

2018 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

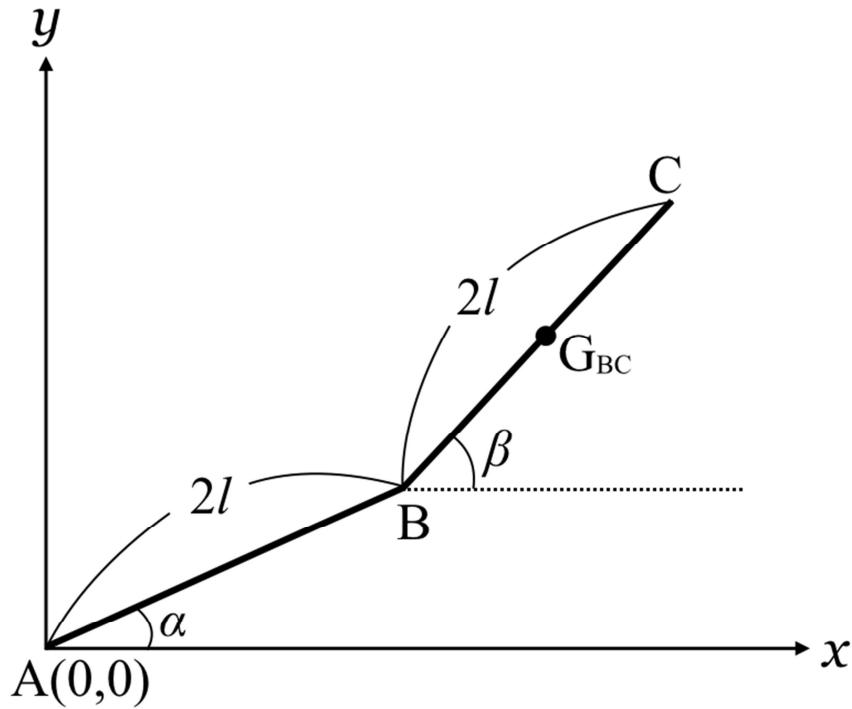
入学試験問題
専門（物理）

2017 年 8 月 30 日(水)

注意事項

1. 全ての解答用紙（B4用紙）の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 全ての解答用紙の□（左上）に大問番号（Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ）を記入すること。
3. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
5. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
6. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

Ⅰ 図のように、長さや質量が等しい2本の一様な棒AB, BCが点Bでなめらかなちょうつがいを使って連結されており、水平でなめらかな机の上で、点A(0,0)を固定点として xy 面内で回転している。1本の棒の長さや質量をそれぞれ $2l, M$ とし、 x 軸の正の方向と棒AB, BCのなす角をそれぞれ α, β とする。以下の各問に答えよ。(100点)



問1 棒BCの重心座標と重心速度の x, y 成分をそれぞれ求めよ。

問2 棒ABについて、点Aのまわりの慣性モーメント I_{AB} を求めよ。

問3 棒ABの運動エネルギー T_{AB} を求めよ。

問4 棒BCについて、重心 G_{BC} のまわりの慣性モーメント I_{BC} を求めよ。

問5 この系のラグランジアン L が

$$L = Ml^2 \left\{ \frac{8}{3} \dot{\alpha}^2 + \frac{2}{3} \dot{\beta}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) \right\}$$

となることを示せ。計算の過程で $\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi$ を用いて良い。

問6 ラグランジュの方法により α と β を一般化座標とする運動方程式をそれぞれ導け。

問7 $\beta - \alpha$ と $\dot{\alpha}$ が時間に依存しない定数となるとき、2つの棒はどのような位置関係で運動しているか、運動方程式を示して説明せよ。

Ⅱ 以下の各問に答えよ。

(100 点)

問1 図1のように、内半径 a 、外半径 b の同心導体球殻からなるコンデンサーが真空中に置かれている。このコンデンサーの外殻に正電荷 $+Q$ を与え、内殻を接地した。ただし、真空中の誘電率を ϵ_0 、電位の基準を無限遠方とし、球殻の厚さは無視できるものとする。

- (1) このコンデンサーの球殻内外の電場を図示せよ。
- (2) 内殻（半径 a の球殻）に生じる電荷を Q_a とおき、 $r < a$ 、 $a < r < b$ 、 $b < r$ の各領域の電場の大きさ $E(r)$ をガウスの法則を使ってそれぞれ求めよ。ただし、 r は球殻の中心 O からの距離である。
- (3) 内殻の電位 V_a を a 、 b 、 Q_a 、 Q を用いて表せ。
- (4) 内殻が接地されていることを使って、 Q_a を a 、 b 、 Q で表せ。
- (5) このコンデンサーの電気容量 C を求めよ。

