

2013 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

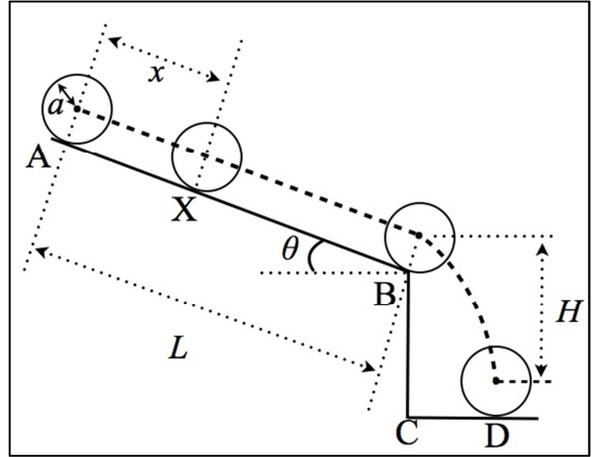
入学試験問題
専門（物理）

2012 年 8 月 20 日

注意事項

1. 全ての解答用紙（B4用紙）の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 全ての解答用紙の□（左上）に大問番号（I，II，III，IV）を記入すること。
3. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
5. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
6. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I 図のように傾き θ の粗い斜面上の点Aに、半径 a 、質量 M の一様な剛体球を静かに置くと、滑ることなく転がり始めた。その後、剛体球は点Bで面から離れ、水平面上の点Dに落下した。斜面方向下向きに x 軸をとり、点Aからの剛体球の変位が x の地点を点Xとする。点Xにおける重心速度を v 、角速度を ω とする。また、落下直前の点Bにおける剛体球の重心速度を v_B とする。なお、剛体球は点A~点Dを含む平面内で運動しており、重心の周りの慣性モーメントを $I = 2Ma^2/5$ 、重力加速度を g とする。また、空気の抵抗は無視できるものとする。(100点)



問1 以下の各問に答えよ。

- (1) 剛体球が滑らずに転がっている間、力学的エネルギーは常に保存しており、点Aと点Xにおける剛体球の力学的エネルギー保存則を表す式は、

$$Mgx\sin\theta = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

と書ける。この式に、斜面からの垂直抗力と摩擦力が関係しない理由を簡潔に書け。

- (2) 剛体球重心の変位 x と回転角 φ には、 $x = a\varphi$ の関係がある。剛体球の重心速度 v と角速度 ω の関係式を書け。
- (3) v_B を M, g, L, θ を用いて表せ。ここで L は点Aと点Bの距離である。

問2 斜面の静止摩擦係数を μ 、斜面から剛体球に対して働く摩擦力の大きさを F とする。

以下の各問に答えよ。

- (1) 剛体球の重心について x 軸方向の運動方程式を書け。
- (2) 剛体球の回転の運動方程式を書け。
- (3) 剛体球の重心加速度と角加速度の関係式を書け。
- (4) 運動方程式を解き、剛体球の重心加速度を g と θ を用いて表せ。
- (5) F を M, g, θ を用いて表せ。
- (6) 剛体球が滑らずに転がるための θ の条件を導け。

問3 剛体球重心の鉛直落下距離を H として、点Bから点Dに落下するまでの時間 t を v_B, g, θ, H を用いて表せ。

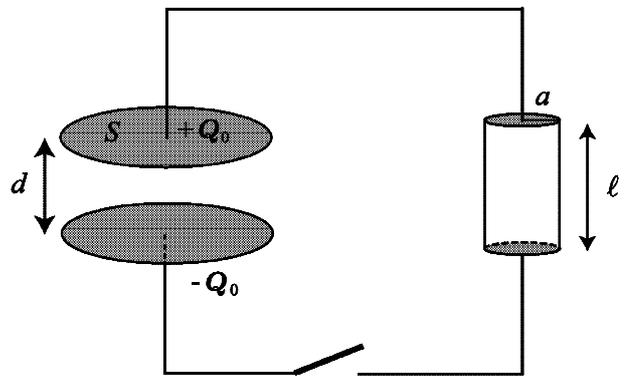
Ⅱ 真空中に、面積 S の 2 枚の薄い円形金属板を間隔 d で向かい合わせて作った平行板コンデンサー、抵抗値 R の抵抗を持つ半径 a で長さ ℓ の円柱導体、スイッチの 3 つが図のように直列に接続されている。最初、スイッチを開いた状態で、図のように極板にそれぞれ $\pm Q_0$ の電荷を与えた。面積 S は間隔 d より十分大きいとし、極板間の電場は一様とみなす。また、真空中の誘電率を ϵ_0 、真空中の透磁率を μ_0 とする。(100 点)

