2015 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門（物理）

2014 年 8 月 26 日(火)

注意事項

1. 全ての解答用紙（B４用紙）の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 全ての解答用紙の□（左上）に大問番号（Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ）を記入すること。
3. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
5. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
6. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

$\boxed{\text{I}}$ 以下の各問に答えよ。 (100 点)

図のように，一端が固定された弾性棒の端 Q に長さ l で一端に質量 m の質点がつけられている伸び縮みしないひもがついている。弾性棒がまっすぐになったときの Q の位置を原点 O とし，水平右向きに X 軸，鉛直下向きに Y 軸をとる。質点 m は XY 平面内を振動し，弾性棒には Q の X 方向の変位 x に比例する復元力がはたらく。ひもと鉛直方向のなす角を θ，重力加速度の大きさを g とする。弾性棒とひもの重さは無視でき，空気抵抗はないものとする。また，弾性棒の端 Q の Y 方向の変位は無視できる。

問 1　質点 m の位置 $\mathrm{P}(X, Y)$ は，$X = x + l\sin\theta$，$Y = l\cos\theta$ である。この系の運動エネルギー T を x および θ を用いて表せ。

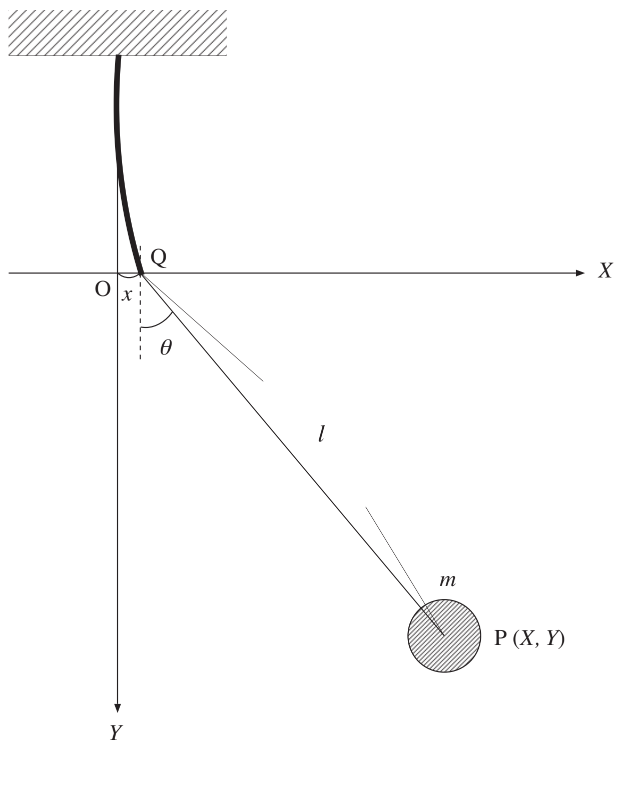
問 2　この系の位置エネルギー U を x および θ を用いて表せ。ただし，弾性棒の弾性係数を K とする。

問 3　この系の Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ を書け。

問 4　x および θ についての Lagrange の運動方程式を導け。

問 5　θ が十分小さいとし，θ および $\dot{\theta}$ の 2 次以上の項は無視できるとする。x と θ の時間変化をそれぞれ $x(t) = Ae^{i\omega t}$ および $\theta(t) = Be^{i\omega t}$ とおいて，角振動数 ω を求めよ。

問 6　θ が十分小さいとき，質点 m の運動は Y 軸上のある点 O$'$ を固定点とする単振り子の運動とみなせる。$\omega > 0$ として，X の時間変化と点 O$'$ のまわりの角運動量 L の時間変化を図示せよ。



$\boxed{\mathrm{II}}$ 以下の各問に答えよ。 (100 点)