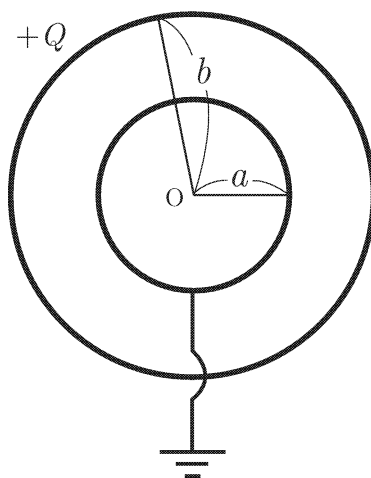


図 1

問2 図2のように、 y 軸上の点 $A(0, d, 0)$ と点 $B(0, -d, 0)$ を通り x 軸と平行に2本（間隔 $2d$ ）の無限に長い導線を真空中に配置した。点 A を通る導線1に x 軸の正の向きに定常電流 I を流し、点 B を通る導線2には常に導線1と逆向きに同じ大きさの電流を流す。ただし、真空中の透磁率を μ_0 とし、電流の大きさは変えることができる。

- (1) 導線1を流れる電流 I が $2d$ 離れた導線2の位置に作る磁場の大きさ H_1 をアンペールの法則を使って求めよ。また、導線2の単位長さがその磁場から受ける磁気力の大きさ F とその方向を求めよ。

次に、導線に電流を流した状態で、 z 軸の正の向きに一様な磁場（大きさ H_0 ）を印加した。

- (2) z 軸上の点 $P(0, 0, z)$ に作られる磁場の大きさ $H(z)$ を求めよ。
- (3) 求めた磁場の大きさが0 ($H(z) = 0$) になるときの電流 $I(z)$ を求めよ。また、 z の関数として、 $I(z)$ をグラフに示せ。
- (4) 電流の大きさを変化させたとき（電流を逆向きに流す場合も含む）、作られる磁場の大きさを0にできる点が存在する領域を理由とともに示せ。ただし、 zx 面上の点から得られる領域は除いてよい。

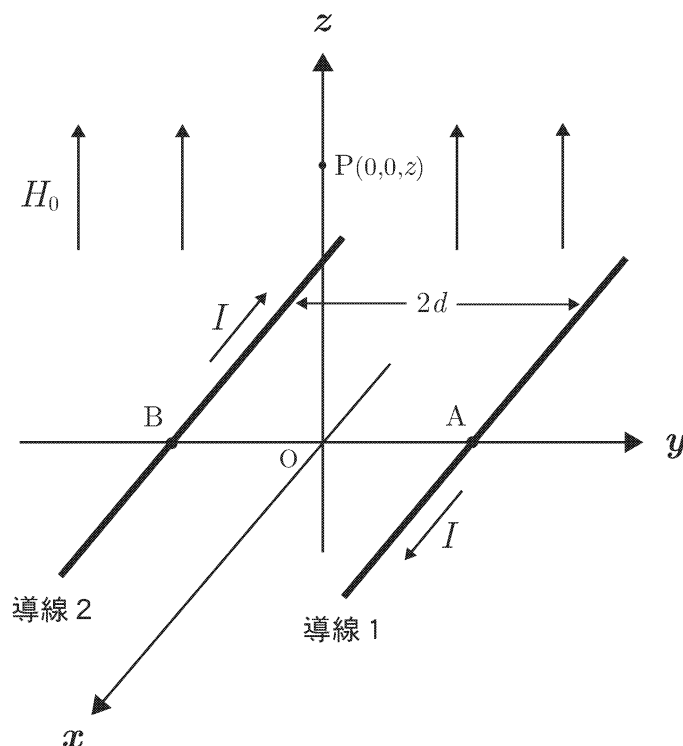


図2

Ⅲ 以下の各問に答えよ。

(100 点)

問1 シュレーディンガー方程式 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H\psi(x, t)$ を満たす波動関数 $\psi(x, t)$ が $\psi(x, t) = \phi(x) e^{-i\omega t}$ と書けるときの、 $\phi(x)$ が満たすべき方程式を求めよ。また、確率密度を求め、それが時間によらないことを示せ。