問 1 ガウスの法則を用いて極板間の電場の大きさ E_0 を求め、その E_0 の向きを示せ。また、ガウスの法則を記述して、物理的な意味を述べよ。

問 2 極板間の電位差 V_0 とコンデンサーの電気容量 C を求めよ。

時刻 $t = 0$ にスイッチを閉じた。コンデンサーに蓄えられていた電荷は抵抗値 R を持つ円柱導体を通じて放電された。

問 3 時刻 t でのコンデンサーの電荷を $q(t)$ とするとき、 $q(t)$ の変化を記述する微分方程式を立てよ。次に、 $q(t)$ を求め、それが時間とともにどのように変化するか図示せよ。



問 4 回路を流れる電流 $I(t)$ が

$$I(t) = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

で表されることを示せ。

問 5 円柱導体で消費される熱エネルギー W がコンデンサーに蓄えられていたエネルギーに等しいことを示せ。

問 6 円柱導体の上面と底面の間（間隔 ℓ ）の電場の大きさ $E(t)$ を求めよ。

問 7 アンペールの法則を用いて円柱導体の表面での磁場の大きさ $H(t)$ を求め、その $H(t)$ の向きを図示せよ。また、アンペールの法則を記述して、物理的な意味を述べよ。

問 8 円柱導体内へ流入するポインティングベクトル $\mathbf{S}(t)$ の円柱導体側面での向きと大きさを求めよ。ただし、ポインティングベクトル \mathbf{S} は $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ で定義される。

問 9 $\mathbf{S}(t)$ を円柱表面で面積分し、それを $t = 0$ から $t = \infty$ まで時間積分することによって、得られた値が問 5 で求めた円柱導体で消費される熱エネルギーと等しいことを示せ。

問 10 ポインティングベクトル \mathbf{S} の物理的な意味を述べよ。

III

質量 m の粒子が 1 次元シュレーディンガー方程式,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi(x, t) \quad (-\infty < x < \infty),$$

に従って, x 軸方向に 1 次元運動をしている。 $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$, をハミルトニアン演算子と呼ぶ。物理量 Q の期待値を $\langle Q \rangle$ と書き, 標準偏差 σ_Q を $\sigma_Q = \sqrt{\langle (Q - \langle Q \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2}$ と定義する (σ_Q は物理量の値のとり得る範囲 ΔQ を表す)。粒子の状態 (波動関数) が

$$\Psi(x, t) = A \exp \left[-\frac{i}{\hbar} Et - \frac{m\omega x^2}{2\hbar} \right], \quad \left(\psi_0(x) = A \exp \left[-\frac{m\omega x^2}{2\hbar} \right] \right),$$

である時, 以下の問いに答えよ。ただし, A と ω は実数定数とする。また必要であれば, 以下の Gaussian 積分の公式を用いて良い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/a^2} dx = \sqrt{4\pi} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2} \right)^{2n+1}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, 0! = 1). \quad (100 \text{ 点})$$

問 1 この状態, $\Psi(x, t) = \psi_0(x) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} Et \right]$, が時間に依存しない (定常) シュレーディンガー方程式を満たすことを示せ。

問 2 波動関数の振幅 A の値はどのようにして決定されるのかを説明し, その値を求めよ。

問 3 位置と運動量及びそれらの 2 乗の期待値, $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ を求めよ。

問 4 位置と運動量に関するハイゼンベルグの不確定性関係の式を書け。問 3 の結果を用いて位置と運動量の標準偏差 σ_x , σ_p を求め, これらが不確定性関係を満たしていることを示せ。