問１ 図１のように，内半径 a，外半径 b の同心導体球殻の間に中心 O からの距離 r によって変化する誘電率 $\varepsilon(r)$ の誘電体が詰められている。この球形コンデンサーの内殻に真電荷 $+Q$ を，外殻に真電荷 $-Q$ を与え接地した。詰められた誘電体の誘電率 $\varepsilon(r)$ が球の中心 O からの距離 r（$a < r < b$）を使って

$$\varepsilon(r) = \frac{k}{r}$$

で与えられる。ただし，k は定数であり，$r < a$ と $b < r$ の領域の誘電率は ε_0（真空中の誘電率）とする。

(1) $r < a$，$a < r < b$，$b < r$ の各領域の電場の大きさ $E(r)$ をそれぞれ求めよ。また，$E(r)$ を r の関数として図示せよ。

(2) 内殻と外殻の間の電位差 V とこの球形コンデンサーの電気容量 C を求めよ。

(3) $a < r < b$ の領域でのエネルギー密度 $u(r)$ は

$$u(r) = \frac{1}{2}\varepsilon(r)E(r)^2$$

で与えられる。$u(r)$ を用いた積分を行うことによって，この球形コンデンサーの $a < r < b$ の領域に蓄えられるエネルギー U_E を求めよ。また，求めた U_E の値が，コンデンサーに蓄えられる静電エネルギー $U = \dfrac{1}{2}CV^2$ に等しいことを示せ。

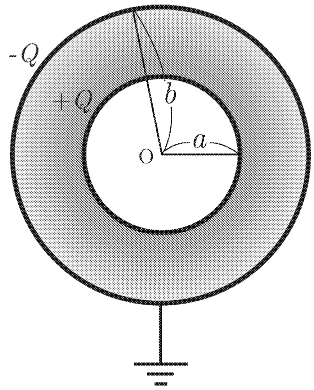


図 1

問2 図2のように，真空中に置いてある1巻の導線でできた半径 a の円に電流 I が反時計回りに流れている。ただし，真空中の透磁率を μ_0 とし，導線の抵抗と導線の太さは無視できるものとする。

(1) 導線上の微小部分 Δs が円の中心Oを通り，円に垂直な中心軸上の点 $\mathrm{P}(0, 0, z)$ に作る磁束密度の大きさ ΔB を求めよ。また，ΔB の向きを図示せよ。ただし，Δs から点Pまでの距離を r とする。

(2) 点Pに作られる x と y 軸方向の磁束密度の大きさ B_x と B_y がそれぞれ0になることを説明せよ。また，z 軸方向の磁束密度の大きさ B_z が

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

で表されることを示せ。

(3) 円の中心Oでの z 軸方向の磁束密度の大きさ B_0 を求めよ。

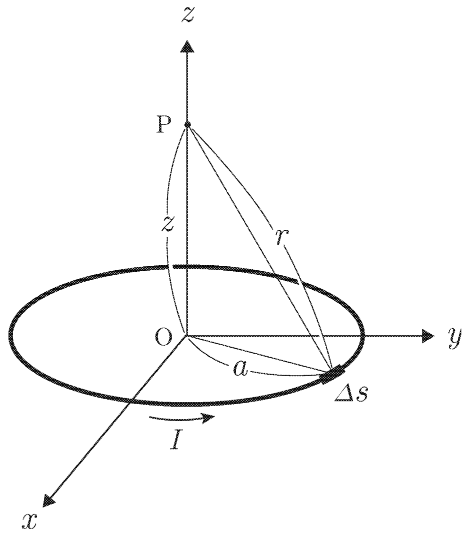


図2

次に，n 巻の導線でできた半径 a の円形の2つのコイルを用意し，図3のようにコイルの面を平行に間隔 $2b$ で配置した。また，コイルの中心Oはそれぞれ x 軸上にあり，コイルには同じ方向に電流 I が流れている。$a = 2b$ の条件を満たすとき，これらのコイルをヘルムホルツコイルと呼ぶ。

