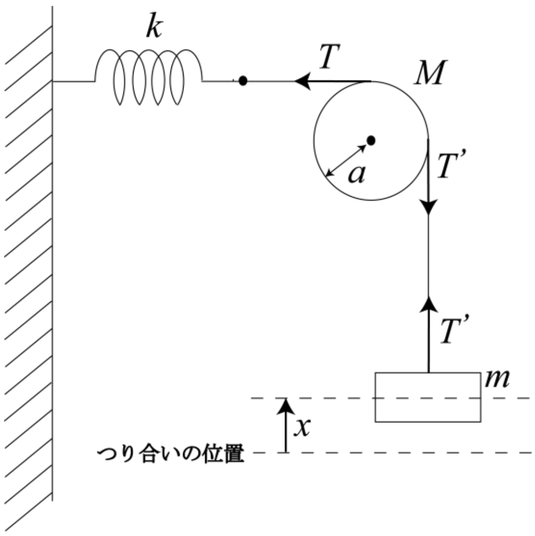
I　図のように, バネ定数kのバネの一端が壁に固定されており, バネのもう一端に結ばれた糸が, 円板状の滑車を介して, 質量mのおもりをつり下げている。滑車の半径と質量はそれぞれaとMで, 密度は一様である。滑車は固定された中心軸のまわりでなめらかに回転し, おもりは鉛直方向に振動している。滑車と糸の間はすべらないものとし, つり合いの位置からのおもりの変位をx, 滑車の回転角をθとする。このとき, xとθはそれぞれ鉛直方向上向きと反時計回りを正にとる。糸は伸び縮みせず, 糸とバネの質量および空気の抵抗は無視できる。重力加速度をgとし, xの時間に関する1階微分を$\dot{x}$, 2階微分を$\ddot{x}$と表す。以下の各問に答えよ。問7は問3の結果から解答しても良い。 (100点)



問1　滑車の回転軸のまわりの慣性モーメントが

$$I = \frac{1}{2}Ma^2$$

と表されることを示せ。

この系の運動方程式をラグランジュの方法を使わずに導出することを考える。

問2　おもりの変位がxのとき, 図に示したバネ側の糸の張力Tを求めよ。また, xとθの関係式を書け。

問3　図に示したおもり側の糸の張力T'を用いて, おもりと滑車に関する運動方程式をそれぞれ書け。また, 導出した2つの運動方程式からT'を消去し, 得られた運動方程式を$m, M, k, x, \ddot{x}$を使って書け。

次に, xを一般化座標として, ラグランジュの方法を使って運動方程式を導出することを考える。

問4　この系の運動エネルギーKを書け。

問5　この系のポテンシャルエネルギーUを書け。

問6　ラグランジュの方法により, 運動方程式を$m, M, k, x, \ddot{x}$を使って書け。

最後に, おもりの振動について考える。

問7　問3または問6で導出した運動方程式の一般解(任意定数を2つ含む解)を書け。

II　以下の各問に答えよ。（100 点）

問1　真空中で, 電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ がつくる電場 $\boldsymbol{E}$ について考える。ただし，真空の誘電率を ε_0 とする。

(1) 点電荷 q，$-q$ が，直交座標で各々 $(0, 0, d)$，$(0, 0, -d)$ に在るとすると，$\boldsymbol{p}$ の大きさは，$p = 2dq$ で与えられる。観測点までの距離が d に比べて十分に大きいとすると，$\boldsymbol{p}$ のつくる電位 $V(x,y,z)$ は，次式で与えられることを示せ。

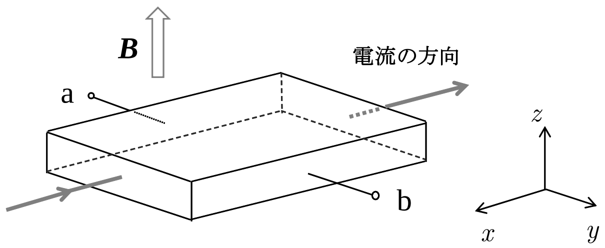
$$V(x,y,z) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(2) $\boldsymbol{p}$ がつくる電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ。

問2　図のように，導体板を xy 平面上に置いて，電流を x 軸の方向に流す。

(1) 導体内の電子が，速さ v で x 軸の正の方向に運動している場合を考える。導体板の y 軸方向の長さを d とする。磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を z 軸方向にかけると，図の端子 ab 間に発生する電位差を求めよ。電位差が生じる理由についても説明せよ。