問 5 粒子のエネルギーを複数回測定したところ, 常に $\frac{1}{2} \hbar \omega$ だった。ポテンシャル $V(x)$ の形を求めよ。また, このポテンシャル中で運動する粒子を何と呼ぶか答えよ。

問 6 位置演算子 x と運動量演算子 $p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ の交換関係 $[x, p] = i\hbar$ を証明せよ。

問 7 昇降演算子 $a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (\mp i p + m \omega x)$ (複号同順) が, 交換関係 $[a_-, a_+] = 1$ を満たすことを示せ。さらに, これを用いると, ハミルトニアン演算子が

$$H = \hbar \omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right),$$

と表されることを示せ。

問 8 関数 $\psi(x)$ が, 問 7 のハミルトニアン演算子 H に対して $H\psi = E\psi$ を満たすとき,

$$H(a_{\pm}\psi) = (E \pm \hbar\omega)(a_{\pm}\psi),$$

が成り立つことを示せ (複号同順)。

問 9 波動関数 $\psi_0(x)$ が, $a_- \psi_0 = 0$ を満たすことを示せ。さらに, 状態 (波動関数)

$$\psi_n(x) = A_n (a_+)^n \psi_0(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

に対するエネルギー固有値 E_n を求めよ。ただし, A_n は実数定数とする。

IV 以下の各問いに答えよ。

(100点)

問1 内部エネルギーの全微分 dU は、エントロピーの微分 dS と体積の微分 dV 、および温度 T と圧力 P を使って $dU = TdS - PdV$ と書ける(熱力学第1法則)。また、 U とエンタルピー H 、ヘルムホルツの自由エネルギー F 、ギブスの自由エネルギー G はそれぞれ以下のような関係がある。

$$H = U + PV, \quad F = U - TS, \quad G = U + PV - TS$$

(1) dH, dF, dG を T, S, P, V 及びその全微分を用いて表せ。

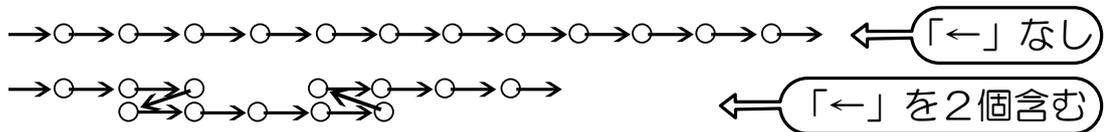
(2) 微分可能な2変数の関数 $f(x, y)$ については、 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_x$ が成り立つ

(記号 $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_x$ は、「 x を固定して y で微分する」を表す)。これを使って、以下の式を導き出す過程を示せ。

$$\frac{\partial S}{\partial V} \Big|_T = \frac{\partial P}{\partial T} \Big|_V, \quad \frac{\partial T}{\partial V} \Big|_S = -\frac{\partial P}{\partial S} \Big|_V$$

(3) 熱力学第1法則の式に T が一定という条件をつけて dV で割ると、 $\frac{\partial U}{\partial V} \Big|_T = T \frac{\partial S}{\partial V} \Big|_T - P$ という式が作られる。これと上で作った式を使って、「状態方程式 $PV = nRT$ が成り立つときは、内部エネルギー U は温度だけで決まり、体積によらない」ことを示せ。

問2 ゴムの弾力のモデルを統計力学で考える。図のような分子の鎖(結合手)を考える。分子にも鎖にも、内部エネルギーはないものとする。分子の結合の仕方は のように順行するか、 のように逆行するかのどちらかであり、切れたり再結合したりはしないとする。



結合手が n 個あるとして、分子間の距離を a とすると、伸び切った状態の長さは na である。結合手のうち m 本が「 \leftarrow 」($n - m$ 本が「 \rightarrow 」)ある時の状態数は ${}_n C_m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ である。ボルツマン定数は k とする。

(1) ゴムを伸ばして長くしていくと、ゴムのエントロピーは増えるか、それとも減るか。また、断熱的にゴムを伸ばした時、熱を発するか、それとも熱を吸収するか。理由とともに記せ。

