2014年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門(物理)

2013年8月26日

注意事項

1. すべての解答用紙（B4白紙）の左上に受験番号を記入すること。
2. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
3. 解答用紙は片面のみ使用し，縦置き横書きで解答すること。
4. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
5. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I

3次元空間に，ポテンシャル

$$U=\frac{1}{2}kr^2 \qquad (k\text{は正の定数})$$

で与えられる力の場が存在する．ただし，r は定点 O からの距離である．この場の中を質量 m の質点が運動している．以下の各問に答えよ．（100点）

問1　ある時刻における質点の位置を P，速度を $\boldsymbol{v}$ とする．このとき，軌道が平面上にあることを根拠を示しながら説明せよ．

問2　定点 O を原点にとったときの質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする．

(1) 質点の運動方程式を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて書き下せ．

(2) 角運動量 $\boldsymbol{L}=m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ が保存量であることを示せ．

(3) 直交座標系において，運動方程式の各成分を書き下せ．また，これらの方程式から，3つの保存量（角運動量以外）を導け．

問3　質点は，初期条件

$$t=0\text{のとき}, \qquad \boldsymbol{r}=a\boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{v}=v_0\boldsymbol{j}$$

で運動を始めた．ただし，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は直交座標系の単位ベクトルであり，a, v_0 は正の定数とする．

(1) 運動方程式の解を求めよ．

(2) 質点が描く軌道の方程式を求め，図示せよ．

(3) 角運動量，および，問2(3)の3つの保存量について，初期条件に対応した具体的な値を求めよ．

問4　この質点に電荷 q を与え，一様な電場 $\boldsymbol{E}$ をかけたとき，質点の運動は，電場をかける前と比べてどのように変化するか．

問5　電場がかけられていない場合，軌道面上に2次元極座標 (r,θ) をとり，ラグランジアンを求め，ラグランジュの運動方程式を書き下せ．また，運動方程式から直ちに導かれる保存量を示せ．

II　以下の各問に答えよ．　(100 点)

問 1　半径 a の細いリングに，線密度 λ で正電荷が一様に分布している．

3 次元空間の直交座標系 (x, y, z) を考え，xy 平面上にリングを置いて，リングの中心軸と z 軸の方向が一致するように配置する．原点はリングの中心位置にある．ただし，真空の誘電率を ε_0 とする．

(1) z 軸上に生じる電場 $\boldsymbol{E}$ と電位 V を求めよ．電位の基準点は，正電荷から無限に遠い点とする（$z \to \infty$ で，$V \to 0$）．

(2) 原点での電場を求めよ．

次に，質量 m，電荷 $-e$ $(e > 0)$ の粒子を，z 軸上の原点付近（$|z| << a$）に静かに置いた．

(3) 粒子はどのような運動を行うか説明せよ．また，振動の周期を求めよ．

問 2　真空中の静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の基本法則は，次の二つの方程式によって記述される．ただし，ε_0 は真空の誘電率，$\rho(\boldsymbol{r})$ は電荷密度とする．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}) \qquad ①$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad ②$$

(1) 方程式①と②は，物理的に何を表わしているか．

静電場は電位 $V(\boldsymbol{r})$ によって，つぎのように表わすことができる．

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r}) \qquad ③$$

(2) ③式で表わされる静電場は，方程式②を満たすことを示せ．

(3) 真空中の電位に対する方程式を導け．

問 3　単位長さあたりの巻数が n で，内部が真空のソレノイドコイル（長さ ℓ，断面積 S）に電流 I を流す．ソレノイドの長さは，半径に比べて十分に長いと仮定する．ただし，真空の透磁率を μ_0 とする．

(1) アンペールの法則を使って，ソレノイドを流れる電流 I のつくる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさ B を求めよ．

(2) ソレノイドがつくる磁場に蓄えられているエネルギーを求めよ．

(3) 電流 0 の状態から，ソレノイドに電流を流して磁場をつくる過程で，エネルギーが蓄えられる理由を説明せよ．

III　定常状態における自由粒子の波動関数 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ は平面波

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = A\,\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{1}$$

で与えられる．ここで，A は規格化定数，$\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)$ は波動ベクトル，ω は角振動数を表す．以下の各問に答えよ．　(100 点)

