

2013 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門(物理)

(二次募集)

2013 年 2 月 12 日

注意事項

1. すべての解答用紙 (B4) の左上に受験番号を記入すること。
2. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
3. すべての解答用紙の左上に大問番号 (I, II, III, IV) を記入すること。
4. 解答用紙は片面のみを使用し、縦置き横書きで解答すること。
5. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
6. 問題冊子は、各自持ち帰ること。

I

下図のように、質量 m の質点が直線 AB 上を滑らかに動くようになっている。直線上にない固定点 O と点 Q にある質点 m の間には、それらの距離 OQ に比例する引力 F (比例定数 k) が働くものとする。以下の各問いに答えよ。ただし、点 O と直線 AB の距離 OP を l 、点 P と質点との距離 PQ を x とする。 (100 点)

問1 質点の運動エネルギー T を求めよ。

問2 質点に働く力 F の直線 AB の方向の大きさ F_x を求めよ。

問3 質点が点 P にあるときを位置エネルギーの原点とする。質点が点 Q にあるときの位置エネルギー U を求めよ。

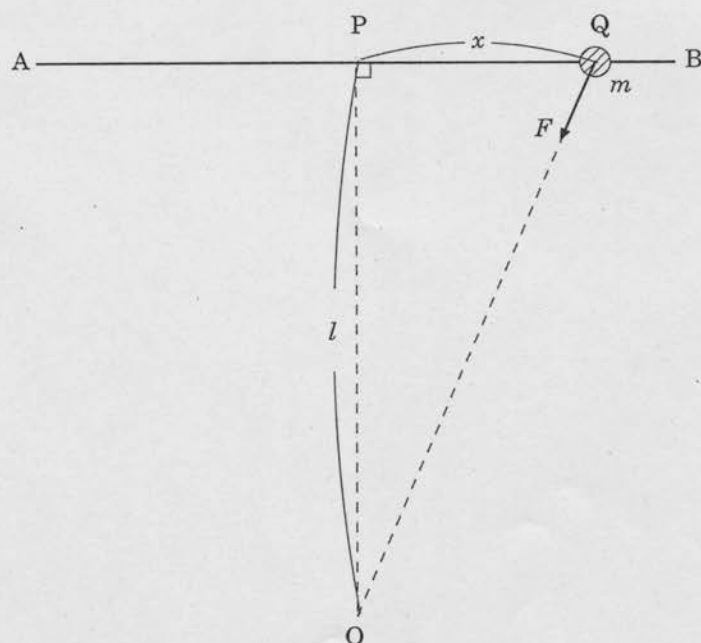
問4 この系のラグランジアン L およびラグランジュの運動方程式を求めよ。

問5 この運動の周期 T を求めよ。

問6 この運動の振幅が X_0 であるとき、質点の最大の速さを m 、 k および X_0 を用いて表せ。

次に、質点と点 O の間に働く引力 F の大きさがそれらの距離に依存しない場合、すなわち $F = F_0$ (一定) の場合について考える。

問7 質点の運動方程式を求めよ。また、 $l \gg x$ であるとき、質点の運動について説明せよ。



II 以下の各問に答えよ.

(100 点)

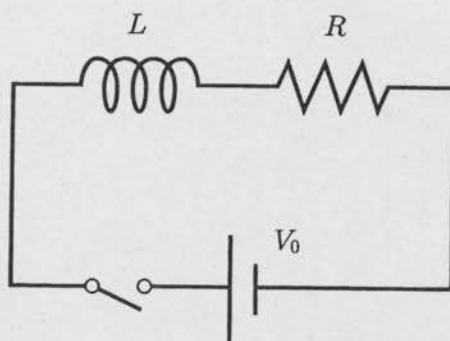
問 1. 半径 a の球体の内部に電荷が密度 $\rho(>0)$ で一様に分布している. なお, 真空の誘電率を ϵ_0 とする.

- (1) 中心からの距離 r の関数として, 電場の強さを求めよ.
- (2) 中心からの距離 r の関数として, 電位 ϕ を求めよ ($r \rightarrow \infty$ で $\phi = 0$ とする).
- (3) 中心からの距離 r の関数として, 電場の強さおよび電位をグラフに示せ.
- (4) 球体のもつ電氣的エネルギーを求めよ.