(4) x 軸上の2つの円の中点Cから x だけずれた点での磁束密度の大きさ B_x を (2) の結果を用いて求めよ。

(5) 中点Cからのずれ x は $|x| \ll b$ の条件を満たす。(4) で求めた B_x の値を x について テイラー展開することにより，x 軸上の2つの円の中点C付近における B_x の特徴を示せ。

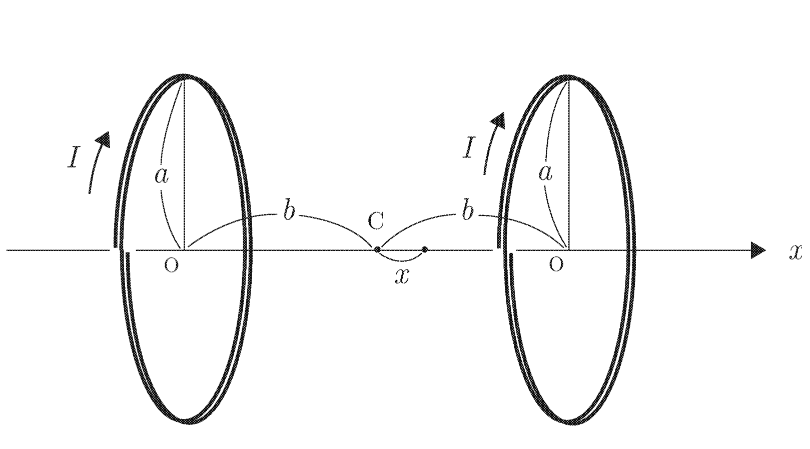


図3

Ⅲ 以下の各問に答えよ。 (100 点)

問 1 $E=\dfrac{1}{2m}p^2$，$E=\hbar\omega$ および $\dfrac{d\omega}{dk}=\dfrac{p}{m}$ (群速度) という関係から，ド・ブロイの関係 $p=\hbar k$ を導け。ただし，$k=0$ ならば $p=0$ とする。

問 2 次のような関数で表される波動関数を考える。それぞれを $-\pi\leq x\leq\pi$ の領域で規格化し，確率密度のグラフの概形を描け。

(1) $\psi(x)=\sin x$

(2) $\psi(x)=e^{inx}$ (n は整数)

(3) $\psi(x)=x$ $(x\geq 0)$

$\psi(x)=-x$ $(x<0)$

問 3 座標 x，y，z と，共役な運動量 $p_x\left(=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$，$p_y$，$p_z$ について，以下の交換関係を求めよ。

(1) $[x,y]$ (2) $[p_x,p_y]$ (3) $[x,p_x]$

問 4 波動関数 $\psi(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}a}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}+ikx}$ で与えられる波束がある。なお，x の範囲は $-\infty\leq x\leq\infty$ である。

(1) 期待値 $\langle x\rangle$，$\langle x^2\rangle$，$\langle p\rangle$ を求めよ。

(2) $\Delta x\Delta p=\dfrac{\hbar}{2}$ となることを示せ。なお，$(\Delta x)^2=\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle$，$(\Delta p)^2=\langle(p-\langle p\rangle)^2\rangle$ と定義される。

参考. $$\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}a^3,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx=\sqrt{\pi}a.$$

問 5 一辺が L の立方体の箱の中に閉じ込められた自由粒子のシュレーディンガー方程式を考える。波動関数の連続性から，箱の面上で波動関数 $\psi(x, y, z)$ が 0 になるような境界条件を満たす。ここで，自由粒子のエネルギーを E，粒子の質量を m とする。

(1) この系のシュレーディンガー方程式を書け。

(2) 波動関数の境界条件を書け。

(3) シュレーディンガー方程式を解き，エネルギー固有値と固有関数を求めよ。

(4) 1 番エネルギーの低い状態 (基底状態) と 2 番目にエネルギーの低い状態 (第 1 励起状態) でのエネルギー固有値と固有関数をすべて求めよ。

$\boxed{\text{IV}}$ 以下の各問に答えよ。 (100 点)