問１　自由粒子のエネルギー E をエネルギー固有値方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi \tag{2}$$

から定めよ．ここに，m は粒子の質量，$\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割った量を表している．

問２　自由粒子の角振動数 ω は粒子のエネルギー E を用いて

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \tag{3}$$

で与えられることをシュレディンガー方程式から導け．

問３　自由粒子のド・ブロイ波長 λ はそのエネルギー E を用いて

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \tag{4}$$

で与えられることを示せ．

問４　自由粒子を格子定数 a の結晶へ入射させて回折を起こすためには，入射させる粒子のエネルギー E をどの程度にすればよいか説明せよ．

自由粒子を単体の結晶に入射させると，それぞれの原子によって散乱された粒子の状態が現れる．原点にある一つの原子から散乱された粒子の状態は十分遠方で球面波

$$\psi_0(\boldsymbol{r},t) = c\,\frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)} \tag{5}$$

で与えられる．ここで，$r=|\boldsymbol{r}|$, c は比例定数，k は波動ベクトルの大きさ $|\boldsymbol{k}|$ を表している．

問５　球面波 (5) もまた自由粒子の定常状態（エネルギーの定まった固有状態）になっていることを示せ．

問6　平面波状態 (1) では，運動量が $\hbar\boldsymbol{k}$ に確定し，球面波状態 (5) では，その大きさの2乗のみが $\hbar^2k^2$ と確定している．この事は何を意味しているか，粒子の運動について，それぞれの状態の物理的意味を述べよ．

原点から $\boldsymbol{r}_j$ の位置にある原子によって生じる散乱波は，入射粒子がその原子に到達するためには原点にある原子に比べて t_j（$=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_j/\omega$，$\boldsymbol{k}$ は入射粒子の波動ベクトル，ω は振動数）だけ時間がかかるので，

$$\psi_j(\boldsymbol{r},t)=\psi_0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j,t-t_j)=c\,\frac{A}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|}\,\mathrm{e}^{i(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|-\omega(t-t_j))} \tag{6}$$

で与えられる．

問7　球面波状態（6）を重ね合わせてできる散乱粒子の状態 $\psi_s(\boldsymbol{r},t)$ は十分遠方で再び

$$\psi_s(\boldsymbol{r},t)=c\,F(\boldsymbol{q})\,\frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{i(kr-\omega t)} \tag{7}$$

のような球面波で与えられることを示せ．ここで，

$$F(\boldsymbol{q})=\sum_j \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_j} \tag{8}$$

を構造因子，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}$ を散乱ベクトル，$\boldsymbol{k}'=k\boldsymbol{r}/r$ を散乱球面波の波動ベクトルと言う．

ヒント：十分遠方で（6）の分母の $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|$ を r で置き換え，位相部分の $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|$ を $r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_j/r$ で近似する．

問8　構造因子は結晶の原子配列についての知識を与えてくれる．いま，原子の位置 $\boldsymbol{r}_j$ が基本の格子（平行六面体）を記述する３つの独立なベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の整数倍の和で

$$\boldsymbol{r}_j=l\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c} \tag{9}$$

のように表されるとする．(ここに，$l,m,n=0,1,2,\cdots,N-1$．N はそれぞれの方向の格子点の数) このとき，散乱された物質波が強め合う条件を求めよ．

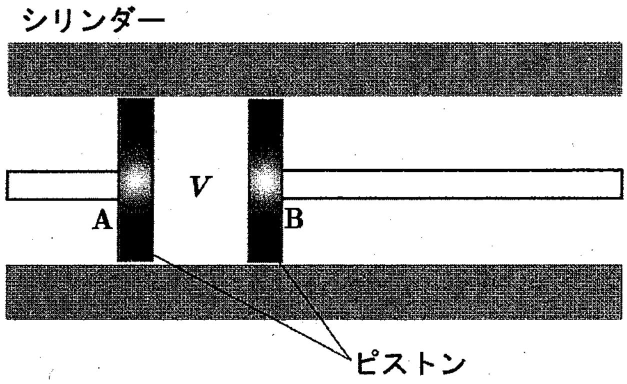
ヒント：公比 z の等比数列の和は

$$\sum_{m=0}^{N-1} z^m=\begin{cases} N & (z=1\text{ のとき}) \\ \dfrac{1-z^N}{1-z} & (z\neq 1\text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．

