

2019 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門（物理）

2018 年 8 月 29 日(水)

注意事項

1. 全ての解答用紙（B4用紙）の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 全ての解答用紙の□（左上）に大問番号（Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ）を記入すること。
3. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
5. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
6. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I 以下の各問に答えよ.

(100点)

■ 質量 m_1 の物体Aと質量 m_2 の物体Bが滑車を介して、図1のようにロープで吊るされている. 滑車は一様な薄い円盤であり、質量と半径をそれぞれ M, a とする. 滑車の回転軸は、滑車の中心を通り、滑車に対して垂直に固定されている. このとき、滑車の回転軸周りの慣性モーメントは $\frac{1}{2}Ma^2$ で与えられる. 物体Aと滑車の間のロープの長さを x 、物体Bと滑車の間のロープの長さを $l-x$ とする. ロープと滑車はすべらないものとし、物体Aと物体Bは滑車を含む平面内で鉛直方向に運動できる. ただし、空気の抵抗は無視する. m_1 は m_2 よりも大きいものとし、重力加速度の大きさを g とする.

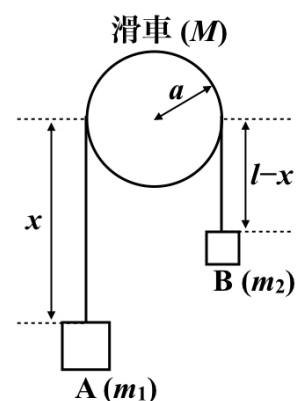


図1

問1 物体Aの運動エネルギーを $m_1, \dot{x}$ を使って書け. ただし、 $\dot{x}$ は x の時間微分を表す.

問2 滑車の回転エネルギーを $M, \dot{x}$ を使って書け.

問3 物体A, Bと滑車からなる系のラグランジアンを書け.

問4 x を一般化座標とするラグランジュの運動方程式を導き、物体Aの加速度を求めよ.

■ 図2のように、鉛直でなめらかな壁があり、壁から距離 b のところになめらかで水平な軸Aが紙面に対して垂直方向に設置されている. 長さ $2a$ 、質量 M の一様な棒が軸Aに立てかけられ、棒の一端はつねに壁に接している. 棒は紙面内にあり、その面内でのみ運動できるものとする. 棒と水平面のなす角を図のように θ とし、重力加速度の大きさを g とする.

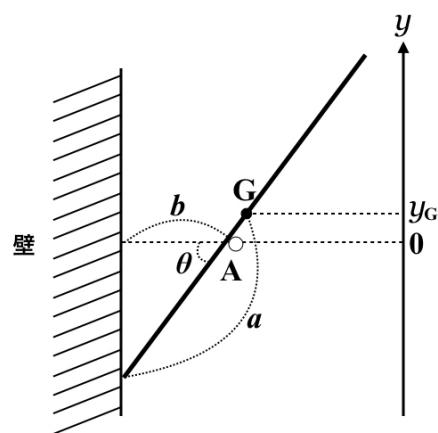


図2

問5 軸Aの高さを基準として、棒の重心の高さ y_G を a, b, θ を用いて表せ.

問6 棒にかかる力をすべて挙げ、それらの力が仕事をするのか、しないのかを理由とともに説明せよ.(力の説明は「〇〇から棒にかかる〇〇力」のように書くこと.)

問7 軸Aの高さを基準として、棒の位置エネルギーを M, a, b, g, θ を用いて表せ.

問8 棒がつり合いの位置にあるとき、 θ を a, b を用いて表せ.

問9 棒がつり合いの位置にあるとき、そのつり合いが安定か不安定かを判定せよ.

II

以下の各問に答えよ.

(100 点)

問 1 真空中において, 一様な電荷密度 ρ (> 0) で帯電した半径 a の無限に長い円柱を考える. 図 1 のように, 円柱の中心 O を通るように z 軸をとり, それと垂直に r 軸をとる. また, 真空の誘電率を ϵ_0 とする.