(2) 電子が導体内を運動しているのではなく，正に帯電した粒子が x 軸の負の方向に運動している場合はどうなるか，説明せよ。



問3　電荷，電流がないとき，真空中の電場 $\boldsymbol{E}$，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対するマックスウェルの方程式は，以下の 4 式にまとめられる。ただし，真空の誘電率を ε_0，真空の透磁率を μ_0 とする。

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0\,,\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0\,,\quad \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}\,,\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}\,.$$

(1) マックスウェルの方程式から，$\boldsymbol{E}$ に対する波動方程式，および $\boldsymbol{B}$ に対する波動方程式を各々導け。

　次の数学公式を利用しても良い。　$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}$

(2) z 軸の正の方向に光速度 c で進行する平面波は，k を波数，$\omega t - kz$ を位相として，次式で与えられる。

$$E_x(z,t) = E_0\sin(\omega t - kz)\,,\quad B_y(z,t) = B_0\sin(\omega t - kz)$$

　これら以外の $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ の成分はゼロである。この平面波は，(1)で求めた波動方程式の解となることを示せ。ただし，$\omega = ck$，$c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ である。

$\boxed{\text{III}}$　以下の各問に答えよ。 (100 点)

質量 m_1，m_2 の２つの原子１，２からなる分子（２原子分子）のハミルトニアンは，一方の原子１の座標を $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$，他方の原子２の座標を $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$，原子間ポテンシャルを $V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$ として

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 + V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) \tag{1}$$

で与えられる。ここで，∇_i は原子 $i\ (=1,2)$ のナブラ演算子，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。原子間ポテンシャル $V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$ は $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| \longrightarrow \infty$ で 0 になるものとする。

全質量を $M = m_1 + m_2$ とし，重心座標 $\boldsymbol{R} = (m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2)/M$ と相対座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ を用いれば，ハミルトニアンは

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_{\boldsymbol{R}}^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r) \tag{2}$$

のように並進運動と相対運動の２つの部分に分離できる。ここに，$\nabla_{\boldsymbol{R}}$（∇）は重心座標 $\boldsymbol{R}$ (相対座標 $\boldsymbol{r}$) に関するナブラ演算子を表し，μ は $\mu = (m_1^{-1} + m_2^{-1})^{-1}$ で定められる換算質量である。

問１　ハミルトニアン (2) のエネルギー固有関数 $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ を，並進運動の波動関数 $\chi(\boldsymbol{R})$ と相対運動の波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ を用いて $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \chi(\boldsymbol{R})\psi(\boldsymbol{r})$ と表すと，H の固有値方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_{\boldsymbol{R}}^2\chi(\boldsymbol{R}) = E_K\,\chi(\boldsymbol{R}), \tag{3}$$

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)\Big)\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{4}$$

のように分離できることを示せ。このとき全エネルギー E_{tot} は $E_{tot} = E_K + E$ となる。

問２　並進運動の固有値方程式 (3) のエネルギー固有値 E_K と固有関数 $\chi(\boldsymbol{R})$ を求めよ。

相対運動のエネルギー固有値方程式 (4) は，恒等式

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big) - \frac{\boldsymbol{l}^2}{\hbar^2 r^2} \tag{5}$$

を用いると

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big) + V(r) + \frac{\boldsymbol{l}^2}{2\mu r^2}\Big]\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{6}$$

のように表される。ここに，r は相対座標 $\boldsymbol{r}$ の大きさ，$\boldsymbol{l}$ は相対運動の角運動量演算子 $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times (-i\hbar\nabla)$ を表している。

問３　相対運動の波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ が r だけの関数であるとする：$\psi(\boldsymbol{r})=\psi(r)$。

（１）このとき，$\psi(r)$ は角運動量の大きさ 0 の固有状態となることを示せ。

前問（１）の結果によれば，相対運動の波動関数が r のみの関数 $\psi(r)$ であるとき，固有値方程式（6）は

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big)+V(r)\Big]\psi(r)=E\psi(r) \tag{7}$$

となる。

（２）$\psi(r)=u(r)/r$ とおいて（7）を波動関数 $u(r)$ の方程式へ変換すると

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+V(r)\Big]u(r)=Eu(r) \tag{8}$$

となることを示せ。

原子間ポテンシャル $V(r)$ を平衡点 r_0 のまわりで展開すると固有値方程式（8）は調和振動子の方程式となる。このとき，エネルギー固有値は n を 0 または正の整数として

$$E_n=V(r_0)+\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\hbar\omega \tag{9}$$

