2014 年度

琉球大学大学院理工学研究科

博士前期課程

物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題

専門（物理）

2014 年 2 月 12 日

注意事項

1. すべての解答用紙 (B4 白紙) の左上に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみ使用し，縦置き横書きで解答すること。
3. 大問毎に別々の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
5. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I　振り子運動について、以下の各問いに答えよ。 (100 点)

■図 1 のような質量が無視できる長さ l の糸と質量 m の質点からなる振り子を考える。糸と鉛直線とのなす角を θ とする。

問 1　運動方程式を求め、θ に関する微分方程式を導け。

問 2　θ が十分小さい（$|\theta| \ll 1$）として運動方程式を解き、$\theta(t)$ を求めよ。また、振り子の周期 T を求めよ。ただし、$t = 0$ に振れ角 $\theta(0) = \theta_0$ でそっと手を離したとする。

問 3　力学的エネルギーが保存することを示せ。

■図 2 のような剛体振り子を考える。点 O を水平固定軸、点 G を重心とする。OG 間の距離を l、剛体の質量を M、固定軸まわりの慣性モーメントを I、重力加速度を g とする。OG と鉛直線とのなす角を θ とする。

問 4　角運動量と力のモーメントの関係から固定軸まわりの剛体の運動方程式を求めよ。

問 5　運動エネルギー K と位置エネルギー U を求め、この系の Lagrange 関数 L を書け。

問 6　Lagrange 方程式から剛体の運動方程式を導出せよ。

問 7　θ が十分小さい（$|\theta| \ll 1$）とする。振り子の周期 T を求めよ。

■次に、図 3 のような質量の無視できる長さ l の糸に半径 a、質量 M の一様な球をつけた剛体振り子を考える。

問 8　球の重心まわりの慣性モーメントが $I_G = \dfrac{5}{2}Ma^2$ となることを示せ。

問 9　振り子の固定軸まわりの慣性モーメント I を求めよ。

【参考】　質量 M、半径 a の一様な円盤の中心軸まわりの慣性モーメント ： $I_G = \dfrac{1}{2}Ma^2$

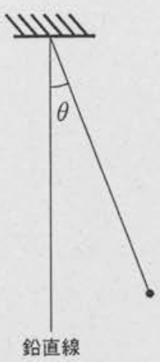


図 1

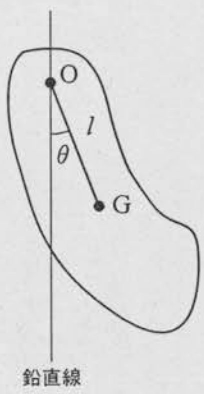


図 2

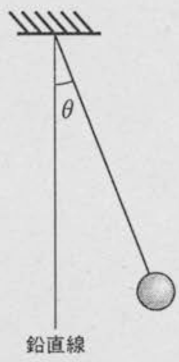


図 3

$\boxed{\text{II}}$ 以下の問いに答えよ。 (100 点)

図 1 のように，真空中に置かれた面積 S の大きさの等しい 2 枚の導体平極板を平行に間隔 ℓ だけ離してコンデンサーを作った。真空の誘電率を ϵ_0 とし，極板の端の効果を無視する。