$\boxed{\text{IV}}$　以下の各問に答えよ．　（１００点）

問１　図のように，はじめシリンダー内にピストン A と B を入れて密閉し，その後圧力 p，体積 V，温度 T の気体を封入した．シリンダーの外から熱量 $d'Q$ を与えて気体を膨張させたとき，気体の内部エネルギー E が dE だけ変化し外へ仕事を行う．熱力学第１法則から，熱量は $d'Q = dE + pdV$ で与えられる．このとき，ピストンが自由に移動できるものとして，以下の各問に答えよ．ただし，系の定積熱容量，定圧熱容量，体膨張率，断熱膨張率をそれぞれ $C_V = \left(d'Q/dT\right)_V$，$C_p = \left(d'Q/dT\right)_p$，$\alpha = \left(\partial V/\partial T\right)_p/V$，$\alpha_S = \left(\partial V/\partial T\right)_S/V$ とする．なお，S を系のエントロピーとする．



（１）$E\left(T,V\right)$ の全微分形式および C_V を用いて，気体の内部エネルギーの変化 dE が

$$dE = C_V dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T dV \qquad ①$$

で与えられることを示せ．

（２）熱力学第１法則から α を用いて，$d'Q$ が

$$d'Q = C_V dT + \frac{C_p - C_V}{\alpha V} dV \qquad ②$$

で与えられることを示せ．

（３）シリンダーを断熱材で囲み，ピストン B を準静的に引っ張ったところ，気体の体積が微小体積 dV だけ増加した．このとき，この過程が準静的断熱膨張であるとして，②式から出発し，α_S を C_p，C_V，α を用いて表せ．さらに，$C_p > C_V$，$\alpha > 0$ として，系の温度がどうなるか説明せよ．

（4）断熱材を取り去って，図の状態から気体を膨張させた．このとき，$d'Q \le TdS$ であるように変化が進む．系のヘルムホルツの自由エネルギー F （$= E - TS$）の変化 dF が

$$dF \le -SdT - pdV \qquad ③$$

で与えられることを示せ．また，等温・定積変化において，F の値が最小になったとき，系はどのような状態になるか説明せよ．

問２　N 個の独立で区別できる粒子からなる体系を考える．各粒子は $-\varepsilon$，$+\varepsilon$ の２つのエネルギー状態を取り得るとして，以下の各問に答えよ．

（1）系の全エネルギー E が，$E = M\varepsilon$，$M = -N, -N+2, -N+4, \cdots, N-4, N-2, N$ で与えられることを示せ．

（2）粒子の総数 N 個のうち，m 個が $-\varepsilon$ の準位に，n 個が $+\varepsilon$ の準位にあるとすると，エネルギー E は $E = (n - m)\varepsilon$ で与えられる．$M = n - m$ および $N = n + m$ を用いれば，m および n は $m = (N - M)/2$，$n = (N + M)/2$ となる．このとき，系の微視的状態の数 W を N および M で表せ．

（3）N が十分大きいとき，系のエントロピー S はスターリングの公式：$\log N! \approx N \log N - N$ を用いて，

$$S = -k_{\mathrm{B}}\left(\frac{N-M}{2}\log\frac{N-M}{2N} + \frac{N+M}{2}\log\frac{N+M}{2N}\right)$$

で与えられることを示せ．ただし，k_{B} はボルツマン定数である．

（4）系の温度 T は $1/T = (\partial S/\partial E)_V$ で与えられる．この式と $E = M\varepsilon$ を組み合わせて計算すると，M は N，ε，T，k_{B} のみで表される．このとき，系の全エネルギー E が

$$E = -N\varepsilon \tanh\left(\frac{\varepsilon}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$$

となることを示し，低温領域（$T \to 0$）での E の振る舞いを説明せよ．必要なら，公式：$\tanh^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$，（$-1 < x < 1$）を用いよ．

