2020 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門(物理)

2019 年 8 月 28 日(水)

注意事項

1. 全ての解答用紙(B4用紙)の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 全ての解答用紙の□(左上)に大問番号(Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ)を記入すること。
3. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
5. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
6. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

$\boxed{\text{I}}$ 以下の各問に答えよ．（100 点）

問1　図１のように，ばね定数 k のばねの一端を固定し，他端に質量 m の質点を取りつける．重力が無い状態で，このばねと質点が行う，x 軸方向の運動について考える．但し，ばねが自然長となるときの質点の位置を $x=0$ とし，ばねが伸びる方向を x 軸の正方向とする．

(1) この系のラグランジアン L を求めよ．
(2) ラグランジュの運動方程式を求めよ．
(3) この系のハミルトニアン H を求めよ．
(4) 正準方程式を求めよ．
(5) 運動方程式の一般解を求めよ．必要であれば，任意定数を複数導入しても良い．
(6) この系の力学的エネルギーを E とする．このときの位相空間中での質点の軌道を図に描き，その運動の向きを矢印で示しなさい．
(7) 実空間での質点の運動と，この位相空間中での軌道との対応関係について説明せよ．

問2　図２のように，2 つの等しい質点を 3 つのばねで連結する場合を考える．ばね定数 k' のばねの両端に質量 m の質点をつけ，2 つの質点にばね定数 k のばねを各々つけ，3 つのばねを x 軸に沿って並べて両端を固定する．このとき，3 つのばねは自然長であったとし，重力の影響はないものとする．2 つの質点は x 軸に沿って微小振動する．

2 つの質点のつり合いの位置からの変位を x_1，x_2 とする．

(1) この系のラグランジアン L を求めよ．
(2) 2 つの質点は基準振動を行うものとし，(1)の一般解を求めよ．

次に，図２の左側の質点だけをつり合いの位置より a だけずらして静かに放すときの運動を考える．ばね定数 k' は k に比較して十分に小さいものとする．

(3) 基準振動の 2 つの振動数の間に成り立つ関係式を求めよ．また，このときの解を求め，質点の運動について説明せよ．

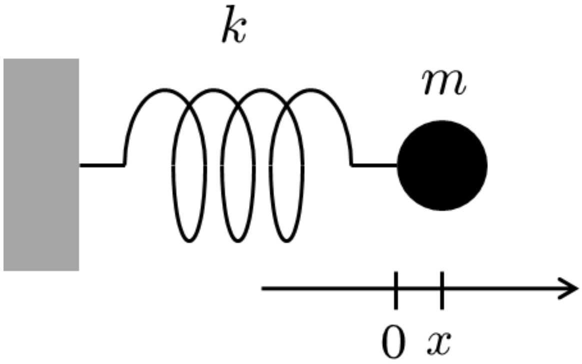

図 1

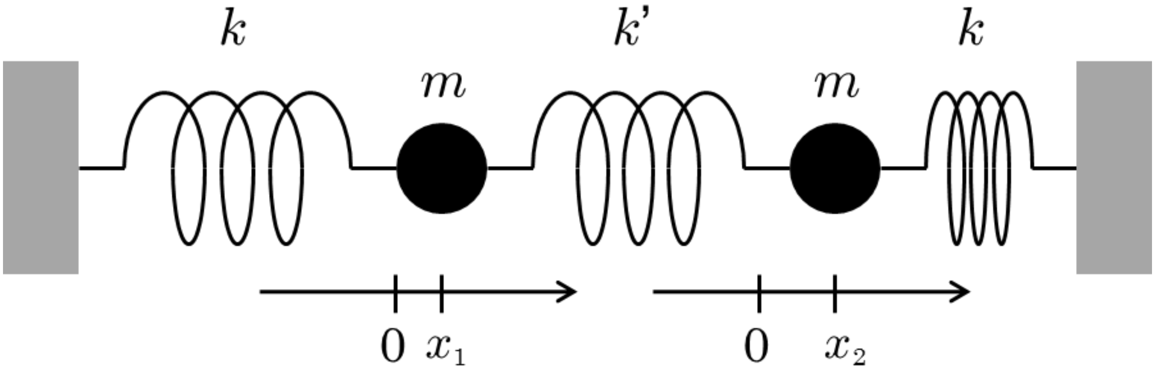

図 2

$\boxed{\text{II}}$ 以下の各問に答えよ．　(100 点)

