphorus are also essential to humans. The proteins that are essential in our diet are compounds containing nitrogen. Phosphorus compounds are needed for normal bone growth.

[W. L. Ramsey et. al., Holt Physical Science, Holt, Rinehart and Winston, Publishers (1982) より引用]

tarnish : 変色させる, 曇らせる, さびさせる, brittle: 割れやすい, carbon: 炭素, sulfur: 硫黄, nitrogen: 窒素, chlorine: 塩素, bromine: 臭素, phosphorus: リン, cropland(s): 農地, 耕作地, fertilizer(s): 肥料, protein(s): タンパク質,

問 1 下線部 1)を和訳せよ。

問 2 下線部 2)の「metallic bond」について日本語で説明せよ。

問 3 下線部 3)を和訳せよ。

問 4 下線部 4)は窒素とリンが生物にとって重要だと述べているが、それぞれどのように重要かを日本語で説明せよ。

II 次の英文を読んで各問に答えよ。

(30 点)

Magnetic resonance is a phenomenon found in magnetic systems that possess both magnetic moments and angular momentum. ¹⁾The advantage of the resonance method is that it enables one to select out of the total magnetic susceptibility, a particular contribution of interest – one that may, for example, be relatively very weak. The most spectacular example is, no doubt, the observation of the feeble nuclear paramagnetism of iron against a background of the electronic ferromagnetism. Resonance also permits the gathering of precise, highly detailed magnetic information of a type not obtainable in other ways.

As we remarked above, we are concerned with magnetic systems that possess angular momentum. As examples, we have electron spins, or the nuclei of atoms. ²⁾A system such as a nucleus may consist of many particles coupled together so that in any given state, the nucleus possesses a total magnetic moment μ and a total angular momentum J . In fact the two vectors may be taken as parallel, so that we can write

$$\mu = \gamma J \quad (1.1)$$

where γ is a scalar called the “gyromagnetic ratio”. For any given state of a nucleus, knowledge of the wave function would in principle enable us to compute both μ and J . Hence we should find that the quantity γ would vary with the state.

Of course, in the quantum theory, μ and J are treated as (vector) operators. The meaning of the concept of two operators being “parallel” is found by considering the matrix elements of the operators. Suppose we define a dimensionless angular momentum operator I by the equation:

$$J = \hbar I . \quad (1.2)$$

³⁾ I^2 then has eigenvalues $I(I + 1)$ where I is either integer or half-integer. Any component of I (for example I_z) commutes with I^2 , so that we may specify simultaneously eigenvalues of both I^2 and I_z . Let us call the eigenvalues $I(I + 1)$ and m , respectively. Of course m may be any of the $2I + 1$ values $I, I - 1, \dots, -I$. The meaning of (1.1) is then that

$$(Im|\mu_{x'}|Im') = \gamma(Im|I_{x'}|Im') \quad (1.3)$$

where $\mu_{x'}$ and $I_{x'}$ are components of the operators μ and I along the (arbitrary) x' -direction. The validity of this equation is based on the Wigner-Eckart theorem.

[C. P. Slichter, “Principles of Magnetic Resonance”, 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin (1989)より引用]

magnetic moment(s): 磁気モーメント, angular momentum: 角運動量,
magnetic susceptibility: 磁化率, of interest: 興味のある, 着目した, 対象とした,
feeble: 弱い, paramagnetism: 常磁性, ferromagnetism: 強磁性, nuclear: 核の,
nucleus: 核(単数形), nuclei: 核(複数形), gyromagnetic ratio: 磁気回転比,
operator(s): 演算子, eigenvalues: 固有値.

問 1 下線部 1)がどのようなことを述べているかを日本語で要訳せよ。

問 2 下線部 2)を読んで原子核がどのような状態になっているかを日本語で説明せよ。

問 3 下線部 3)を和訳せよ。ただし, (1.3)式はそのまま使用して良い。

III 次の文章を英訳せよ。

(30 点)

(1) 気体の体積は, 温度とともに変化する。この体積の変化は, ふたつの法則で表わされる。最初の法則は, ボイルの法則として知られている。温度を一定にして, 圧力を増加させると, 気体の体積は減少する。この法則に対する式は, $PV = P'V'$ である。ここで, P は最初の圧力, V は最初の体積, P' は反応後の圧力, V' は反応後の体積である。

ボイルの法則 : Boyle's law.

(2) アルゴンは, 液体空気を分留することによって商業的に生産される。この過程で得られたアルゴンには不純物が含まれている。温められた銅を通過させることによって, 微量の酸素が取り除かれ, 後にはほとんど純粋なアルゴンが残される。アルゴンは無色, 無臭な気体である。空気中には, 重さで約 14,000 ppm, 体積で約 1% 程度のアルゴンが存在する。

分留 : fractional distillation, 分留する : fractionally distill, アルゴン : argon,
通過する : pass over, 無臭 : odorless.