問 2. 下図のように自己インダクタンス L のコイル, 抵抗 R , 起電力 V_0 の電池を直列につないだ回路を考える. ただし, 電流 $I(t)$ は, 以下の微分方程式に従って変化する.

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V_0$$

- (1) 最初に回路のスイッチをオフにして電流が流れないようにしておく. そして, 時刻 $t = 0$ でスイッチを入れた後の回路を流れる電流の時間変化を次の手順で求めよ.
 - (a) $I = y + \frac{V_0}{R}$ とおき, y に対する方程式を導け.
 - (b) 上で導いた微分方程式の一般解 $y(t)$ (任意定数を 1 つ含む解) を導け.
 - (c) $t = 0$ のとき, $I(t) = 0$ となるように任意定数を決定せよ.
- (2) $t = 0$ でスイッチを入れた後の電流の時間変化をグラフで表せ.
- (3) 上で表したグラフの振る舞いについて, コイルの誘導起電力に着目して説明せよ.
- (4) 電池のする仕事とコイルのエネルギーの関係について説明せよ.



III

以下の各問に答えよ.

(100 点)

問1 運動量を p , 座標を x , $m = \hbar = \omega = 1$ として, ハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)$$

で表される一次元調和振動子を考える. \mathcal{H} の固有値は $E_n = n + \frac{1}{2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) である.

- (1) $[x, p] = i$ が成り立つことを示せ.
- (2) 不確定性関係が p^2 と x^2 の期待値 $\langle p^2 \rangle$ と $\langle x^2 \rangle$ で $\langle p^2 \rangle \langle x^2 \rangle \geq \frac{1}{4}$ と書ける. $\langle p^2 \rangle \langle x^2 \rangle = \frac{1}{4}$ の条件の下で, 調和振動子のハミルトニアンの期待値 $\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{1}{2}(\langle p^2 \rangle + \langle x^2 \rangle)$ の最小値が零点エネルギー $E_0 = \frac{1}{2}$ に等しいことを示せ.
- (3) 基底状態と第一励起状態の固有関数が, それぞれ, $\psi_0 = C_0 \exp(-x^2/2)$ と $\psi_1 = C_1 x \exp(-x^2/2)$ であることを確かめよ. ただし, C_0 と C_1 はある定数である.
- (4) 規格化条件から C_0 の値を求めよ.
- (5) 調和振動子の固有状態は中心付近で振動する部分と外側の指数関数的に減衰する部分からなる. 横軸が x , 縦軸が第一励起状態の固有関数 ψ_1 のグラフを描き, その境目の変曲点を求めよ.
- (6) (5) で求めた変曲点が, 同じエネルギー $E_1 = 3/2$ を持つ調和振動子の古典的運動の領域の端に相当することを示せ.

問2 ハミルトニアン

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) + x$$

の基底状態の固有値の近似値を求めたい.

- (1) 定数 a と b をもつ試行関数 $\phi = (a + bx) \exp(-\frac{x^2}{2})$ を用いて,

$$\langle \phi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^2 \quad \text{と} \quad \langle \phi | \mathcal{H}_1 | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi \mathcal{H}_1 \phi$$

を求めよ.

- (2) \mathcal{H}_1 の期待値

$$\epsilon = \frac{\langle \phi | \mathcal{H}_1 | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle}$$

が $\partial \epsilon / \partial a = 0$ と $\partial \epsilon / \partial b = 0$ を満たすような ϵ の値を求めることにより, 基底状態の固有値の近似値を求めよ. ただし, $\sqrt{3} = 1.73$ とする.

【参考】 $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

IV

以下の各問に答えよ.

(100 点)

上向きと下向きの2通りの向きしかとれないスピンを考える. スピンの磁気モーメントは, スピンが上向きするとき μ , 下向きするとき $-\mu$ とする. スピンが上向きの磁場 H 中にあるとき, スピンのエネルギーは, スピンが上向きならば $-\mu H$, 下向きならば μH となる. 磁気モーメントは上向きを正とし, μ は正の定数とする. 以下の β は, ボルツマン定数 k_B , 絶対温度 T を用いて

$\beta = 1/(k_B T)$ により定義される. なお, ある系が温度 T で平衡状態にあるとき, この系がエネルギー E_S をもつ状態 S に見出される確率は, ボルツマン因子 $\exp(-\beta E_S)$ に比例することに注意せよ. ここで, \exp は指数関数を表す.