問2 $\phi(x) = \sin x$ で表される波動関数を考える。なお、 x の範囲は $-\pi \leq x \leq \pi$ である。

(1) 与えられた波動関数を規格化し、確率密度のグラフの概形を描け。

(2) この場合の運動量の期待値 $\langle p \rangle$ と座標の期待値 $\langle x \rangle$ を求めよ。

問3 質量 m の電子が、長さ L の無限に深い井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq L) \\ \infty & (x < 0, L < x) \end{cases}$$

の中を運動している。ここで、時間に依存しないシュレーディンガー方程式は、

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + V(x) u(x) = E u(x)$$

である。

(1) 井戸の中 ($0 \leq x \leq L$) でのシュレーディンガー方程式を書け。

(2) 領域 $x < 0$ と $L < x$ には電子は全く侵入不可能である。波動関数 $u(x)$ は $x = 0$, $x = L$ でどのような境界条件を満たさなければならないか示せ。

(3) ここで、 $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ とおくと、上の (1) で求めたシュレーディンガー方程式はどのような形になるか書け。

- (4) 無限に深い井戸型ポテンシャルの中の電子の波動関数は

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。(3) で求めた式を用いて、この式を導出せよ。

- (5) この電子のエネルギー固有値

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を導出せよ。

- (6) $n = 1, 2, 3$ の場合の定常状態のエネルギー E_1, E_2, E_3 を求め、波動関数 $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ の概形を図示せよ。
- (7) ポテンシャルの深さが V_0 (井戸の深さが有限) の場合、束縛状態か非束縛状態 (散乱状態) かが決まる条件を説明せよ。
- (8) 井戸の深さが有限の場合、 $x = 0$ と $x = L$ で波動関数はどのような振る舞いをするのか、束縛状態と非束縛状態についてそれぞれ簡単に説明せよ。

IV 以下の各問に答えよ。

(100 点)

問 1 熱平衡状態を保って準静的に変化する気体の圧力を p , 体積を V , 温度を T , エントロピーを S とする。

(1) 気体の内部エネルギーを U とすると, 熱力学第一法則から

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p$$

が導かれることを示せ。

(2) ヘルムホルツの自由エネルギー F は, $F = U - TS$ で与えられる。 F の全微分形式を利用して, マクスウェルの関係式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

を導出せよ。

(3) (1) および (2) の結果を利用して, 状態方程式

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (a, b, R \text{ は定数})$$

にしたがう 1 mol のファンデルワールス気体の内部エネルギーが

$$dU = c_v dT + \frac{a}{V^2} dV$$

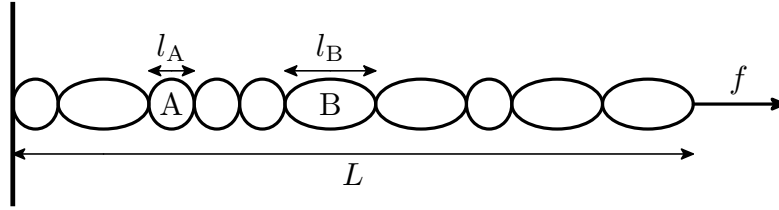
の関係を満たすことを示せ。ただし,

$$c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

は定積熱容量である。

(4) (3) のファンデルワールス気体が温度 T の熱源に接したまま準静的に体積 V_1 から V_2 に膨張したとする。この過程における気体の内部エネルギーの変化 ΔU , 気体が外部にした仕事 W , および気体が熱源から受け取った熱量 Q を求めよ。

問2 下図のように、2種類の状態 A, B をとりうる要素（モノマー） N 個が1列につながった系（ポリマー）が温度 T の熱平衡状態にある。状態 A, B にあるモノマーの長さはそれぞれ l_A, l_B であり、ポリマー全体の長さを L とする。また、状態 A, B にあるモノマーのエネルギーはそれぞれ ϵ_A, ϵ_B であるとし、各モノマーが A, B のどちらの状態をとるかは他のモノマーの状態とは独立であるものとする。このポリマーの一端を固定し、もう一方の端を大きさ f の力で引っ張った。以下では、ボルツマン定数を k として、逆温度 $\beta = 1/(kT)$ を導入する。