- (1) 円柱の内側 ($r < a$) と外側 ($r > a$) の電場の大きさ $E(r)$ を求めよ.
- (2) r の関数として, $E(r)$ をグラフに示せ.
- (3) r_1 と r_2 の電位差を V_{12} , r_3 と r_4 の電位差を V_{34} とする. それぞれの電位差を求めよ.

問 2 図 2 のような起電力 E の電池, 静電容量 C のコンデンサ, 抵抗 R の抵抗器からなる回路を考える. 時刻 t におけるコンデンサに蓄えられた電気量を $Q(t)$ とし, $t = 0$ で電荷は溜まっていないものとする.

- (1) $Q(t)$ に関する微分方程式を立てよ.
- (2) 上記の微分方程式を解き, $Q(t)$ の時間変化をグラフに示せ.
- (3) コンデンサを完全に充電するまでに, 抵抗器で消費されたエネルギーを求めよ.

問 3 xy 平面上に厚さを無視できる無限に広い平板があり, その平板中に電流密度の大きさ j の一様な電流が x 軸負の方向に流れているとする. この電流により生じる磁束密度について考える. ここで, 真空の透磁率を μ_0 とする.

- (1) 磁束密度 $\mathbf{B}$ は y 軸に平行となり, その大きさは一様となる. また, xy 面に対して反対称となる. その理由について説明せよ. ここで, 「対称性」, 「 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ 」, 「 $\text{rot } \mathbf{B}$ 」を説明文中に用いること.
- (2) 磁束密度の大きさ B を求めよ.

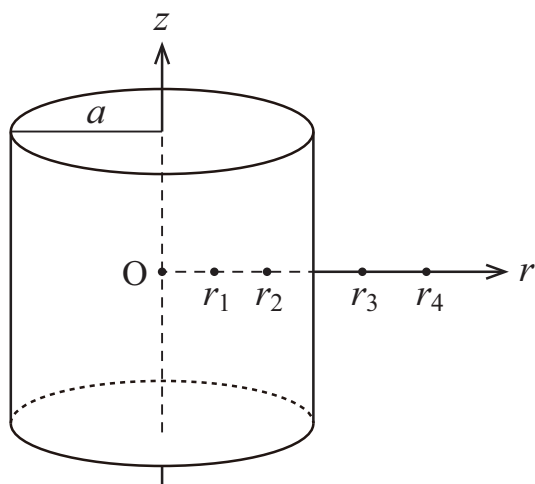


図 1

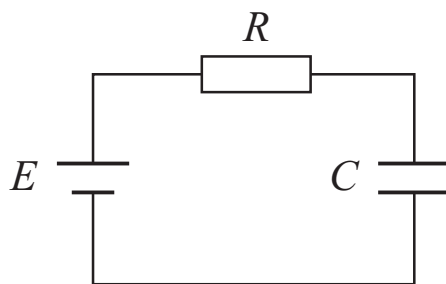


図 2

III 磁場中での電子のスピン量子力学的運動について考える. 電子の運動エネルギーを無視すると, 電子のハミルトニアン H は磁場 $\mathbf{B}$ とスピン $\mathbf{S}$ のゼーマン相互作用

$$H = -\mu \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad (1)$$

によって与えられる. ただし, μ はある定数とする. 以下の問に答えなさい.

(100 点)

問 1 一般のハミルトニアンに対して, 時間に依存するシュレーディンガー方程式を解くことによって, 波動関数の時間依存性は $e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ (ただし, E はエネルギー固有値を表す定数, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ で h はプランク定数) と書けることを示しなさい.

問 2 電子の軌道角運動量 $\mathbf{L}$ は, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ で定義される. 正準交換関係 $[x, p_x] = [y, p_y] = [z, p_z] = i\hbar$ などを用いて, 角運動量の交換関係 $[L_y, L_z]$ を計算しなさい.

