

2017 年度  
琉球大学大学院理工学研究科  
博士前期課程  
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題  
専門（物理）

2017 年 2 月 16 日

注意事項

1. すべての解答用紙（B4 白紙）の左上に受験番号を記入すること。
2. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
3. 解答用紙は片面のみ使用し，縦置き横書きで解答すること。
4. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
5. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I

以下の各問に答えよ.

(100 点)

下図のように、同じ弾性定数の弾性ひも 1 と 2 の 1 端を A と B に固定し、他の端に質量  $m$  の質点を取りつけた. 質点が直線 AB 上の点 O にあるとき、それぞれの弾性ひもの長さは  $l$  であり力  $F_0$  で質点を引いているとする. 質点は直線 AB を垂直二等分する直線 PQ 上を微小振動しているとし、重力および弾性ひもの重さは無視する.

問 1 質点が点 O にあるときを弾性ひものポテンシャルエネルギーの原点とする. 弾性ひもの長さが  $l$  から  $l + \Delta l$  になったとき、弾性ひも 1 のポテンシャルエネルギー  $U_1$  が、 $U_1 = F_0 \Delta l$  であることを示せ. (高次の  $\Delta l$  の項は無視する.)

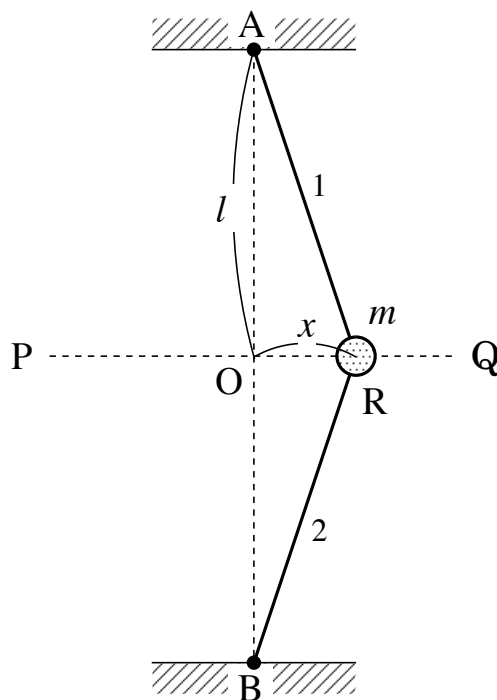
問 2 点 O を原点にとり、点 O から  $x$  の距離の点 R に質点があるとき、弾性ひもの伸び  $\Delta l$  が  $\Delta l \approx \frac{x^2}{2l}$  で与えられることを示せ.

問 3 質点の運動エネルギー  $K$  を求めよ.

問 4 この系の Lagrange 関数  $L$  および Lagrange の運動方程式を求めよ.

問 5 この運動の周期  $T$  を求めよ.

問 6 この運動の振幅が  $X$  であるとき、質点の最大の速さを求めよ.

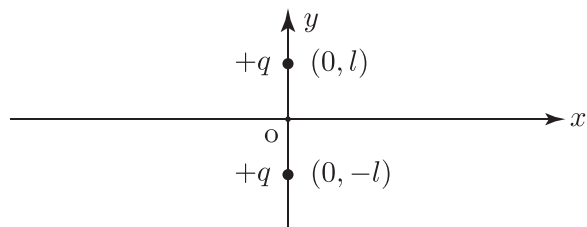


II

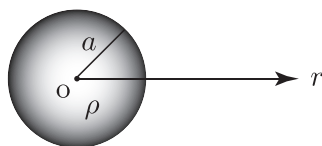
以下の各問に答えよ．

(100 点)

- 問 1 図のように，電気量  $+q$  の 2 個の電荷が  $y$  軸上の  $(0, l)$  と  $(0, -l)$  に置かれている． $x$  軸上で電場が最大となる点  $x_{\max}$  を求めよ．ただし，電荷は真空中に置かれているものとし，真空の誘電率を  $\varepsilon_0$  とする．

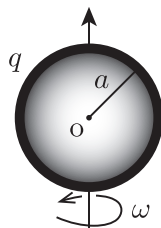


- 問 2 真空中において，負電荷が半径  $a$  の球内に電荷密度  $\rho$  で一様に分布している時，この球内外の電場を，球の中心  $O$  からの距離  $r$  の関数として示せ．ただし，真空の誘電率を  $\varepsilon_0$  とする．