問1 以下の文章は正しいか。正しいのなら「○」と答え，正しくないなら間違っている点を指摘せよ。

(1) 熱は状態量なので，気体が状態変化する際は変化させる経路によらず同じ値になる。

(2) 「水に砂糖を混ぜて砂糖水にする」という操作は，蒸留すれば元に戻せるから可逆変化である。

(3) マックスウェル・ボルツマン分布を使って気体分子の運動速度の x 成分 v_x の期待値を計算すると，$\langle v_x \rangle = 0$ であった。これから，気体分子の速さの平均も 0 であることがわかる。

(4) 互いに粒子の移動がない二つの系が熱的に接触して平衡状態に達している状態をカノニカル分布で考えたとき，全体の系の分配関数はそれぞれの系の分配関数の和になる。

問2 磁場 H 中に磁気モーメントの大きさが μ である粒子が一個ある。運動エネルギーなどは無視して，粒子の取り得る状態が磁場と平行になるか反平行になるかの二つしかないとすると，この二つの状態はそれぞれ，$-\mu H$ と μH のエネルギーを持つ。系の温度は T である。ボルツマン定数を k_{B} とする。

(1) この 1 粒子系の分配関数 Z を求めよ。

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。

(3) 磁気モーメント M の期待値 $\langle M \rangle$ が $-\dfrac{\partial F}{\partial H}$ で計算できることを，統計力学的確率の視点から説明せよ。

(4) 磁場が十分に弱いとして H の 1 次までの近似をすると $\langle M \rangle = \chi H$ となる。この χ（磁化率）は温度に反比例することを示せ。

(5) 上の (4) の結果は，もちろん $T = 0$ に近づくと使えない。$T \to 0$ での磁気モーメント M の期待値はどうなるか。

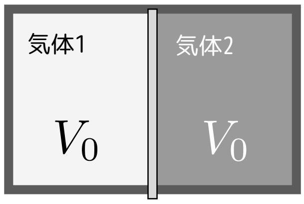
(6) 高温の極限 $T \to \infty$ $(\mu H \ll k_{\mathrm{B}} T)$ では粒子が磁場と平行になる確率と反平行になる確率の比はどのようになっていると考えられるか。

問3　1モルの理想気体のエントロピーは，$S_1 = C_V \log T + R \log V +$ (定数) と書くことができる。ここで C_V は定積モル比熱，T は温度，R は気体定数，V は体積を表す。

(1) 気体の圧力を p とする。内部エネルギー U が体積 V に依存しないことを，熱力学の第1法則 $\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V$ と状態方程式 $pV = RT$ を用いて示せ。

(2) 断熱過程（エントロピー一定）では，pV^{γ} が一定となることを示せ。ただし $\gamma = \dfrac{C_V + R}{C_V}$ である。

(3) 取り払うことができる壁で仕切られた隣り合う体積 V_0 の箱に2種類の理想気体各々1モル（温度 T）を閉じ込めた。仕切りを取り払うと2種類の気体が混ざる。このとき二つの気体のエントロピーの和はどれだけ増加するか。



(4) 1モルの理想気体のエントロピーは（定数を除き）$S_1 = C_V \log T + R \log V$ であるが，n モルの場合にエントロピーを

$$S_{誤} = n\left(C_V \log T + R \log V\right)$$

とすると，矛盾を生じることが知られている。「同種の理想気体1モル（温度 T）を前問と同じ体積 V_0 の箱二つに閉じ込めてから仕切りを取り払った場合」について前後の $S_{誤}$ を計算し，どのようにおかしな結果になるのかを説明せよ。

(5) 上の (4) で考えたような矛盾が生じない，正しい n モルの理想気体のエントロピー $S_{正}$ は（定数を除き），

$$S_{正} = N\left(\frac{C_V}{N_{\mathrm{A}}} \log T + k_{\mathrm{B}} \log\left(\frac{V}{N}\right)\right)$$