と与えられる。固有値 E_n の固有関数を $u_n(r)$ とする。

（３）動径方向の振動の角振動数 ω を求めよ。

（４）$V(r_0)$ の物理的意味を言え。

（５）振動の最低エネルギー $\dfrac{1}{2}\hbar\omega$ はなぜ生じるか，その物理的理由を述べよ。

問４　次に，相対運動の波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ が動径方向だけでなく天頂角 θ と方位角 ϕ にも依存する場合を考える。この場合の固有値方程式は（6）である。

（１）ラプラス方程式

$$\nabla^2\varphi_l(x,y,z)=0 \tag{10}$$

を満たす l 次の同次方程式 $\varphi_l(x,y,z)$ は

$$\varphi_l(x,y,z)=r^l\,Y_l(\theta,\phi) \tag{11}$$

のように表される。ここに，$Y_l(\theta,\phi)$ は調和関数と呼ばれる角度 θ，ϕ のみの関数である。このとき，$\varphi_l(x,y,z)$ の動径部分 r^l について

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big[\Big(r^2\frac{d}{dr}\Big)r^l\Big]=\frac{l(l+1)}{r^2}r^l \tag{12}$$

が成立することを示せ。

（２）演算子の恒等式（5）を $\varphi_l(x,y,z)$ へ作用させ，ラプラス方程式（10）と前問（１）の結果（12）式を用いる事によって

$$\boldsymbol{l}^2\varphi_l(x,y,z) = l(l+1)\hbar^2\varphi_l(x,y,z) \tag{13}$$

を導け。

つまり，角運動量の大きさ $\boldsymbol{l}^2$ の固有値は $l(l+1)\hbar^2$ で与えられる。問３（１）でみたように，$\boldsymbol{l}$ は動径部分には作用しないので，上式は

$$\boldsymbol{l}^2\,Y_l(\theta,\phi) = l(l+1)\hbar^2\,Y_l(\theta,\phi) \tag{14}$$

のようにも表される。

（３）角運動量の交換関係 $[l_x,l_y]=i\hbar l_z$，$[l_y,l_z]=i\hbar l_x$，$[l_z,l_x]=i\hbar l_y$ を用いて，交換関係

$$[\boldsymbol{l}^2, l_z] = 0 \tag{15}$$

を確かめよ。$\boldsymbol{l}^2$ と l_z が可換であるとき，両者の同時固有関数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ が存在する。ここで，m は l_z の量子数を表している。

問５　相対運動の固有値方程式（6）において，原子間の相対距離 r が平衡位置 r_0 の近傍にあるとして，遠心力項を $\boldsymbol{l}^2/(2\mu r_0^2)$ と近似すると，固有値方程式

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big)+V(r)+\frac{\boldsymbol{l}^2}{2\mu r_0^2}\Big]\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{16}$$

が得られる。

（１）ポテンシャル $V(r)$ を調和振動近似したとき，エネルギー固有値（9）式の固有関数 $u_n(r)$（問３参照）と問４（３）の角運動量固有関数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ を用いて，相対運動の固有値方程式（16）の固有値 E_{nl} と固有関数 $\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

ヒント： 式（8），(9)，(14）を使う。

（２）量子数 l に関するエネルギーは２原子分子のどのような運動状態に対応するか，その物理的内容を説明せよ。

（３）問５（１）で求めた２原子分子のエネルギー固有値を測定するにはどうすれば良いか，その原理について簡単に述べよ。

Ⅳ　次の文章を読んで，各問に答えよ。問３，問５－９では，導出過程を明確に示すこと。　（100 点）

まず，一辺 L の立方体容器（体積 $V=L^3$）に閉じ込められたある１つの自由粒子が，絶対温度 T の容器と熱平衡にある場合を考える。容器は十分に大きく，熱浴（熱だめ）とみなせる。この粒子の内部自由度は考えないことにすると，この粒子の各量子状態は１組の正の整数 n_x，n_y，n_z により完全に指定され，そのエネルギー固有値 $E(n_x, n_y, n_z)$ は次のように表される。

$$E(n_x, n_y, n_z) = A\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)$$

ここで A は，粒子の質量 m，プランク定数を 2π で割った定数 $\hbar$，および L を用いて $A = \dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{\pi}{L}\right)^2$ と表される。T とボルツマン定数 k_{B} を用いて，τ と β をそれぞれ，$\tau = k_{\mathrm{B}}T$ と $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ により定義する。粒子のすべての状態についてボルツマン因子 $\exp[-\beta E(n_x, n_y, n_z)]$ の和をとると，１粒子の分配関数 Z_1 が得られる。ここで，exp は指数関数を表す。