2014 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2013 年 8 月 26 日

注意事項

1. すべての解答用紙（B4 白紙）の左上に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみ使用し，縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I 以下の各問に答えよ. (100 点)

[1] 次の英文を読んで，各問に答えよ．なお，参考のために，左肩番号を付した単語の意味が文章の最後に説明してある．

We study crystal structure through the [1] diffraction of photons, neutrons, and electrons. The diffraction depends on the crystal structure and on the wavelength. At optical wavelengths such as 5000 Å, the [2] superposition of the waves scattered elastically by the individual atoms of a crystal results in ordinary optical [3] refraction. When the wavelength of the [4] radiation is comparable with or smaller than the [5] lattice constant, we may find diffracted beams in directions quite different from the [6] incident direction.

A) [7] W. L. Bragg presented a simple explanation of the diffracted beams from a crystal. The Bragg [8] derivation is simple but is convincing only because it reproduces the correct result. Suppose that the incident waves are reflected specularly from parallel planes of atoms in the crystal, with each plane reflecting only a very small fraction of the radiation, like a lightly silvered mirror. In [9] specular (mirrorlike) reflection the angle of incidence is equal to the angle of reflection. The diffracted beams are found when the reflections from parallel planes of atoms [10] interfere constructively, as in Fig. 1. We treat elastic scattering, in which the energy of the [11] x-ray is not changed on reflection.

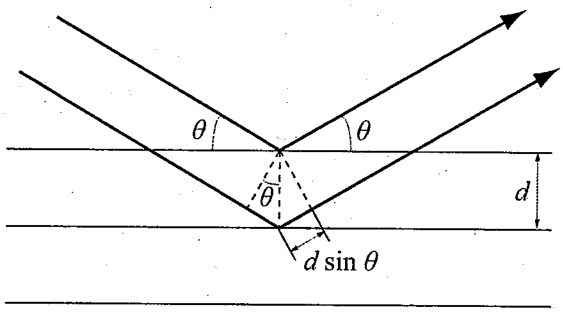


Figure 1 Deviation of the Bragg equation $2d \sin \theta = n\lambda$; here d is the spacing of parallel atomic planes and $2\pi n$ is the difference in phase between reflections from successive planes. The reflecting planes have nothing to do with the surface planes bounding the particular specimen.

Consider parallel lattice planes spaced d apart. The radiation is incident in the plane of the paper. The path difference for rays reflected from [12] adjacent planes is $2d \sin \theta$, where θ is measured from the plane. Constructive interference of the radiation from successive planes occurs when the path difference is an integral number n of wavelengths λ, so that

$$2d \sin \theta = n \lambda \tag{1}$$

This is B) the Bragg law, which can be satisfied only for wavelength $\lambda \leq 2d$.

C) Although the reflection from each plane is specular, for only certain values of θ will the reflections from all periodic parallel planes add up [13] in phase to give a strong reflected beam. If each plane were perfectly reflecting, only the first plane of a parallel set would see the radiation, and any wavelength would be reflected. But each plane reflects 10^{-3} to 10^{-5} of the incident radiation, so that 10^3 to 10^5 planes may contribute to the formation of the Bragg-reflected beam in a perfect crystal.

The Bragg law is a consequence of the [14] periodicity of the lattice. Notice that the law does not refer to the composition of the basis of atoms associated with every lattice point. We shall see, however, that the composition of the basis determines the relative intensity of the various orders of diffraction (denoted by n above) from a given set of parallel planes.

(“*Introduction to the Solid State Physics, 8th Edition*”, By C. Kittel, John Wiley & Sons 2004より抜粋（一部改変）．)

Hints: [1] diffraction 回折, [2] superposition 重ね合わせ, [3] refraction 屈折, [4] radiation 放射，輻射, [5] lattice 格

子, [6]incident 入射する, [7]W. L. Bragg(ブラッグ) 物理学者の名前, [8]derivation 導出, [9]specular 鏡面, [10]interfere 干渉する, [11]ray (光)線, (輻射)線, [12]adjacent 隣接する, [13]in phase 同位相の, [14]periodicity 周期性

問1　下線部 A) を和訳せよ.

問2　下線部 B) の the Bragg law の内容を説明せよ.