まず, 上向きの磁場 H 中におかれた1つのスピンの, 温度 T で平衡状態にある場合を考える.

- (1) スピンの2つの状態に注目して, スピンの分配関数 Z_1 を求めよ.
- (2) スピンが上向きの状態に見出される確率 P_+ , 下向きの状態に見出される確率 P_- を, それぞれ μ, H, β を用いて表せ.
- (3) スピンの磁気モーメントの平均値 M_1 を μ, H, β を用いて表せ.
- (4) 磁場 H を固定して高温極限, 低温極限をとると, それぞれの極限で (3) の M_1 の値はどのようなになるか.
- (5) $\beta\mu H \ll 1$ のとき, (3) で得られた M_1 は $M_1 = \chi H$ の形に表される. 磁化率 χ を μ, β を用いて表せ.

次に, 上向きの一様な磁場 H 中におかれた2つのスピン (スピン系) が, 温度 T で平衡状態にあるとする. これらの2つのスピンの番号を付けて「スピン1」, 「スピン2」とする. 2つのスピン間には相互作用が働いており, 相互作用のエネルギーは, 2つのスピンの同じ方向を向くとき J , 逆の方向を向く

とき $-J$ とする. ここで, J は正の定数である.

- (6) スピン 1, 2 がともに上向きの状態について, スピン系の磁気モーメント (2つの磁気モーメントの和) 2μ , エネルギー $J-2\mu H$, ボルツマン因子 $\exp[-\beta(J-2\mu H)]$ が下表に記入されている. 解答用紙に同じ表をつくり, 他の 3つの状態についても記入して表を完成させよ. スピンの向きの欄の (1), (2) はそれぞれスピン 1, スピン 2 を表す.

スピンの向き	(1) ↑ (2) ↑	(1) (2)	(1) (2)	(1) (2)
磁気モーメント	2μ			
エネルギー	$J-2\mu H$			
ボルツマン因子	$\exp[-\beta(J-2\mu H)]$			

- (7) スピン系の 4つの状態に注目して, スピン系の分配関数 Z を求めよ.
- (8) 2つのスピンの向きが逆方向の状態は 2つある. スピン系がこのどちらかの状態に見出される確率 P_{AF} を μ, H, J, β を用いて表せ.
- (9) スピン系の磁気モーメントの平均値 M を μ, H, J, β を用いて表せ.
- (10) $\mu H > J$ を満たす磁場 H を固定して低温極限をとると, (9) で得られた M の値はどのようなになるか. また, このとき安定になるスピン系のスピンの向きはどのようなものか.
- (11) $\mu H < J$ を満たす磁場 H を固定して低温極限をとると, (9) で得られた M の値はどのようなになるか. また, このとき安定になるスピン系のスピンの向きはどのようなものか.

2013 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

(二次募集)

2013 年 2 月 12 日

注意事項

1. すべての解答用紙 (B4) の左上に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみを使用し、縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は、各自持ち帰ること。

1 次の英文を読んで各問に答えよ.

(30 点)

One of Galileo's greatest contributions to science was his emphasis on experimentation, a basic part of the scientific method. However, a question exists as to whether or not he actually carried out a now-famous experiment. There is a popular story that Galileo dropped stones or cannonballs of different masses from the top of the Tower of Pisa to determine experimentally whether objects fall with the same acceleration.

¹⁾Galileo did indeed question Aristotle's view that objects fell because of their "earthiness"; and the heavier or more earthy an object, the faster it would fall in seeking its "natural" place at the center of Earth. ²⁾His ideas are evident in the following excerpts from his writings.

How ridiculous is this opinion of Aristotle is clearer than light. Who ever would believe, for example, that...if two stones were flung at the same moment from a high tower, one stone twice the size of the other,...that when the smaller was half-way down the larger had already reached the ground?

And:

Aristotle says that "an iron ball of one hundred pounds falling a height of one hundred cubits reaches the ground before a one-pound ball has fallen a single cubit." I say that they arrive at the same time.

³⁾Although Galileo mentions a *high tower*, the Tower of Pisa is not mentioned in his writings, and there is no independent record of such an experiment. Fact or fiction? No one really knows. What we do know is that all freely falling objects near Earth's surface fall with the same acceleration.