- (1) 状態 A をとるモノマーがちょうど n 個である配置は何通りあるか。
- (2) 分配関数 Z が

$$Z = [\exp((fl_A - \epsilon_A)\beta) + \exp((fl_B - \epsilon_B)\beta)]^N$$

であることを示せ。ただし、分配関数を求めるときの系の全エネルギーには $-fL$ を加えることに注意せよ。

- (3) 系の全エネルギーの平均 $\langle E \rangle$ およびポリマーの長さの平均 $\langle L \rangle$ を求めよ。
- (4) $\epsilon_A = \epsilon_B = \epsilon$ と単純化し、 $fl_A, fl_B \ll kT$ である場合を考える。力をかけていないとき ($f = 0$) のポリマーの長さの平均を $\langle L \rangle_0$ とすると、 $f = K(\langle L \rangle - \langle L \rangle_0)$ という形のフックの法則が成り立つことを示せ。また、係数 K の温度依存性について説明せよ。必要なら

$$e^x \simeq 1 + x, \quad \frac{1}{2+x} \simeq \frac{1}{2} - \frac{x}{4} \quad (|x| \ll 1)$$

を用いてよい。

2018 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2017 年 8 月 30 日(水)

注意事項

1. 全ての解答用紙（B4用紙）の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I 次の文章を日本語訳せよ。 (16 点)

問1 Suppose we have a mechanical system with a single generalized coordinate q and corresponding velocity $\dot{q}$. Then the Lagrangian is defined as the difference between the kinetic and potential energies.

問2 The smallness of $\hbar$ shows that macroscopic physics is hardly affected by quantum effects.

II 次の文章を英訳せよ。 (16 点)

問1 系の持つ物理量は、その物理量が系のサイズが変わったときにどう変化するかによって、示強的 な量と 示量的 な量に分類することができる。
intensive extensive

問2 ラザフォード 模型における電子の運動は不安定である。なぜなら、古典力学と電磁気学によれば曲線上を動くいかなる荷電粒子も電磁波を発するからである。
Rutherford

III 物理の法則・定理など、あなたが覚えているもののどれか一つについて、100 語程度の英文で説明せよ。 (16 点)

IV 次の英文を読んで、以下の各問に答えよ。 (52 点)

Angular momentum

From Wikipedia, the free encyclopedia

In physics, angular momentum (rarely, moment of momentum or rotational momentum) is the rotational analog of linear momentum. It is an important quantity in physics because it is a conserved quantity — the angular momentum of a system remains constant unless acted on by an external torque.

The definition of angular momentum for a point particle is a pseudovector 擬ベクトル $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$, the cross product of the particle's position vector $\mathbf{r}$ (relative to some origin) and its momentum vector $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. This definition can be applied to each point in continua like solids or fluids, or physical fields. Unlike momentum, angular momentum does depend on where the origin is chosen₍₁₎, since the particle's position is measured from it. The angular momentum of an object can also be connected to the angular velocity $\boldsymbol{\omega}$ of the object (how fast it rotates about an axis) via the moment of inertia I (which depends on the

shape and distribution of mass about the axis of rotation). However, while ω always points in the direction of the rotation axis, the angular momentum $\mathbf{L}$ may point in a *different* direction depending on how the mass is distributed.

Angular momentum is additive₍₂₎; the total angular momentum of a system is the (pseudo)vector sum of the angular momenta.₍₃₎ For continua or fields one uses integration. The total angular momentum of anything can always be split into the sum of two main components: “orbital” angular momentum about an axis outside the object, plus “spin” angular momentum through the centre of mass of the object.₍₄₎

Torque can be defined as the rate of change of angular momentum₍₅₎, analogous to force. The conservation of angular momentum helps explain many observed phenomena, for example the increase in rotational speed of a spinning figure skater as the skater’s arms are contracted₍₆₎, the high rotational rates of neutron stars, the falling cat problem, and precession of tops and gyros.

コマ

問1 以下の文章は間違いである。上の英文のどこを見れば間違いであるとわかるのかを指摘し日本語で説明せよ。

- (a) 系の角運動量は常に保存する。
- (b) 液体は角運動量を持たない。
- (c) ω と $\mathbf{L}$ は常に平行である。

問2 下線部 (1) の意味するところを日本語と図で説明せよ。

問3 下線部 (2) に「additive」という単語があるが、辞書で「additive」を引くと、「付加的な」や「添加物」などが主に出てくる。しかしここでの「additive」の意味は下線部 (3) で表現されているものである。ここでの「additive」の意味を日本語で説明せよ。

問4 下線部 (4) を日本語訳せよ。

問5 下線部 (5) の内容を, torque を $\mathbf{N}$, angular momentum を $\mathbf{L}$ として数式で表すとどうなるか。

問6 下線部 (6) の内容を絵を使って説明せよ。