問１　図１のように，xy 平面上に原点 O を中心とする半径 a の円形導体を置く．円形導体は真空中にあるものとし，太さは無視できるとする．原点 O から z 軸の正方向に距離 b だけ移動した点を，点 P とする．

(1)　円形導体が線電荷密度 ρ で一様に帯電しているとき，点 P での電場 $\boldsymbol{E}$ の向きと大きさを求めよ．ただし，真空の誘電率を ε_0 とする．

(2)　円形導体に電流 I が流れているとき，点 P での磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の向きと大きさを求めよ．ただし，真空の透磁率を μ_0 とする．電流の向きは点 P から原点 O の方向を見て反時計回りとする．

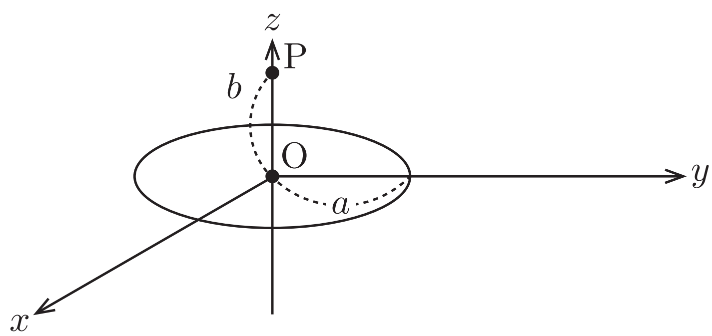

図１

問２　導体である半径 r_1 の水銀球を帯電させると表面に電荷が集まり，無限遠方を基準にしたときの水銀球の電位が V_1 となった．この水銀球を水銀球 A とする．水銀球 A は真空中にあり，真空の誘電率を ε_0 とする．

(1)　水銀球 A をコンデンサーとみなしたとき，静電容量 C_1 と静電エネルギー U_1 を求めよ．

(2)　同様に帯電させた水銀球 A を 8 個合体させて 1 個の大きな水銀球 B にしたときの電位 V を求めよ．合体の前後で電荷は保存されているものとする．

(3)　(2) の水銀球 B の静電エネルギー U は，水銀球 A の 8 個の合計 $(8U_1)$ の何倍になるか求めよ．

問３　原点Ｏを中心とした半径 R の球の内部に，正電荷が体積密度 ρ で一様に分布している．この正電荷分布は真空中にあり，真空の誘電率を ε_0 とする．

(1)　原点Ｏから $r(0 < r < R)$ だけ離れた位置の電場 $\boldsymbol{E}$ の向きと大きさを求めよ．

(2)　質量 m，電荷 $-e$ $(e > 0)$ の負の点電荷を原点Ｏを除く正電荷分布の中に静かに置くと，点電荷が単振動を始めた．このときの周期 T を求めよ．ただし，正電荷は固定され動かず，点電荷は正電荷分布の中を自由に動くことができるとする．また電磁放射の影響は無視する．

問４　図２のように，真空中の原点Ｏに磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ が存在し，原点Ｏから距離 r，角度 θ の位置に点Ｑがある．磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ が点Ｑに作り出す磁場 $\boldsymbol{H}$ は，$\boldsymbol{M}$ と線分ＯＱを含む面内にある．図の $\boldsymbol{e}_r$ と $\boldsymbol{e}_\theta$ を極座標 $(r,\ \theta)$ の正規直交基底とすると，$\boldsymbol{H} = H_r\boldsymbol{e}_r + H_\theta\boldsymbol{e}_\theta$ と書ける．以下では $\boldsymbol{H}_r = H_r\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{H}_\theta = H_\theta\boldsymbol{e}_\theta$ とする．

(1)　H_r と H_θ を求めよ．ただし，真空の透磁率を μ_0 とする．

(2)　$\boldsymbol{H}_\theta$ と $\boldsymbol{H}$ のなす角を ϕ としたとき，$\tan\phi$ を求めよ．

(3)　磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ を地磁気だと考えると，$\boldsymbol{H}$ は地表面のある緯度で感じる地球磁場と考えることができる．これを参考にして，北半球で使用可能な方位磁石が南半球で使用出来ない理由について述べよ．