はじめに，このコンデンサーの極板間に直流電圧をかけて，それぞれ正負の大きさ Q の電荷を与えた。

問 1 極板は，等電位面と考えられる。電場は，等電位面に対して，垂直方向を向くことを説明せよ。

問 2 2 つの極板で挟まれた領域の外側の電場がゼロになることを説明せよ。

問 3 電場についてのガウスの法則について説明せよ。

問 4 極板で挟まれた領域の電場 E_0 をガウスの法則を用いて求めよ。

問 5 コンデンサー内の電場の持つエネルギー密度 U_d を求め，電場 E_0 を用いて表せ。

問 6 極板の単位面積あたりに働く力 F_0 の大きさを求め，電場 E_0 を用いて表せ。また，力 F_0 はどの方向に働くか。

次に，図 2 のように，このコンデンサーの極板間に，正負の大きさ Q の電荷を与えたまま，面積 S，誘電率 ϵ_1 の誘電体を隙間なく挿入した。

問 7 誘電体中に生じる電束密度 D_1 を求め，電場 E_0 を用いて表せ。

問 8 誘電体中の電場 E_1 を求め，電場 E_0 を用いて表せ。

問 9 極板と誘電体の境界面に生じる分極ベクトル (電気分極) の大きさ P を求め，電場 E_0 を用いて表せ。

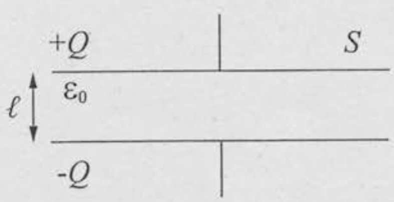


図 1

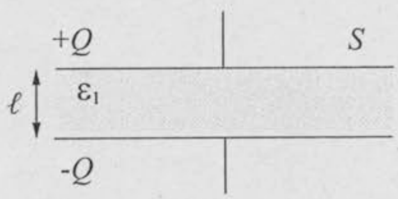


図 2

$\boxed{\text{III}}$ 質量 m の粒子が階段型ポテンシャル ($V_0 > 0$)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ V_0 & (x > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

の中で, x 軸上を運動するものとする. 但し, 粒子は最初は $x = -\infty$ から x の正の方向に向かって入射するものとし, また全エネルギー E は V_0 より大きい ($E > V_0$) とする. 以下の問に答えなさい.

(100 点)

問 1 時間に依存するシュレディンガー方程式を解くことによって, 波動関数の時間依存性は $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ と書けることを示しなさい.

問 2 領域 $x < 0$ において, 時間に依存しないシュレディンガー方程式を解くことによって, 波動関数 $\psi(x)$ が $\psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$ と書けることを示し, k_1 を求めなさい. 但し, A, B は定数とし, k_1 は正の量とする.

問 3 同様にして, 領域 $x > 0$ での波動関数が $\psi(x) = Ce^{ik_2x}$ と書けることを示し, k_2 を求めなさい. 但し, C は定数とし, k_2 は正の量とする.

問 4 $x = 0$ において解を滑らかにつなぐことによって, k_1, k_2 を用いて $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}$ を表しなさい.

問 5 反射率 R と透過率 T を k_1, k_2 を用いて表し, さらに確率が保存していることを示しなさい.

問 6 この問題を古典力学で考えるとすると, $x = 0$ で階段型のポテンシャルの影響を受けた粒子はその後どういう運動を行うかについて述べなさい.

問 7 これまでの問題では, 全エネルギー E は V_0 より大きい ($E > V_0$) と仮定した. もし, 全エネルギー E が V_0 より小さい ($E < V_0$) と仮定するとき, 反射率 R と透過率 T の値はどうなるかについて述べなさい.

問 8 ポテンシャル V_0 が無限に高いとき ($V_0 = \infty$), 波動関数 $\psi(x)$ はどういう形になるかについて述べなさい.

$\boxed{\text{IV}}$ 以下の問いに答えよ. (100 点)

問1　圧力 p, 体積 V, 温度 T のもとで, ファン・デル・ワールスの状態方程式

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT \quad (a, b, R \text{ は定数})$$

で記述される気体を考える. 熱力学第1法則から, 熱量 $d'Q$ について, $d'Q=dU+pdV$ の関係がある. U は内部エネルギーである.

(1) (a) 熱力学第1法則から定積比熱 $C_V=\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V$ について, $\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ となることを示せ.

(b) ファン・デル・ワールスの状態方程式を圧力 p について解き, p の温度 T に関する偏微分が, $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=\frac{R}{V-b}$ となることを示せ.

次に, 内部エネルギー U とエントロピー S の全微分 dU, dS を考える.

(2) V, T の関数として U の全微分は,

$$dU=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT+\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \text{ となる.}$$

(a) U の全微分 dU が, $dU=C_V dT+\frac{a}{V^2}dV$ となることを示せ.

ただし, $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=-p+T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ という関係や, (1) の結果を利用してよい.

(b) ファン・デル・ワールスの状態方程式が成り立つ場合, 熱量 $d'Q$ は

$$d'Q=C_V dT+\frac{RT}{V-b}dV$$

と書けることを, 熱力学第1法則と, (a)で示されたことを用いて示せ.