(2) ゴムの両端を一定の張力 F で引っ張っているとす。「 \leftarrow 」が一個増えてゴムが $2a$ 縮むと、ゴムは張力の源に対して $2Fa$ の仕事をし、それだけ系の全エネルギーが増える。よって一個の結合手が「 \leftarrow 」または $2Fa$ のどちらかのエネルギーを持っていると考えることができる。以上の考察を手がかりに温度 T における、結合手一個の分配関数 Z_1 を求めよ。

(3) 温度 T における系全体の分配関数 Z_n は Z_1 を n 乗して求めることができるが、この時 $n!$ で割る必要はあるか、それともないか。理由とともに答えよ。

(4) Z_n から「 \leftarrow 」が m 個ある時の状態数を読み取ることができるが、それが ${}_n C_m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ に一致することを確認せよ。

2013 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2012 年 8 月 20 日

注意事項

1. 全ての解答用紙（B4用紙）の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

以下の問題に答えよ。

(100 点)

- 1 次の文章は、自由電子の運動による X 線放射について説明する英文である。文の一部には、文と関係のある図を与え、一部の語に訳や注釈をつけてある。

X-rays from Free Electrons

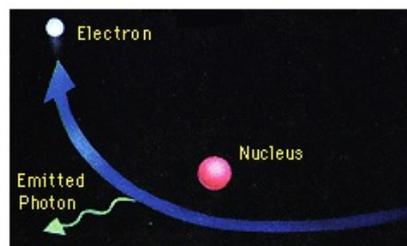
The motion of a free electron (for example, one that is unbound to an atom) may produce X-rays if the electron is undergoing any one of these motions:

- The electron is accelerated past a charged particle.
- The electron is moving in a magnetic field.
- The electron is accelerated by another photon.

We discuss each of these scenarios below.

I. Bremsstrahlung

This mechanism operates in all X-ray sources. It originates from the acceleration of electrons in coulomb collisions with other electrons and with ions and nuclei. It comes from the German words "bremsen," meaning "to brake," and "strahlung," meaning "radiation." The most common situation is the emission from a hot gas as the electrons collide with the nuclei due to their random thermal motions. This is called "thermal bremsstrahlung." Bremsstrahlung can also occur when a beam of particles decelerates when it encounters an obstacle. The X-ray machine in a dentist's office, for example, works by firing a beam of electrons at a metal plate. When the electrons collide with the plate they come to a stop, emitting X-rays by bremsstrahlung.



Thermal bremsstrahlung produces a characteristic spectrum. ¹⁾Each collision event produces a photon, and the energy of the photon corresponds approximately to the change in energy that occurred during the collision. The electrons in a gas have a distribution of energies produced by bremsstrahlung, and this reflects the electron energy distribution, which has an average that is proportional to temperature.

bremsstrahlung: 制動放射, 制動輻射 coulomb collision: クーロン衝突
radiation: 放射, 輻射 emission: 放射, 放出 spectrum: スペクトル (光・電磁波の波長ごとの強度分布) fire a beam: (光線・ビームを) 発射する, 打ち込む

問 1 bremsstrahlung によって得られる X 線の利用先として文中で述べられているものを次から選び, 記号で書け。

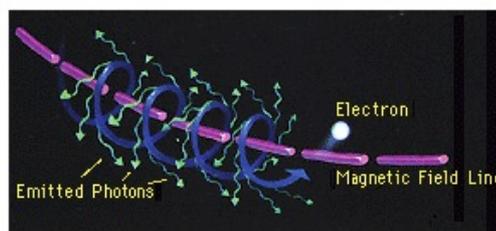
ア. 外科 イ. 警察 ウ. 歯科 エ. 学校

問2 問1の利用先では、どのようにしてX線を放射させると文中で述べられているか。"bremsstrahlung"の語を使わずに説明せよ。

問3 下線部1)を和訳せよ。

II. Synchrotron Radiation

Synchrotron radiation is associated with the acceleration that happens to electrons as they spiral around a magnetic field. ²⁾The force felt by a charged particle in a magnetic field is perpendicular to the direction of the field and to the direction of the particle's velocity. The net effect of this is to cause the particle to spiral around the direction of the field. Since circular motion represents acceleration (i.e., a change in velocity), the electrons radiate photons of a characteristic energy, corresponding to the radius of the circle. For ³⁾non-relativistic motion, the radiation spectrum is simple and is called "cyclotron radiation". The situation becomes more complicated when the particle energy is relativistic (i.e., their speed approaches the speed of light).