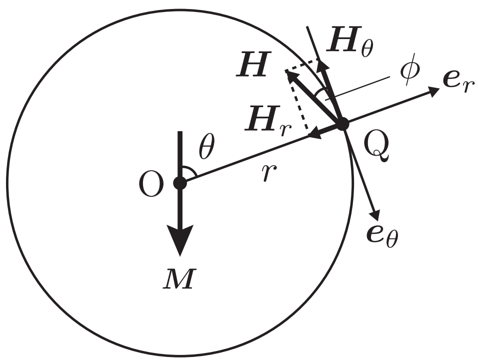

図２

$\boxed{\text{III}}$ 以下の各問に答えよ．ただし，導出過程を明確に示すこと．(100 点)

x 軸上を運動する質量 m を持つ粒子の波動関数を $\Psi(x,t)$ とする．この粒子がポテンシャル $V(x)$ の中で運動する場合，シュレーディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\Psi(x,t)$$

と書くことができる．ただし，$\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったものである．

問 1　時刻 t での位置 x の期待値 $\langle x\rangle_t$ が

$$\langle x\rangle_t=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)dx$$

で与えられるとき，その時間変化が

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle_t=-\frac{i\hbar}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)dx$$

と書けることを示せ．ただし，波動関数 Ψ は遠方で十分速くゼロになる波束であると仮定する．

問 2　問 1 の $d\langle x\rangle_t/dt$ の式をもう 1 回時間微分することにより，

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle_t=-\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)\Psi(x,t)dx$$

が成り立つことを示せ．

次に，ポテンシャル $V(x)$ が箱型の障壁

$$V(x)=\begin{cases}0 & (x\le -a) & \text{領域 I}\\ V_0 & (-a<x<a) & \text{領域 II}\\ 0 & (x\ge a) & \text{領域 III}\end{cases}$$

として与えられ，粒子が $x<-a$ から右向きに入射する場合を考える．ただし，以下では入射する粒子は平面波で表されると仮定する．また，V_0 は正の定数で，粒子のエネルギー E と，$V_0>E>0$ の関係にあるとする．

問 3　粒子の波動関数が $\Psi(x,t)=e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\psi(x)$ で与えられるとき，$\psi(x)$ が領域 I，II，III で満す方程式をそれぞれ求めなさい．

問 4　領域 I で波動関数 $\psi(x)$ が

$$\psi(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}$$

と書けることを示し，k を E，$\hbar$，m を用いて表せ．ただし，振幅 A_1 と A_2 は定数で，波数 k は正の定数であるとする．

問 5　領域 II で波動関数 $\psi(x)$ が

$$\psi(x) = B_1 e^{\gamma x} + B_2 e^{-\gamma x}$$

と書けることを示し，γ を E，V_0，$\hbar$，m を用いて表せ．ただし，振幅 B_1 と B_2 は定数で，γ は正の定数であるとする．

問 6　領域 III で波動関数 $\psi(x)$ は

$$\psi(x) = C_1 e^{ikx}$$

と書ける．e^{-ikx} に比例する項が存在しない理由を述べよ．ただし，振幅 C_1 は定数で，波数 k は領域 I と同じ正の定数であるとする．

以下，問 7～問 9 の解答には，k，γ，a を用いなさい．

問 7　領域 I と II の境界および II と III の境界で波動関数を滑らかに接続することにより，係数の比

$$\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{B_1}{A_1}, \quad \frac{B_2}{A_1}, \quad \frac{C_1}{A_1}$$

を全て求めよ．

ポテンシャル障壁の透過率

$$T = \frac{|C_1|^2}{|A_1|^2}$$

を考える．

問 8　透過率 T を求めよ．

問 9　ポテンシャル障壁の高さと粒子のエネルギーの関係が

$$V_0 - E \gg \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

の場合について，透過率 T を近似し，γ の関数として指数関数的に減少することを示せ．

$\boxed{\text{IV}}$　以下の各問に答えよ．絶対温度を T, ボルツマン定数を k_{B} , また $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とする．解答で β を用いてもよい．（100 点）