問１　粒子が，ある１組の正の整数 n_x, n_y, n_z により指定される状態に見出される確率 $P(n_x, n_y, n_z)$ を，$\beta, E(n_x, n_y, n_z)$，および Z_1 を用いて表せ。

問２　粒子が基底状態（一番エネルギーの低い状態）に見出される確率を P_0，第一励起状態（二番目にエネルギーの低い状態）に見出される確率を P_1 とする。P_1/P_0 を A と β を用いて表せ。複数ある第一励起状態をすべて考慮すること。

粒子の隣り合うエネルギー準位の間隔が τ に比べて十分小さいとき，すなわち βA が１に比べて十分小さいとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta A n^2) = \int_0^{\infty} \exp(-\beta A x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta A}}$$

のように，無限級数を積分で置き換えてもよい。このようにすると，$Z_1 = n_{\mathrm{Q}} V$ が得られる。ここで，$n_{\mathrm{Q}} = \left(\dfrac{m\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ である。

問３　$Z_1 = n_{\mathrm{Q}} V$ が得られることを示せ。

次に，上記の粒子と同種の N 個の自由粒子が上記の容器に閉じ込められ，温度 T

で熱平衡にある場合を考える。粒子数密度が n_{Q} と比べて十分小さければ，この N 粒子系の分配関数 Z_N は次のように表される。

$$Z_N = \frac{(Z_1)^N}{N!} \tag{1}$$

問４ 式(1)の中の $N!$ は何のための因子かを簡潔に述べよ。

問５ 式(1)と $Z_1 = n_{\mathrm{Q}} V$ を用いて, N 粒子系の平均エネルギー U と定積熱容量 C_V を求めよ。U は τ, N を用いて，C_V は k_{B}, N を用いて表せ。

以下では，N が１に比べて十分大きい場合を考える。従って，$\log(N!) = N\log N - N$ としてよい。N 粒子系のヘルムホルツの自由エネルギー F は，$F = -\tau \log Z_N$ により定義される。ここで，log は自然対数を表す。

問６ F を $\tau, n_{\mathrm{Q}}, V, N$ を用いて表す式を求めよ。

N 粒子系のエントロピーを S，圧力を p とすると，F の微小変化 dF は $dF = -S\,dT - p\,dV$ と表される。

問７ 圧力 p を τ, V, N を用いて表す式を求めよ。

問８ エントロピー S を $k_{\mathrm{B}}, n_{\mathrm{Q}}, V, N$ を用いて表す式を求めよ。

問９ 式(1)の中の $N!$ がなかった場合を考え，$Z_N = (Z_1)^N$ とおく。F を $\tau, n_{\mathrm{Q}}, V, N$ を用いて表す式，S を $k_{\mathrm{B}}, n_{\mathrm{Q}}, V, N$ を用いて表す式を求め，どのような不都合が起こるかを述べよ。

I 次の文章を読んで，以下の各問に答えよ。参考のために，文章の後に語句の意味が説明してある。 (30 点)

Ancient philosophers imagined their world as made of earth, water, air, and fire. A fifth element, known as quintessence or ether, was thought to be incorruptible, beyond Earth, and thus included the Moon. That otherworldly vision isn't unique. Ideas and myths of old about the origin of our Moon often involved colorful stories in which the Moon was once on Earth – as the head of a goddess, perhaps – or part of Earth.

Modern stories can be just <u>as striking</u>(1) but are not mere figments of the imagination; they are tested through physics and chemistry. Many are not (ア) settled – perhaps not (イ) close to being settled – and that's what makes the subject of the Moon's origin so interesting. It is a long-standing puzzle that seems to become more difficult (ウ) new information is learned about the pieces. Like implementing fusion on Earth, an explanation for the origin of the Moon always (エ) to be a decade away. A standard idea – a giant impact on Earth by a body roughly the mass of Mars – is compelling, but getting that story to explain all (オ) we see has proven elusive.

This is forensic science: Planetary scientists at a crime scene – in this case, the aftermath of the Moon's formation – use the clues at hand to try to figure out what happened. Modern detectives often have to rely on DNA evidence to establish who did what, using other evidence, such as blood splatters, footprints, and broken glass, as diagnostics. Scientists are in a similar position on the scene long after the events that took place; they examine chemical clues – especially isotopes, the natural analog of DNA for planets – and use physical reasoning to figure out what happened.