である。ただし，N_{A} はアボガドロ数であり，粒子数 N とモル数 n の関係は $N = nN_{\mathrm{A}}$ である。また，k_{B} はボルツマン定数であり $k_{\mathrm{B}} = \dfrac{R}{N_{\mathrm{A}}}$ となる。
$S_{正}$ と $S_{誤}$ の差を計算し，その物理的意味を述べよ。
（ヒント：スターリングの公式 $\log N! \simeq N \log N$ を用いてよい）

2015 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2014 年 8 月 26 日(火)

注意事項

1. 全ての解答用紙（B４用紙）の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I 次の英文を読んで，各問に答えよ。 (40 点)

To see how some of these ideas work, let us consider our experience with a rather common material – water. Although A) the water molecule is not the physicist's ideal (argon would probably be closer to ideal because of its filled atomic shell, spherically symmetric shape, and isotropic interparticle interactions), our experience with the phase transitions and different states of water is more extensive. At high temperature, water is steam or water vapor. Its kinetic energy dominates over its potential energy, and, as a result, it exists in a state that is isotropic and homogeneous and that fills any volume allowed it. This gaseous or fluid phase has complete translational and rotational symmetry. There is equal probability of finding a molecule anywhere in the containing volume. The density is uniform. There are very few correlations between the positions of the molecules. If the gas were ideal, then the pointlike particles would completely ignore the presence of each other.

If we look at this gas, the water vapor in the atmosphere, B) we do not see it. In order for something that has no direct absorptions at the optical frequency to be seen, it must scatter light. That means there must be a mismatch in the refractive index over some distance. In most cases, the refractive index is directly proportional to the density. Since the density of the gas is uniform, there are no index variations, and there is no scattering. Of course, there will always be fluctuations in the density, but, to be seen, they must have a length scale comparable to the wavelength of light.

Now let us lower the temperature, i.e., the average kinetic energy. As the potential energy becomes more important, specific intermolecular interactions come into play. For neutral water molecules, the dominant interaction is the dipole-dipole interaction, which for particular configurations is attractive. At short distances, comparable to the charge separation in the dipoles, the individual charges attract each other more strongly than the dipole approximation would predict. This stronger, more orientationally-dependent interaction, is call C) hydrogen bonding. Attraction tends to enhance density fluctuations: each molecule would prefer to spend most of its time in a region where there are other molecules rather than in one where there are none. This clustering leads not only to a lower energy but also to a lower entropy. D) As temperature is lowered, density fluctuations brought about by clustering grow in amplitude and persist for longer times. The larger fluctuations take longer to develop and longer to decay. Increased size dictates a slower dynamics. Density is still uniform but only when averaged over large regions of space or over long intervals of time. The end result of these attractive interactions is the formation of another fluid phase, a liquid phase (water) whose density is greater than that of the gas phase. The principal physical quantity distinguishing the liquid and gas phases is their E) [ ].

(“Principles of condensed matter physics” P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, Cambridge University Press より抜粋)

Hints: **interparticle** 粒子間，**phase transition** 相転移，**pointlike** 点状の，
refractive index 屈折率，**fluctuation** 揺らぎ，**intermolecular** 分子間，
dipole 双極子，**orientationally-dependent** 方向依存のある，
clustering クラスター化

問 1 下線部 A) の理由を本文ではどのように示唆しているか答えよ。

問 2 下線部 B) の理由を本文ではどのように説明しているか答えよ。

問 3 下線部 C) の相互作用が働くのはどんな場合と本文では説明しているか答えよ。

問 4 下線部 D) を和訳せよ。

問 5 空白 E) には本文中のどの単語が入ることが最も適当か答えよ。

Ⅱ 次の英文を読んで，各問に答えよ。 (40 点)

The word *dimension* has a special meaning in physics. It usually denotes the physical nature of a quantity. Whether a distance is measured in units of feet or meters or furlongs, it is a distance. We say its dimension is *length*.