- 問 3 一辺  $l$  の正方形の導線回路に電流  $I$  が流れているとき，中心に生じる磁場  $H$  の強さを求めよ．

- 問 4 半径  $a$  の導体球の表面に電荷  $q$  が一様に帯電している．この球体が，球体の中心  $O$  を通る 1 つの軸の周りに一定の角速度  $\omega$  で回転するとき，球体の磁気モーメントが  $\frac{1}{3}a^2q\omega$  になることを示せ．ただし，半径  $r$  の円形電流  $I$  が作り出す磁気モーメント  $m$  は  $m = I\pi r^2$  である．



(100 点)

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}' \dots\dots (1)$$
$$(\hat{H}_0 + \lambda \hat{H}')(\psi_0 + \lambda \psi_1 + \lambda^2 \psi_2 + \dots) = (W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \dots)(\psi_0 + \lambda \psi_1 + \lambda^2 \psi_2 + \dots) \dots\dots (2)$$
$$\hat{H}_0\psi_1 + \hat{H}'\psi_0 = \boxed{\hspace{10em}} \dots\dots (3)$$

$$\hat{H}_0\psi_2 + \hat{H}'\psi_1 = \boxed{\hspace{10cm}} \dots\dots (4)$$

問2  $\hat{H}_0$  の固有関数を  $\psi_0 = u_n$ ，固有値を  $W_0 = E_n$  とし，固有関数  $\{u_n\}$  が完全系をなすと仮定する．このとき， $\psi_1$  は  $\psi_1 = \sum_m a_m u_m$  と展開でき，式(3)に代入すると，

$$\sum_m a_m E_m u_m + \hat{H}' u_n = E_n \sum_m a_m u_m + W_1 u_n \dots\dots (5)$$

式(5)の両辺の左から、 $\hat{H}_0$ のある固有関数の複素共役  $u_n^*$  をかけ、 $\{u_n\}$  が規格直交系を構成する領域  $\Omega$  内で両辺を積分した結果を示せ. さらに、得られた式において  $k=n$  と置くことで  $W_1 = H'_{nn}$  となること、また、 $k \neq n$  とすることで  $a_k = H'_{kn} / (E_n - E_k)$  とな

ることも示せ. ただし,  $H'_{kn} = \int_{\Omega} u_k^* \hat{H}' u_n dV$  である.

問3 問2と同様に,  $\psi_2$  も  $\psi_2 = \sum_m b_m u_m$  と展開し, 式(4)に代入すると,

$$(E_n - E_k) b_k + W_1 a_k + W_2 \delta_{nk} = \sum_m a_m H'_{km} \dots\dots (6)$$

が得られる.

ここで  $\delta_{nk}$  はクロネッカーのデルタである. 式(6)から, エネルギーの二次の項  $W_2$  が,

$$W_2 = \sum_{m \neq n} \frac{H'_{nm} H'_{mn}}{E_n - E_m} \dots\dots (7)$$

となることを示せ. ここで  $\sum_{m \neq n}$  とは,  $n$  以外の状態  $m$  についての和を表す.

また, 非摂動系の基底状態に対し,  $W_2 \leq 0$  となることを説明せよ.

問4  $x$  軸上で1次元の調和振動(角振動数  $\omega$ ) をする質量  $m$  の粒子のハミルトニアンは,

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \dots\dots (8)$$

と与えられ, エネルギー固有値は,

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \dots\dots (9)$$

であることが知られている. いま, 非摂動系ハミルトニアン  $\hat{H}_0$  として, 1次元調和振動子のハミルトニアン(8)を考える. 式(1)の  $\lambda \hat{H}'$  が  $\lambda x$  ( $\lambda$  は定数で,  $\lambda > 0$ ) であるとして, エネルギーの摂動項を求めてみる.

摂動ハミルトニアン  $\hat{H}' = x$  に対して, 非摂動系の固有状態  $u_n(x)$  のエネルギー  $E_n$  に対する1次, 2次の摂動項が,

$$W_1 = 0,$$

$$W_2 = -\frac{1}{2m\omega^2}$$

となることを示せ. ただし, 1次元調和振動子の規格化された固有関数  $u_n(x)$  の性質

$$xu_n(x) = b \left[ \sqrt{\frac{n}{2}} u_{n-1}(x) + \sqrt{\frac{n+1}{2}} u_{n+1}(x) \right] \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b = \left( \frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2}$$

を利用してよい.