問 3 電子はスピン $\frac{1}{2}$ の大きさを持つ. 2 個の電子のスピンを合成するときに行けるすべてのスピンの大きさとその縮退度を書きなさい.

問 4 電子のスピン大きさは $\frac{1}{2}$ であるので, スピンの自由度を表現する演算子は 2×2 の行列で表すことができる. スピン $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ を

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表すとき, スピンは軌道角運動量と同じ交換関係を満足することを使って, S_x を表す行列を求めなさい.

問 5 z 軸方向に強さ B_0 の静磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ をかけたときの波動関数を $\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_+(t) \\ \phi_-(t) \end{pmatrix}$ と書くことにする. 式 (1) のハミルトニアンに対するシュレーディンガー方程式を解くことによって, 波動関数は $\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_+(0)e^{i\omega_0 t} \\ \phi_-(0)e^{-i\omega_0 t} \end{pmatrix}$ となることを示しなさい. ただし, $\omega_0 = \frac{1}{2}B_0\mu$ であり, また $\phi_{\pm}(0)$ はある定数とする.

問 6 上の問 5 において, ハイゼンベルグの運動方程式 $\dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{S}, H]$ を解くことによって, スピンが z 方向を軸とする角速度 $2\omega_0$ の回転運動をしていることを示しなさい. ただし, $\dot{\mathbf{S}}$ は $\mathbf{S}$ の時間微分を表す.

問 7 今度は, xy 平面内で回転している磁場 $\mathbf{B} = (B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, 0)$ をかけたときの波動関数を $\chi(t) = \begin{pmatrix} \chi_+(t) \\ \chi_-(t) \end{pmatrix}$ と書くことにする. 式 (1) のハミルトニアンに対するシュレーディンガー方程式を解くことによって, 波動関数 $\chi(t) = \begin{pmatrix} \chi_+(t) \\ \chi_-(t) \end{pmatrix}$ を求めることができる. このとき, $\chi_+(t) = e^{-i\frac{\omega}{2}t} \left(A e^{i\sqrt{\omega_1^2 + \frac{\omega^2}{4}}t} + B e^{-i\sqrt{\omega_1^2 + \frac{\omega^2}{4}}t} \right)$ (ただし, A, B は定数で, $\omega_1 = \frac{1}{2}B_1\mu$) となることを示しなさい.

問 8 上の問 7 の問題において, $t = 0$ でスピンの向きが z 軸の正方向を向いていたと仮定する. その後の任意の時刻 t において, スピンの向きが逆向き, すなわち, z 軸の負方向を向く確率を求めなさい.

IV 以下の各問に答えよ.

(100 点)

問 1. 次の状態量を示量変数と示強変数に分けよ.

圧力, 体積, 温度, 内部エネルギー, エントロピー, ヘルムホルツの自由エネルギー, ギブスの自由エネルギー

問 2. 物質に熱量 δQ が与えられると, 物質の圧力 p , 体積 V , 温度 T は変化し, それに伴い内部エネルギー U も変化する. なお, ここでいう状態変化は準静的変化を考える.

(1) 内部エネルギー U を, T と V の関数とみなして全微分の形式で表せ.

(2) 熱量の変化量を与える式 $\delta Q = dU + pdV$ から, 定積比熱 C_V と定圧比熱 C_p との間には, 以下の関係式が成り立つことを示せ.

$$C_p = C_V + \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

(3) 定圧比熱 C_p は定積比熱 C_V より大である理由を述べよ.

(4) 理想気体は, 状態方程式 $pV = nRT$ に従う. n はモル数を表す. いま, ある物質が理想気体 1 モルの場合, 上記 (2) の結果を用いて $C_p - C_V = R$ であることを示せ.

問 3. 温度 T の熱浴と接している N 個の独立で局在した粒子系を考える. 各々の粒子は 0 および $\Delta (> 0)$ の 2 つのエネルギーを取る.

(1) この系の分配関数 Z を導出せよ.

(2) 系におけるヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ.

(3) エントロピー S を求めよ.