Synchrotron spectra typically have a power law shape, i.e., the flux proportional to photon energy to some power. This is because the particle momenta also have a power law distribution. ⁴⁾They are commonly observed in the radio region of the spectrum, but can extend to the X-ray portion of the spectrum and beyond. Both synchrotron and cyclotron emission apply only to particle motion perpendicular to the direction of a magnetic field.

synchrotron radiation: シンクロトロン放射 spiral: らせん運動する charged particle: 荷電粒子 relativistic: 相対論的な cyclotron radiation: サイクロトロン放射 power law: ベキ乗型の flux: 流束, 流量 radio region: 電波領域

問4 下線部2)を和訳せよ。

問5 下線部3)について,"non-relativistic motion"とは粒子のどのような運動と考えられるか。文中の"relativistic motion"の記述から考えられることを、「相対論」という言葉を使わずに簡潔に述べよ。

問6 下線部4)を和訳せよ。ただし第一文目の"They"は「それら」と訳せば良い。

III. Compton Scattering

This process does not generate new photons, but scatters photons from lower to higher energies (or vice versa) in interactions with electrons of higher (or lower) energies. ⁵⁾In the most widely discussed scenario, low energy photons (UV, optical, or below) scatter with relativistic electrons, making X-rays or gamma rays. This should actually be called "inverse Compton," since it is the inverse to the process first described by Arthur Compton, but the distinction is often not made by astronomers. The fractional energy transfer per scattering is

$$\frac{4kT}{mc^2},$$

where T is the electron temperature, m is the electron mass, and k and c are the Boltzmann constant and the speed of light, respectively. Thus, unless kT is much greater than mc^2 (which is unlikely), ⁶⁾many scatterings are required to shift an optical or UV photon into the X-ray band. The resulting spectra are referred to as "saturated" or "unsaturated," depending on whether sufficient scatterings have occurred to shift all the photons to the electron energies. ⁷⁾In the former case, the photon spectrum will resemble the electron energy distribution. In the latter case, the photon spectrum is a power law spectrum extending from the UV/optical up to the electron characteristic energy. Unsaturated Compton scattering are currently considered one of the most likely mechanisms for making the hard X-rays (greater than 10 keV) observed from many classes of objects.

[“NASA’s *IMAGINE THE UNIVERSE!*” [http://imagine.gsfc.nasa.gov/docs/science/how_12/x_ray_generation_el.html]]の記事より抜粋（一部改変）]

Compton scattering: コンプトン散乱 scatter: 散乱する UV: 紫外 optical: 可視光(の) band: 周波数帯

問7 下線部 5)を和訳せよ。

問8 下線部 6)について、一般に下線部 6)のようになることが知られている。なぜそうなるのか、文中の kT と mc^2 の一般的な関係から簡潔に説明せよ。

問9 下線部 7)を和訳せよ。

2 次の文章(1)～(6)を英訳せよ。文章の下に、一部の語の英訳がある。

- (1) 物体の円運動は、向心力によって引き起こされる。
- (2) 気体分子は均一に分布する傾向にある。
- (3) 有形物はすり減り、有機体は死ぬ。
- (4) 熱力学第二法則は、これらの現象を暗示している。
- (5) ギブズ自由エネルギーは方程式 $G = H - TS$ で定義される。それは、等温等圧下で取り出すことのできる仕事を表す。
- (6) 絶対零度付近では、普通の導体はいくらか電気抵抗を示す。一方、超伝導体は、臨界温度未満まで冷やされると電気抵抗が急にゼロまで下がる。

向心力: centripetal force 物体の円運動: circular motion of a body

気体分子: gas molecules 有形物: material objects 有機体: organisms

熱力学第二法則: the second law of thermodynamics

ギブズ自由エネルギー: the Gibbs free energy

導体: conductor 絶対零度: absolute zero temperature 電気抵抗: resistance

超伝導体: superconductor 臨界温度: critical temperature