Why should we care? For one thing, the Moon has had profound effects on the history of Earth and quite likely on the evolution of life. And solving how we came to have our Moon may illuminate another question: why Venus has none. More generally, the formation of the Moon is a key piece in the puzzle of how our solar system evolved into the architecture we see. As scientists collect more information about planets around other stars, it will be fascinating to learn the frequency with which they have moons.

(“Making the Moon” by David J. Stevenson より抜粋)

figments of the imagination – 想像の産物,
elusive – difficult to catch
forensic science – 科学捜査

問1 下線部 (1)の後に省略されている語句を書け。

問2 第 2 パラグラフ (ア) ～ (オ) に当てはまる単語を以下の各選択肢から選んで書け。

（ア） going yet often	（イ） less more even

（ウ）	than	on	as

（エ）	seems	progresses	supposed

（オ）	for	at	that

問3　第3パラグラフでは，2種類の職業に就く人々が，各々の興味の対象を調べる方法が似ていることを指摘している。この 2 種類の人々の「職業」，「調べる対象」，「調査に利用する物」を英語の語句で書け。次に，この 2 種類の人々の仕事のどのような点が似ているのか，日本語で説明せよ。

問4　本文中で，小文字で始まる earth と moons の単語が用いられている。それぞれどのような意味で用いられているか説明せよ。

II

次の文章を読んで，以下の各問に答えよ。参考のために，文章の後に語句の意味が説明してある。　(30 点)

Undirected research, for me, is a misnomer. What some call "undirected" is actually research driven by an individual's own excitement, curiosity and unique ideas, and it is not just random tinkering. The research can be basic or applied, within a large program or outside of the mainstream. It is not directed at some preordained final result, but is rather self-directed.

Undirected research carries enormous intellectual interest. We want to understand who we are, what we are made of, what is the universe, what is it made of, and how did it start and evolve? <u>A very eloquent statement was made by Robert Wilson in his testimony to Congress in April 1969 to support the building of Fermilab: "This new knowledge has all to do with honor and country but it has nothing to do directly with defending our country except to help make it worth defending."</u>(1)

At the same time, undirected research has immense practical importance. While research in physics is a good example, the same kind of argument can be made for other sciences. To me it is clear that during the past century, every twenty years or so, something so spectacular is found that it makes major changes to world society as a whole. <u>Often the discovery is not anticipated in advance, even by the experts working in the field. Sometimes it is not appreciated by experts or funders even right after it is discovered. This has profound consequences for the support of undirected research by society and for the importance of diversity of research directions.</u>(2)

Consider an example: <u>the world-wide web.</u>(3) Email and the TCP/IP protocol had been known for some time. Various networks in the United States and abroad made it possible to exchange email world wide. However the development that really sparked the internet was the development of the HTML markup language. In 1989, while working at CERN, Tim Berners-Lee invented a network-based implementation of the hypertext concept. The immediate purpose of his work was to enhance communication between physicists working on experiments at CERN and their colleagues at their home institutions.　This was not a direct result of a particle physics experiment, but was a direct result of the instrumentation for the experiment.　Cutting edge experiments also often generate new cutting edge technology.

As we all know, the internet has made a revolution in the way we communicate with each other.　The physicists who designed LEP had no idea that their work would lead to Facebook, Twitter and Amazon.(4)

(“We Need Undirected Research” by Byron Roe より抜粋)

misnomer – 誤った名称，呼び誤り
Fermilab – フェルミ国立加速器研究所
TCP/IP – インターネットなどで用いられる通信プロトコル
CERN – 欧州原子核研究機構
LEP – CERN に設置されていた加速器，Large Electron–Positron Collider の略

問1　下線部 (1) を和訳せよ。

問2　下線部 (2) を和訳せよ。

問3　下線部 (3) the world-wide web はもともとどのような目的で作られたものか，説明せよ。

問4　下線部 (4) を実現するのに貢献した undirected research を指す語句を本文中より抜き出せ（複数ある）。

III　大学院に進学する理由を，100 語程度の英文で書け。　(20 点)

IV　次の文章を英訳せよ。文章の後に挙げた単語を用いて良い。　(20 点)

１個の電子を，ある半径をもつ電荷の“球殻”だと考えてみよう。この電荷をこの半径に集めて電子を作るには仕事がいるだろう。その電荷を集めてくるための仕事によって積み上げられたエネルギーは，電子の自己エネルギーと一般に呼ばれる。問題なのは，もし我々が電子のサイズを１点に収縮させようとすると，電子に伴う自己エネルギーが無限大になってしまうだろうということである。

球殻 – sphere,　　自己エネルギー – self-energy