A)The symbols we use in this book to specify length, mass, and time are L, M, and T, respectively. We shall often use brackets [ ] to denote the dimensions of a physical quantity. For example, the symbol we use for speed in this book is v, and in our notation the dimensions of speed are written $[v] = \mathrm{L/T}$. As another example, the dimensions of area, A, are $[A] = \mathrm{L}^2$. The dimensions of area, volume, speed, and acceleration are listed in Table 1.6, along with their units in the three common systems. The dimensions of other quantities, such as force and energy, will be described as they are introduced in the text.

In many situations, you may have to derive or check a specific formula. Although you may have forgotten the details of the derivation, there is a useful and powerful procedure called *dimensional analysis* that can be used to assist in the derivation or to check your final expression. This procedure should always be used and should help minimize the rote memorization of equations. Dimensional analysis makes use of the fact that *dimensions can be treated as algebraic quantities.* That is, quantities can be added or subtracted only if they have the same dimensions. Furthermore, the terms on both sides of an equation must have the same dimensions. By following these simple rules, you can use dimensional analysis to help determine whether or not an expression has the correct form because the relationship can be correct only if the dimensions on each side of the equation are the same.

To illustrate this procedure, suppose you wish to derive a formula for the distance x traveled by a car in a time t if the car starts from rest and moves with constant acceleration a. In Chapter 2, we shall find that the correct expression is $x = \frac{1}{2}at^2$. Let us use dimensional analysis to check the validity of this expression.

The quantity x on the left side has the dimension of length. B)In order for the equation to be dimensionally correct, the quantity on the right side must also have the dimension of length. We can perform a dimensional check by substituting the dimensions for acceleration, $\mathrm{L/T^2}$, and time, T, into the equation. That is, the dimensional form of the equation $x = \frac{1}{2}at^2$ is

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{L}}{\cancel{\mathrm{T}^2}} \cdot \cancel{\mathrm{T}^2} = \mathrm{L}$$

The units of time cancel as shown, leaving the unit of length.

TABLE 1.6 **Dimensions of Area, Volume, Speed, and Acceleration**

System	Area (L^2)	Volume (L^3)	Speed (L/T)	Acceleration ($\mathrm{L/T^2}$)
SI	m^2	m^3	m/s	$\mathrm{m/s^2}$
cgs	cm^2	cm^3	cm/s	$\mathrm{cm/s^2}$
British engineering	ft^2	ft^3	ft/s	$\mathrm{ft/s^2}$

(“Physics for Scientists and Engineers” R. A. Serway, Saunders College Publishing より抜粋)

Hints: **British engineering system** 英国工学単位系，**rote memorization** 丸暗記，**algebraic quantity** 代数量

問 1 下線部 A) を和訳せよ。

問 2 dimensional analysis の利点を本文ではどのように説明しているか答えよ。

問 3 dimensional analysis は二つのルールがあるために利用されている。どのようなルールか答えよ。

問 4 下線部 B) を和訳せよ。

問 5 単振り子の周期 T_{sp} は振り子の長さ ℓ と重力加速度 g で以下のように書ける。

$$T_{\mathrm{sp}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

これについて本文で説明されている dimensional analysis を実行せよ。

$\boxed{\text{III}}$ 次の文章 (1)〜(5) を英訳せよ。 (20 点)

(1) 円の面積は $\pi\times$ 半径の二乗に等しい。（$\times$ も英語で表すこと）

(2) 円周率 π はすべての円において同じであるが，分数でも小数でも正確に表すことはできない。

(3) その取扱いは必ずしも正確ではない。

(4) この解析で，それらが全く異なっていることが明らかになった。

(5) この誤差の大きさがサンプル数の半分を超えることはありえない。