(3) この気体での断熱準静的変化を考える. エントロピー S の全微分 dS と $d'Q$ には, $dS=\frac{d'Q}{T}$ の関係がある.

(a) 断熱準静的変化で, dS はどのような値をとるか?

(b)

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)^{\gamma}= \text{一定}$$

であることを示せ. ここで, $\gamma=(C_V+R)/C_V$ である. ただし定積比熱 C_V は体積によらず一定として計算してよい.

[次に続く]

問２　相互作用のない N 個の粒子からなる巨視的な系がある．各粒子はエネルギー $\pm\varepsilon$ の２状態のいずれかを取り，系の微視的状態は「各粒子がいずれの状態をとるか」で指定される．ボルツマン定数を k とする．

エネルギー ε, $-\varepsilon$ の状態の粒子数がそれぞれ $N/2$ で同数の時，系の全エネルギーは $\varepsilon\times N/2+(-\varepsilon)\times N/2=0$ となる．

（１）(a) エネルギー ε, $-\varepsilon$ の状態の粒子数がそれぞれ $N/2+2$, $N/2-2$ の時，系の全エネルギーを計算せよ．

(b) 全エネルギーが 2ε のとき，エネルギー ε, $-\varepsilon$ の状態の粒子数は，それぞれいくつか.

(c) 系の全エネルギーが 2ε の時，各粒子の取り得る微視的状態の場合の数を $W(2)$ とすると，

$$W(2)={}_{N}C_{N/2+1}=\frac{N!}{(N/2+1)!(N/2-1)!}$$

と求められる．このようになる理由を説明せよ．

（２）一般に，系の全エネルギーが $n\varepsilon$ である時，取り得る微視的状態の数 $W(n)$ を求めよ．ここで n は整数である．

（３）（２）の n は, $n=-N,\ -N+2,\ -N+4,\ldots,N-4,N-2,N$ を取りうる．

$\sum_n{}'$ が $n=-N,\ -N+2,\ -N+4,\ldots,N-4,N-2,N$ の和を表すものとすると，系の微視的状態の分配関数（状態和）Z を表す式を, $\sum_n{}'$, $W(n)$, ε, k, および温度 T を使って表せ.

（４）（３）の状態和を求めると, $\left(e^{\varepsilon/kT}+e^{-\varepsilon/kT}\right)^N$ となる.

系の自由エネルギー $F=-kT\ln Z$, エントロピー $S=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)$ を求めよ．さらに，系の全エネルギーの期待値 U を求めよ．

2014年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2014年2月12日

注意事項

1. すべての解答用紙（B4白紙）の左上に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I 次の英文を読んで，以下の問に答えよ。

In principle, we do this by firing a charged particle through the point at which $\vec{B}$ is to be defined, using various directions and speeds for the particle and determining the force $\vec{F}_B$ that acts on the particle at that point. After many such trials we would find that when the particle's velocity $\vec{v}$ is along a particular axis through the point, force $\vec{F}_B$ is zero. (ア) For all other directions of $\vec{v}$, the magnitude of $\vec{F}_B$ is always proportional to $v \sin\phi$, where ϕ is the angle between the zero-force axis and the direction of $\vec{v}$. Furthermore, the direction of $\vec{F}_B$ is always perpendicular to the direction of $\vec{v}$. (These results suggest that a cross product is involved.)

We can then define a magnetic field $\vec{B}$ to be a vector quantity that is directed along the zero-force axis. We can next measure the magnitude of $\vec{F}_B$ when $\vec{v}$ is directed perpendicular to that axis and then define the magnitude of $\vec{B}$ in terms of that force magnitude:

$$B = \frac{F_B}{|q|v},$$

where q is the charge of the particle.

We can summarize all these results with the following vector equation:

$$\vec{F}_B = \boxed{\text{（イ）}}; \qquad (1\text{-}1)$$

that is, the force $\vec{F}_B$ on the particle is equal to the charge q times the cross product of its velocity $\vec{v}$ and the field $\vec{B}$ (all measured in the same reference frame).