(4) 系の内部エネルギー U は次式で表されることを示せ. ただし, $\beta = 1/(k_B T)$ であり, k_B はボルツマン定数である.

$$U = \frac{N\Delta}{1 + e^{\beta\Delta}}$$

(5) 定積比熱 C_V を求めよ. さらに, 縦軸を比熱, 横軸を温度とするグラフの概形を描け.

2019 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2018 年 8 月 29 日(水)

注意事項

1. 全ての解答用紙（B4用紙）の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

[1] 次の英文を読んで、各問に答えよ。なお、参考のために、左肩番号を付した単語の意味が文章の最後に説明してある。

The “Face” on Mars

A) In 1976, NASA’s *Viking 1* spacecraft was orbiting Mars. When snapping photos, the spacecraft captured the shadowy likeness of an enormous head, 2 miles from end to end and located in a region of Mars called Cydonia (Fig. 1a).

The surprise among the mission controllers at NASA was quickly tempered as planetary scientists decided that the “face” was just another Martian ¹⁾ mesa, a geologic landform common in the Cydonia region. B) When NASA released the photo to the public a few days later, the caption noted a “huge rock formation . . . which resembles a human head . . . formed by shadows giving the illusion of eyes, nose, and mouth.” NASA scientists thought that the photo would attract the public’s attention to its Mars mission, and indeed it did!

C) The “face” on Mars became a sensation, appearing in newspapers (particularly tabloids), in books, and on TV talk shows. Some people thought that it was evidence of life on Mars, either at present or in the past, or perhaps that it was the result of a visit to the planet by aliens. As for NASA’s ²⁾ contention that the “face” could be entirely explained as a combination of a natural landform and unusual lighting conditions, howls arose from some of the public about ³⁾ “cover-up” and “conspiracy.” Other people, with a more developed scientific attitude, gave provisional acceptance to NASA’s conclusion, realizing that extraordinary claims (witty aliens) need extraordinary proof.

Twenty-two years later, in 1998, the *Mars Global Surveyor* (MGS) mission reached Mars, and its camera snapped a picture of the “face” 10 times sharper than the 1976 *Viking* photo. Thousands waited for the image to appear on NASA’s website. The photo revealed a natural landform, not an alien monument. However, the image was taken through wispy clouds, and some people were still not convinced that the object was just a plain old mesa.

Not until 2001 did the MGS camera again pass over the object. This time there were no clouds, and the high-resolution picture was clearly that of a mesa similar to those common in the Cydonia region and the American West (Fig. 1b).

D) Why would so many articles and books be written extolling the alien origin of the “face”? Perhaps many authors were ⁴⁾ trading on the ⁵⁾ gullibility and ignorance of part of our population to ⁶⁾ line their own pockets or to gain attention. If so, the best ways to deal with similar situations in the future would be to improve the standard of education among the general public and to emphasize the importance of a well-developed scientific method.