問１　温度 T で熱平衡にある３準位系（エネルギーが $-\varepsilon,\ 0,\ \varepsilon$ の３つの状態のいずれかをとる系）を考える．$\varepsilon > 0$ であり，ε は温度に依らず一定である．

(1) この系の分配関数 Z を求めよ．

(2) この系がエネルギー $-\varepsilon,\ 0,\ \varepsilon$ の状態のそれぞれに見出される確率 P_-，P_0，P_+ を求めよ．

(3) $T \to 0$，$T \to \infty$ のそれぞれの極限における前問(2)の確率 P_-，P_0，P_+ を求めよ．

(4) この系の平均エネルギー U を求めよ．

(5) 熱容量 C を求めよ．

(6) 前問(5)で得られた C について，$k_{\mathrm{B}}T \ll \varepsilon$ および $k_{\mathrm{B}}T \gg \varepsilon$ における C の振る舞いを調べよ．

問２　質量 m の単原子分子１個が筒状容器の内部 $0 < x < L$，$0 < y < L$，$0 < z < \infty$ に閉じ込められ，温度 T で熱平衡にある．ここで x, y, z は位置を表す直交座標系である．容器の断面は一辺 L の正方形であり，$z = 0$ が容器の底に対応し，容器の高さは無限大である．この分子には，z 軸の負方向に大きさ mg の一定の重力が働いている．ここで g は重力加速度を表す．この分子の分配関数 Z_1 は次のように表される．

$$Z_1 = \frac{1}{h^3}\iint \exp\left[-\beta E(z,\mathbf{p})\right] d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{p}$$

ここで，h はプランク定数であり，exp は指数関数を表す．エネルギー $E(z,\mathbf{p})$ は次のように与えられる．

$$E(z,\mathbf{p}) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + mgz$$

Z_1 は，位置ベクトル $\mathbf{r}$ の成分 x, y, z，運動量ベクトル $\mathbf{p}$ の成分 p_x, p_y, p_z についての重積分で与えられる．$d^3\mathbf{r} = dx\,dy\,dz$ であり，$\mathbf{r}$ の積分は容器内の領域で行う．また $d^3\mathbf{p} = dp_x\,dp_y\,dp_z$ であり，$\mathbf{p}$ の積分は全運動量空間，すなわち $-\infty < p_x < \infty$，$-\infty < p_y < \infty$，$-\infty < p_z < \infty$ において行う．計算の過程で次の定積分の値を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{定数 } a > 0)$$

(1) 分配関数 Z_1 を求めよ.

(2) 分子の平均エネルギー U_1 を求めよ.

次に，上記の筒状容器に質量 m の同種の単原子分子が N 個入っている場合を考える. 前述のように各分子には，z 軸の負方向に大きさ mg の一定の重力が働いている. 気体の密度が低く，この気体を古典的理想気体として扱うことができるものとする. このとき，気体の分配関数 Z_N は次のように表される.

$$Z_N = \frac{(Z_1)^N}{N!}$$

(3) 上記の Z_N の表式の分母にある $N!$ がなぜ必要なのかを簡潔に述べよ.

(4) Z_N を求めよ.

(5) 気体の平均エネルギー U_N を求めよ.

(6) 気体の熱容量 C_V を求めよ.

(7) 前問(6)で得られた C_V は，重力が存在しないときの単原子分子理想気体の定積熱容量と比べて大きいか，小さいかを答え，またその理由を述べよ. ここでの理想気体も，同種の分子 N 個からなる古典的理想気体とする.

2020 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2019 年 8 月 28 日(水)

注意事項

1. 全ての解答用紙(B4用紙)の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

Ⅰ 次の文章を読んで，以下の各問に答えよ。参考のために，文章の後に語句の意味が説明してある。 (30 点)

Emmy Noether is best known for her contributions to the development of the then-new field of abstract algebra, as well as ring theory. But one of the reasons Hilbert pushed to bring Noether to Göttingen was the hope that her expertise on invariant theory—numbers that remain constant even though manipulated in different ways—could be brought to bear on Albert （ア）'s new theory of general relativity, which seemed to violate conservation of energy.