As an interesting sidelight, the Tower of Pisa has been in the news again recently. It was closed to the public in 1990 because of the possibility of it toppling. The tower started leaning before its completion in 1350, because of soft subsoil. It is currently leaning almost 6 degrees from the vertical.

(J. T. Shipman, J. D. Wilson, A. W. Todd, *An Introduction to Physical Science*, Houghton Mifflin Company, 2000 より引用)

Hint: Galileo: ガリレオ cannonballs: 砲丸 mass: 質量 the Tower of Pisa: ピサの斜塔 acceleration: 加速度 earthiness: 土性 (earthy(土の)な性質) "natural" place: 本来あるべき場所 Aristotle: アリストテレス (ギリシャの哲学者) cubit: キュービット (肘から中指の先までの長さ)

問1 下線部1)を和訳せよ.

問2 下線部2)のHisは誰のことか.

問3 ガリレオの説とアリストテレスの説を比較せよ.

問4 下線部3)を和訳せよ.

問5 ピサの斜塔は最近どのような状態になっているか。

2 次の英文を読んで各問に答えよ。

(30 点)

Much of modern physics and chemistry is based on the study of energy levels of various atomic and molecular systems. When light is emitted or absorbed, scientists study the emission or absorption spectrum to learn about the energy levels of the system. Some scientists do research in molecular spectroscopy—the study of the spectra and energy levels of molecules. As you would expect, molecules of one substance produce a spectrum different from that produced by molecules of another substance. Molecules can have quantized energy levels because of molecular vibrations or rotations or because they contain excited atoms.

¹⁾The water molecule has some rotational energy levels spaced very closely together. The energy differences are such that microwaves, which have relatively low frequencies and energies, are absorbed by the water molecules. This principle forms the basis of the microwave oven. Because all foods contain moisture, their water molecules absorb microwave radiation, thereby gaining energy and rotating more rapidly, and thus heating and cooking the food. Molecules of fats and oils in a food also are excited by microwave radiation, so they, too, contribute to the cooking. The interior metal sides of the oven reflect the radiation and remain cool.

Because it is the water content of foods that is crucial in microwave heating, objects such as paper plates and ceramic or glass dishes do not get hot immediately in a microwave oven. However, they often become warm or hot after being in contact with hot food (heat transfer by conduction).

Some people think that the microwaves penetrate the food and heat it throughout, but this is not the case. Microwaves penetrate only a few centimeters before being completely absorbed, so the interior of a large mass of food must be heated by conduction as in a regular oven. For this reason, microwave oven users are advised to let foods sit for a short time after microwaving. Otherwise, the outside of the food may be quite hot, while the center is disagreeably cool.

(J. T. Shipman, J. D. Wilson, A. W. Todd, *An Introduction to Physical Science*, Houghton Mifflin Company, 2000 より引用)

Hint: energy levels: エネルギー準位 absorption spectrum: 吸収スペクトル
microwaves: マイクロ波 microwave oven: 電子レンジ molecular spectroscopy: 分子分光學
quantized: 量子化された microwave radiation: マイクロ波放射

問1 下線部 1) を和訳せよ。

問2 電子レンジに対して、水と同様の性質を持つ物質を英語で2つあげよ。

問3 セラミック容器に食物を入れて電子レンジで加熱したら容器も熱くなる。その理由として何があげられているか。

問4 電子レンジを使用するとき、注意すべき点として、何があげられているか。

3 次の文章を英訳せよ。

(20 点)

- (1) 教育の最も重要な目標の一つは、新しいことを考え出すことのできる創造的な人間を育てることであるに違いない。

Hint: think out, bring up, something new, aims of education

- (2) 我々はおもに本を通じて必要な知識を得ることができる。したがって、良い本を選ぶことは大変大切である。

Hint: knowledge, mostly, to choose good books/the choice of good books

4 次の英文の下線部分を修正(変更, 移動, 除去等)せよ。

(20 点)

- (1) He played a crucial role to win the contract for the firm.
- (2) Comparing with the data previously obtained, the present results are in excellent agreement with his theory.
- (3) He neither displayed sufficient diligence nor aptitude to master the language.
- (4) This system is consisting of four parts.
- (5) In 1919 they has been performed calculations of the atomic energy.