## IV

以下の各問に答えよ。ただし、導出過程を明確に示すこと。

(100 点)

問1 シリンダー内に密閉した  $n$  モルの理想気体に対して、準静的に変化して元の状態に戻る、以下のような四つの過程を経由したサイクルを考える。(下図参照) 必要なら、気体定数  $R$ 、定圧モル比熱  $C_p$ 、定積モル比熱  $C_V$ 、比熱比  $\gamma = C_p/C_V$  を使って答えなさい。

過程 (I)：状態 A から状態 B

最初、理想気体は体積  $V_A$  であったとする。温度  $T_H$  の高温熱源に接触させて準静的に等温膨張させ、体積を  $V_A$  から  $V_B$  まで増加させる。

過程 (II)：状態 B から状態 C

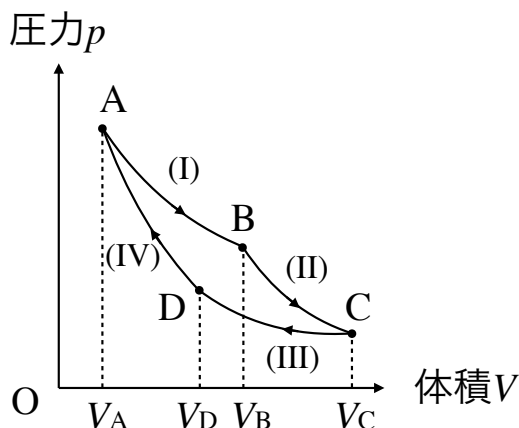
シリンダーを高温熱源から離し、理想気体の温度が低温熱源の温度  $T_L$  と等しくなるまで準静的に断熱膨張させる。

過程 (III)：状態 C から状態 D

シリンダーを低温熱源に接触させて準静的に等温圧縮させ、体積を  $V_C$  から  $V_D$  まで減少させる。

過程 (IV)：状態 D から状態 A

シリンダーを低温熱源から離し、理想気体の温度が  $T_H$  と等しくなるまで準静的に断熱圧縮させる。



- (1) 過程 (I) で理想気体が外に対してする仕事  $W_{AB}$  を求めよ。
- (2) 理想気体の内部エネルギーは温度のみの関数である。過程 (II) の内部エネルギーの変化量  $\Delta U_{BC}$  を求めよ。
- (3) 過程 (III) で理想気体が外からされる仕事  $W_{CD}$  を求めよ。
- (4) 過程 (IV) の内部エネルギーの変化量  $\Delta U_{DA}$  を求めよ。
- (5) 過程 (I) から (IV) までの1サイクルで気体が外へした仕事を、 $n$ 、 $R$ 、 $T_H$ 、 $T_L$ 、 $V_A$ 、 $V_B$  を用いて表せ。

問2  $N$  個の粒子のうち、座標成分が  $(x, y, z)$  から  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  の間にあり、速度成分が  $(v_x, v_y, v_z)$  から  $(v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z)$  の間の値をとる粒子数は

$$f(v_x, v_y, v_z) dx dy dz dv_x dv_y dv_z$$

で与えられる。ここで、

$$f(v_x, v_y, v_z) = A \exp \left[ -\frac{m}{2k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right]$$

であり、 $A$  は定数、 $m$  は1粒子の質量、 $k_B$  はボルツマン定数、 $T$  は温度である。

(1) 体積を  $V$  としたとき、全粒子数  $N$  が

$$N = V \iiint_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

で与えられることを用いて、定数  $A$  が

$$A = \frac{N}{V} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}$$

となることを示せ。必要なら、ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \left( \frac{\pi}{a} \right)^{1/2}$$

を用いてもよい。ただし、この公式では  $a > 0$  とする。

(2)  $v_x, v_y, v_z$  に依存するある関数  $g$  の平均値は、

$$\langle g \rangle = \frac{\iiint g(v_x, v_y, v_z) f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z}{\iiint f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z}$$