Equation 1-1 tells us all this plus the direction of $\vec{F}_B$. We know that the cross product $\vec{v} \times \vec{B}$ in Eq. 1-1 is a vector that is perpendicular to the two vectors $\vec{v}$ and $\vec{B}$. The $\boxed{\text{（ウ）}}$ rule tells us that the thumb of the right hand points in the direction of $\vec{v} \times \vec{B}$ when the fingers sweep $\vec{v}$ into $\vec{B}$. If q is positive, then the force $\vec{F}_B$ has the same sign as $\vec{v} \times \vec{B}$ and thus must be in the same direction; that is, for positive q, $\vec{F}_B$ is directed along the thumb. If q is negative, then the force $\vec{F}_B$ and cross product $\vec{v} \times \vec{B}$ have opposite signs and thus must be in opposite directions. For negative q, $\vec{F}_B$ is directed opposite the thumb.

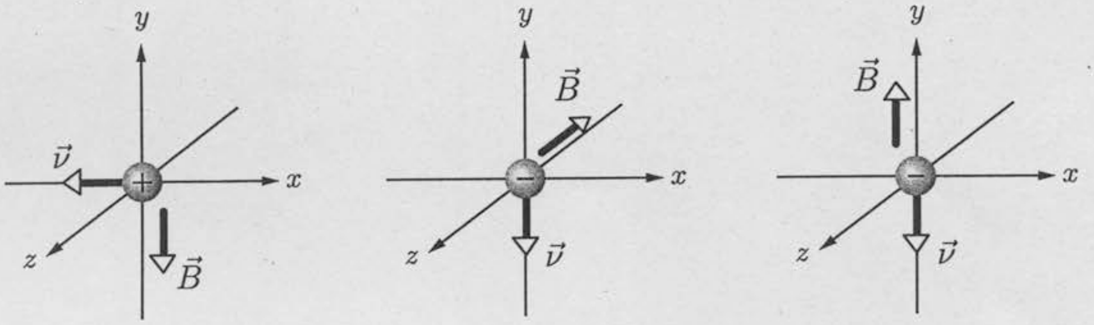
Regardless of the sign of the charge, however,

The force $\vec{F}_B$ acting on a charged particle moving with velocity $\vec{v}$ through a magnetic field $\vec{B}$ is *always* perpendicular to $\vec{v}$ and $\vec{B}$.

Thus, (エ) $\vec{F}_B$ *never* has a component parallel to $\vec{v}$. This means that $\vec{F}_B$ cannot change the particle's speed v (and thus it cannot change the particle's kinetic energy). The force can change only the direction of $\vec{v}$ (and thus the direction of travel); only in this sense can $\vec{F}_B$ accelerate the particle.

PROBLEM - I

The figure shows three situations in which a charged particle with velocity $\vec{v}$ travels through a uniform magnetic field $\vec{B}$. In each situation, what is the direction of the magnetic force $\vec{F}_B$ on the particle?



(a) (b) (c)

(D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fundamental of Physics Extended*, Wiley; 8th edition より一部改変して引用)

問 1　下線部（ア）を和訳せよ。

問 2　（イ）に入る式を答えよ。

問 3　（ウ）に入る語を，本文中の単語を用いて答えよ。

問 4　下線部（エ）を和訳せよ。

問 5　$\vec{F}_B$ は一般に何と呼ばれているか、答えよ。

問 6　**PROBLEM - I** を日本語で解答せよ。

II 次の英文を読んで，以下の問に答えよ。

There are three transfer mechanisms: $\boxed{\text{（オ）}}$, $\boxed{\text{（カ）}}$, and $\boxed{\text{（キ）}}$.

$\boxed{\text{（オ）}}$

If you leave the end of a metal porker（火かき棒）in a fire for enough time, its handle will get hot. Energy is transferred from the fire to the handle by (thermal) conduction along the length of the porker.

Consider a slab（厚板）of face area A and thickness L, whose faces are maintained at temperatures T_H and T_C by a hot reservoir and a cold reservoir, as in Fig. 2-1. Let Q be the energy that is transferred as heat through the slab, from its hot face to its cold face, in time t. Experiment shows that the *conduction rate* P_{cond} (the amount of energy transferred per unit time) is

$$P_{cond} = \frac{\boxed{\text{（ク）}}}{\boxed{\text{（ケ）}}} = kA\frac{T_H - T_C}{L} \quad \text{(J/s)}, \qquad \text{(2-1)}$$

in which k, called the *thermal conductivity*, is a constant that depends on the material of which the slab is made. Table 1 gives the thermal conductivities of some common metals.