問3　下線部 C) を和訳せよ.

問4　本文では結晶構造を研究する手法が複数述べられている. それらを全て書け.

［2］次の英文を読んで, 各問に答えよ. なお, 参考のために, 左肩番号を付した単語の意味が文章の最後に説明してある.

A) The high [1]conductivity of metals is due to electrons within the metal that are not attached to atoms but are free to move through the whole solid. Proof of this is the fact that electric current in a copper wire--unlike current in an ionic [2]solution--transports no chemically identifiable substance. A current can flow steadily for years without causing the slightest change in the wire. It could only be electrons that are moving, entering the wire at one end and leaving it at the other.

We know from chemistry that atoms of the metallic elements rather easily lose their [3]outermost electrons. These would be [4]bound to the atom if it were isolated, but become [5]detached when many such atoms are packed close together in a solid. B) The atoms thus become positive ions, and these positive ions form the rigid lattice of the solid metal, usually in an orderly array. The detached electrons, which we shall call the conduction electrons, move through this three-dimensional lattice of positive ions.

C) The number of conduction electrons is large. The metal sodium, for instance, contains 2.5×10^{22} atoms in 1 cm^3, and each atom provides one conduction electron. No wonder sodium is a good conductor! D) But wait, there is a deep puzzle here. It is brought to light by applying our simple theory of conduction to this case. As we have seen, the mobility of a charge carrier is determined by the time τ during which it moves freely without bumping into anything. If we have 2.5×10^{22} electrons per cubic centimeter of mass m_e, we need only the experimentally measured conductivity of [6]sodium to calculate an electron's [7]mean free time τ. The conductivity of sodium at room temperature, in CGS units, is 1.9×10^{17} sec^{-1}. Solving a certain equation for τ, we find $\tau = 3 \times 10^{-14}$ sec. This seems a *surprisingly long* time for an electron to move through the lattice of sodium ions without suffering a [8]collision. The thermal speed of an electron at room temperature ought to be about 10^7 cm/sec, according to kinetic theory, which in that time should carry it a distance of 3×10^{-7} cm. Now the ions in a crystal of sodium are practically touching one another. The centers of adjacent ions are only 3.8×10^{-8} cm apart, with strong electric fields and many bound electrons filling most of the [9]intervening space. How could an electron travel nearly 10 lattice spaces through these obstacles without being deflected? Why is the lattice of ions so *easily* [10]*penetrated* by the conduction electrons?

(“*Electricity and Magnetism, 2nd Edition*”, By E. M. Purcell, McGraw-Hill 1985 より抜粋（一部改変）.)

Hints: [1]conductivity 伝導度, [2]solution 溶液, [3]outermost 最外殻の, [4]bind 束縛する, [5]detach 離れる, [6]sodium ナトリウム, [7]mean free time 平均自由時間, [8]collision 衝突, [9]intervene (～の間に) 入る, [10]penetrate 貫通する

問１　下線部 A) を和訳せよ.

問２　下線部 B) に関して, 原子が正イオンになる理由について本文に書かれていることを述べよ.

問３　下線部 C) を和訳せよ.

問４　下線部 D) に関して, deep puzzle の内容について述べよ.

[３] 大学院進学後に, どのような研究をしたいのか, １００～１５０語程度の英文で表現せよ.

[４] つぎの文章を英訳せよ.

(1) ヘリウムガスは天然ガスを採掘する際に副生成物として採取される. その約 7 割がアメリカで生産されてきたが, そのアメリカで生産設備のトラブルが起こり, 大規模な減産を迫られた. その結果, 日本でも不足する事態となった.

(2) 沖縄の女性は全国長寿ランキングでトップに立ち続けてきた. しかし, 最近公表された最新の調査によると, 1975 年以来ナンバーワンの地位を保ってきた沖縄の女性は３番目に追いやられた. 問題は, 沖縄県民が伝統的な料理を十分食べていないという点だ. 代わりに, 多くの沖縄県民は, 高カロリーのアメリカのファーストフードを今日好んで食べるようになった.

Hints: 採掘する exploit, 副生成物 byproduct material, 採取する extract, 沖縄の Okinawan, 全国長寿ランキング national longevity rankings