で与えられる。3次元運動する単原子分子理想気体1粒子の運動エネルギーの平均値を求めよ。

(3) (2) の結果を使って、単原子分子理想気体の定積モル比熱を求めよ。

(4) 速度の大きさ  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$  の平均値  $\langle v \rangle$  を計算し、速度の標準偏差  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$  と大きさを比較せよ。

2017 年度  
琉球大学大学院理工学研究科  
博士前期課程  
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題  
英語

2017 年 2 月 16 日

注意事項

1. すべての解答用紙（B4 白紙）の左上に受験番号を記入すること。
2. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
3. 解答用紙は片面のみ使用し，縦置き横書きで解答すること。
4. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
5. 問題冊子は，各自持ち帰ること。



**I** 以下の各問に答えよ.

(100 点)

[1] 次の英文を読んで、各問に答えよ。なお、参考のために、左肩番号を付した単語の意味が文章の最後に説明してある。

“<sup>1)</sup> *Metamorphosis in the particle world*”

The Nobel Prize in Physics 2015 recognises Takaaki Kajita in Japan and Arthur B. McDonald in Canada, for their key contributions to the experiments which demonstrated that neutrinos change <sup>2)</sup> identities. This metamorphosis requires that neutrinos have mass. The discovery has changed our understanding of the <sup>3)</sup> innermost workings of matter and can prove crucial to our view of the universe.

**A)** Around the turn of the millennium, Takaaki Kajita presented the discovery that neutrinos from the atmosphere switch between two identities on their way to the <sup>4)</sup> Super-Kamiokande detector in Japan.

Meanwhile, the research group in Canada led by Arthur B. McDonald could demonstrate that the neutrinos from the Sun were not disappearing on their way to Earth. Instead they were captured with a different identity when arriving to the <sup>5)</sup> Sudbury Neutrino Observatory.

**B)** A neutrino puzzle that physicists had wrestled with for decades had been resolved. Compared to theoretical calculations of the number of neutrinos, up to two thirds of the neutrinos were missing in measurements performed on Earth. Now, the two experiments discovered that the neutrinos had changed identities.

The discovery led to the far-reaching conclusion that neutrinos, which for a long time were considered massless, must have some mass, however small.

For particle physics this was a historic discovery. Its <sup>6)</sup> Standard Model of the innermost workings of matter had been incredibly successful, having resisted all experimental challenges for more than twenty years. However, as it requires neutrinos to be massless, the new observations had clearly showed that the Standard Model cannot be the complete theory of the fundamental constituents of the universe.

**C)** The discovery rewarded with this year's Nobel Prize in Physics have yielded crucial insights into the all but hidden world of neutrinos. After photons, the particles of light, neutrinos are the most numerous in the entire cosmos. The Earth is constantly bombarded by them.

Many neutrinos are created in reactions between cosmic radiation and the Earth's atmosphere. Others are produced in nuclear reactions inside the Sun. Thousands of billions of neutrinos are streaming through our bodies each second. Hardly anything can stop them passing; neutrinos are nature's most elusive elementary particles.

Now the experiments continue and intense activity is underway worldwide in order to capture neutrinos and examine their properties. New discoveries about their deepest secrets are expected to change our current understanding of the history, structure and future fate of the universe.

( “*The 2015 Nobel Prize in Physics - Press Release*”, The Royal Swedish Academy of Sciences より抜粋. )

Hints: <sup>1)</sup> metamorphosis 変質, 変態, <sup>2)</sup> identities 正体, 身元, <sup>3)</sup> innermost 最も深い, <sup>4)</sup> Super-Kamiokande スーパーカミオカンデ施設, <sup>5)</sup> Sudbury Neutrino Observatory カナダ・サドバリー市のニュートリノ観測施設, <sup>6)</sup> Standard Model 標準模型, <sup>7)</sup> bombard 〈原子などに〉粒子を当てる

問 1 下線部 A) を和訳せよ.

問 2 下線部 B) を和訳せよ.

問 3 下線部 C) を和訳せよ.

問4 本文ではニュートリノが生成される方法・場所について複数述べられている。それらを全て述べよ。

問5 2015年のノーベル物理学賞の受賞理由について、端的に述べよ。

[2] 次の英文を読んで、各問に答えよ。なお、参考のために、左肩番号を付した単語の意味が文章の最後に説明してある。

### Standard Units and <sup>1)</sup>Systems of Units

A) To describe nature, we make measurements and express these measurements in terms of the magnitudes of units. Units enable us to describe things in a concrete way, that is, numerically. Suppose that you are given the following directions to find the way to campus when you first arrive in town: “Keep going on this street for a few blocks, turn left at a traffic light, go a little ways, and you’re there.” Certainly some units or numbers would be helpful.