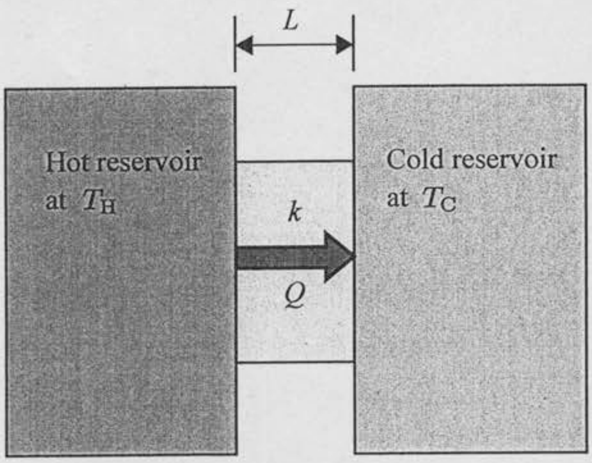


Fig. 2-1 $\boxed{\text{（オ）}}$
Energy is transferred as heat from a reservoir at temperature T_H to a cooler reservoir at temperature T_C through a conducting slab of thickness L and thermal conductivity k.

Table 1
Some Thermal Conductivities

Substance	k (W/m · K)
Metals	
Stenless steel	14
Lead	35
Iron	67
Brass	109
Aluminum	235
Copper	401
Silver	428

(カ)

When you look at the flame of a candle or a match, you are watching thermal energy being transported upward by convection. Such energy transfer occurs when a fluid, such as air or water, comes in contact with an object whose temperature is higher than that of the fluid. The temperature of the part of the fluid that is in contact with the hot object increases, and that fluid expands and thus becomes less dense. Because this expanded fluid is now lighter than the surrounding cooler fluid, buoyant forces (浮力) cause it to rise. Some of the surrounding cooler fluid then flows so as to take the place of the rising warmer fluid, and the process can then continue.

(キ)

The third method by which an object and its environment can exchange energy as heat is via electromagnetic waves. Energy transferred in this way is often called thermal radiation to distinguish it from electromagnetic *signal* and from nuclear radiation.

The rate P_{rad} at which an object emits energy via electromagnetic radiation depends on the object's surface area A and the temperature T of that area in kelvins and is given by

$$P_{\mathrm{rad}} = \sigma \varepsilon A T^4 \quad \text{(W)} \qquad (2\text{-}2)$$

Here $\sigma = 5.6704 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$ is called the *Stefan-Boltzmann constant* (ステファンーボルツマン定数). The symbol ε represents the *emissivity* (放射率) of the object's surface, which has a value between 0 and 1, depending on the composition of the surface. A surface with the maximum emissivity of 1.0 is said to be a *blackbody radiator*, but such a surface is an ideal limit and does not occur in nature. Note again that the temperature in Eq. 2-2 must be in kelvins so that a temperature of absolute zero corresponds to no radiation.

PROBLEM - II

Consider the slab shown in Fig. 2-1. Suppose that $L = 25.0$ cm, $A = 90.0$ cm^2, and the material is copper. If $T_{\mathrm{H}} = 125$ °C, $T_{\mathrm{C}} = 10.0$ °C, and a steady state is reached, find the conduction rate through the slab.

PROBLEM - III

A sphere of radius 0.500 m, temperature 27 °C, and emissivity 0.850 is located in an environment of temperature 77.0 °C. At what rate does the sphere emit?

(D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fundamental of Physics Extended*, Wiley; 8th edition より一部改変して引用)

問1　(オ)，(カ)，(キ) に入る語を，本文中の単語を用いてそれぞれ答えよ。
　　ただし，同じ記号には同じ単語が入る。

問2　(カ) について，どのような仕組みで，その現象が起きるのか解説せよ。

問3　(ク)，(ケ) に入る本文中の記号をそれぞれ答えよ。

問4　a *blackbody radiator* とは何か解説せよ。

問5　**PROBLEM - II** を日本語で解答せよ。(計算式を示し，単位に気をつけること)

問6　**PROBLEM - III** を日本語で解答せよ。(計算式を示し，単位に気をつけること)