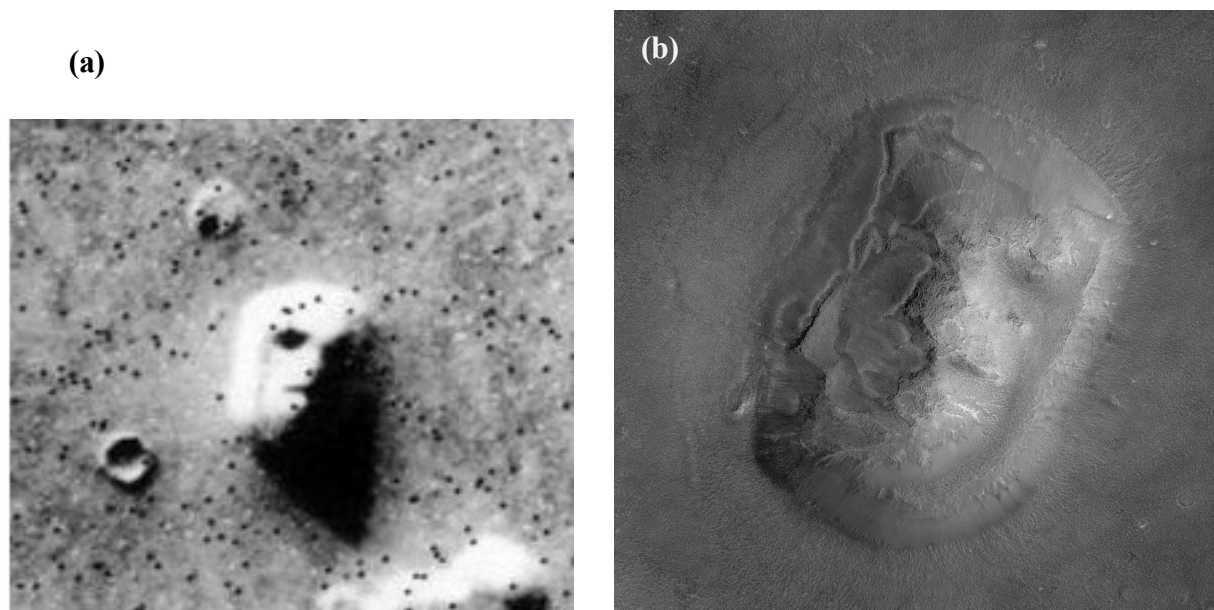


Figure 1 The Face on Mars

(a) In 1976, at the low resolution of the *Viking 1* camera, the appearance of a sculpted face can be seen. (b) In 2001, at the high resolution of the *Mars Global Surveyor* camera, the object is seen to be a common mesa.

(“*An Introduction to Physical Science, 13th Edition*”, By J. T. Shipman, J. D. Wilson, and C. A. Higgins, Jr., Brooks Cole 2012 より抜粋.)

Hints: ¹⁾mesa メーサ (周囲が急な崖になった台地; 米国南西部の乾燥地帯に多い), ²⁾contention 論点, 主張, ³⁾cover-up 隠蔽, ⁴⁾trade on (悪く) 利用する, つけこむ, ⁵⁾gullibility だまされやすいこと, ⁶⁾line one's pockets 私腹を肥やす

問 1 下線部 A) を和訳せよ.

問 2 下線部 B) を和訳せよ.

問 3 下線部 C) に関して, The “face” on Mars が大騒ぎとなったと本文中で述べられている. 具体的にどのように大騒ぎとなったかについて述べよ.

問 4 Figure 1 に示した 1976 年と 2001 年の写真に関して, 写真技術の違いと写真の内容の違いについて述べよ.

問 5 下線部 D) を和訳し, 下線部の間に対する答えを述べよ.

問 6 The “face” on Mars が大騒ぎとなり解決に 20 年余を要した. 将来同種の問題が起きないために何が大事であると主張されているかについて述べよ.

[2] つぎの文章を和訳せよ.

- (1) In 2016, three physicists received the Nobel Prize for using the mathematical concept of "topology" to explain the strange behavior of certain materials - for example, those that are insulators in their bulk but conductors on their surface.
- (2) Topological materials are unusual for the robustness of their electrical properties, even when the temperature shifts dramatically, or their physical structure is deformed.

[3] 大学院に進学する理由を, 100 語程度の英文で記述せよ.

[4] つぎの文章を英訳せよ.

- (1) 1908 年にオランダの科学者カマリング・オネスは 4.2 K の沸点をもつヘリウムの液化に初めて成功した. この技法を使って彼は導体を極低温まで冷却することができた.
- (2) 1911 年にオネスは水銀の低温における伝導性を研究した. 大変驚いたことに, 4.2 K で電気抵抗が急にゼロに落ちることを発見した. 彼はこの現象を超伝導と名付けた.

Hints: カマリング・オネス Kamerlingh-Onnes, ヘリウム helium, 水銀 mercury, 超伝導 superconductivity