Many objects and phenomena can be described in terms of the *fundamental* physical quantities of length, mass, and time (*fundamental* because they are the most basic quantities or properties we can imagine). In fact, the topics of *mechanics*—the study of motion and force— require *only* these physical quantities. Another fundamental quantity, electric charge, will be discussed later. For now, let’s focus on the units of length, mass, and time.

To measure B) these fundamental quantities, we compare them with a reference, or standard, that is taken to be a standard unit. That is, a standard unit is a fixed and reproducible value for the purpose of taking accurate measurements. Traditionally, a government or international body establishes a standard unit.

A group of standard units and their combinations is called a system of units. Two major systems of units in use today are the metric system and the <sup>2)</sup>British system. The latter is used primarily in the United States but is gradually being replaced in favor of the metric system, which is used throughout most of the world. The United States is the only major country that has not gone completely metric.

### Length

The description of space might refer to a location or to the size of an object (amount of space occupied). To measure these properties, we use the fundamental quantity of length, the measurement of space in any direction.

Space has three dimensions, each of which can be measured in terms of length. The three dimensions are easily seen by considering a rectangular object such as a bathtub. It has length, width, and height, but each dimension is actually a length. The dimensions of space are commonly represented by a three-dimensional Cartesian coordinate system (named in honor of French mathematician René Descartes, 1596–1650, who developed the system).

C) The standard unit of length in the metric system is the meter (m), from the Greek *metron*, “to measure.” It was defined originally as one ten-millionth of the distance from the Earth’s equator to the geographic North Pole. A portion of the <sup>3)</sup>meridian between <sup>4)</sup>Dunkirk, France, and <sup>4)</sup>Barcelona, Spain, was measured to determine the meter length, and that unit was first adopted in France in the 1790s. One meter is slightly longer than 1 yard.

D) From 1889 to 1960, the standard meter was defined as the length of a platinum–iridium bar kept at the International Bureau of Weights and Measures in Paris, France. However, the stability of the bar was questioned

(for example, length variations occur with temperature changes), so new standards were adopted in 1960 and again in 1983. The current definition links the meter to the speed of light in a vacuum. Light travels at a speed of 299,792,458 meters/second (usually listed as  $3.00 \times 10^8$  m/s). So, by definition, 1 meter is the distance light travels in 1/299,792,458 of a second.

(“*An Introduction to Physical Science, 13<sup>th</sup> Edition*”, By J. T. Shipman, J. D. Wilson, and C. A. Higgins, Jr., Brooks Cole 2012 より抜粋 (一部改変). )

Hints: <sup>1)</sup> system of units 単位系, <sup>2)</sup> British system 英国式単位系, <sup>3)</sup> meridian 子午線, 経線, <sup>4)</sup> Dunkirk 及び Barcelona, ヨーロッパの都市名

問 1 下線部 A) を和訳せよ.

問 2 下線部 B) に関して, 本文中で述べられている fundamental quantities を全て列挙せよ.

問 3 下線部 C) を和訳せよ.

問 4 下線部 D) に関して, platinum-iridium bar が現在 standard meter として用いられていない理由について述べよ.

問 5 現在の standard meter の定義について述べよ.

[3] 大学院に進学する理由を, 100 語程度の英文で表現せよ.

[4] つぎの文章を英訳せよ.

- (1) 紫外線は波長が 10-400 nm, 即ち可視光線より短く X 線より長い電磁波である. 可視光の最も高い周波数となる色は紫であり, 英語の ultraviolet は「紫を超えた」という意味である.
- (2) ニュートンは 1642 年にイギリスで生まれた物理学者であり数学者でもある. 1687 年に出版されたプリンキピアでは, 運動や万有引力の法則などを定式化し, その後 3 世紀にわたって, 科学者の物理的宇宙の考え方として支配的なものとなった.

Hints: 紫外線 ultraviolet, 可視光線 visible light, 電磁波 electromagnetic radiation, ニュートン Newton, プリンキピア Principia, 万有引力の法則 law of universal gravitation