Noether did not disappoint, devising a theorem that has become a fundamental tool of modern theoretical physics. One of its consequences is that if a physical system behaves the same regardless of its spatial orientation, the system's angular momentum is conserved.(1) （イ）'s theorem applies to any system with a continuous symmetry. When Einstein read Noether's work on invariants, he wrote to (ウ): "I'm impressed that such things can be understood in such a general way. The old guard at Göttingen should take some lessons from Miss Noether. She seems to know her stuff."

As World War I ended, the German Revolution of 1918-1919 resulted in improved rights for women, and the University of Göttingen relented a little in its stance on women faculty, eventually granting her an untenured professorship. Noether even received a small salary beginning in 1923. She never did achieve the rank of tenured professor, however, nor was she elected to the Göttingen academy of sciences, despite her academic accomplishments.(2)

Noether rarely followed lesson plans in her lectures, preferring spontaneous discussions with her students, and often became so passionately engrossed in the subject that her hair came loose. She showed unusual devotion to her job, once teaching class at a local coffee house when the building was closed for a holiday. Most of her students were male, dubbed the "Noether boys," although Noether mentioned her pleasure, upon meeting Czech mathematician Olga Taussky, that more women were pursuing studies in the field.(3)

（This Month in Physics History, APS News Vol.22, No.3 March 2013 より抜粋）

Emmy Noether - エミー ネーター（数学者）
Göttingen - ゲッチンゲン（ドイツの都市，文中ではゲッチンゲン大学の意味）

問1 下線部 (1) を和訳せよ。

問2 下線部（ア），（イ），（ウ）に入る人名をそれぞれ文中より抜き出せ。（下線部の後についている's は所有格を表す。）

問3　下線部 (2) を和訳せよ。

問4　下線部 (3) を和訳せよ。

II　次の文章を読んで，以下の各問に答えよ。参考のために，文章の後に語句の意味が説明してある。　(40 点)

Galileo’s bold stance in the seventeenth century *created* science in any modern sense of that word. And within decades, Isaac Newton’s discovery of a universal law of motion became the model for all（A）explanation. Newton’s physics led to a worldview that today shapes the thinking of each of us.

Galileo insisted that a scientific theory be accepted or rejected solely on the（B）of experimental test.（C）or not a theory fit one’s intuition must be irrelevant. This dictum defied the scientific outlook of the Renaissance, which was in fact that of ancient Greece. Let’s look at the problem Galileo faced in Renaissance Italy: the heritage of Greek science.

We owe the philosophers of ancient Greece credit for setting the scene for science by seeing Nature as explicable. When Aristotle’s writings were（D）in the thirteenth century, they were revered as the wisdom of a “Golden Age.”

Aristotle noted that everything that happens is essentially the motion of matter. Even, say, the sprouting of acorns to become oak trees. He therefore started by treating the motion of *simple* objects, where he could start with a small number of fundamental principles. This is indeed the way we do physics today. We search for fundamental principles. However, Aristotle’s method for *choosing* fundamental principles made progress（ア）. He assumed such principles could be intuitively perceived as self-evident truths.

Here are a few of them: A material object sought rest with respect to the cosmic center, which “clearly” was Earth. An object fell because of its desire for this cosmic center. A heavy object with its greater desire, would therefore, without doubt, fall faster than a light object. In the perfect heavens, on the other hand, celestial objects moved in that most perfect of figures, the circle. These circles would be on spheres centered on the cosmic center,（イ）.

Greek science had a fatal flaw: *It had no mechanism to compel consensus*. The Greeks saw experimental tests of scientific conclusions as no more relevant than experimental tests of political or aesthetic positions. Conflicting views could be argued indefinitely.(1)

The thinkers of the Golden Age launched the scientific endeavor. However, without a method to establish some agreement, progress was impossible. Though Aristotle established no consensus in his own day, in the late Middle Ages his views became the official dogma of the Church, mostly through the effort of Thomas Aquinas.

Aquinas fitted Aristotle's cosmology and physics with the Church's moral and spiritual doctrines to create a compelling synthesis. Earth, where things fell, was also the realm of morally "fallen" man. Heaven, where things moved in perfect（ウ）, was the realm of God and His angels. At the lowest point in the universe, at the center of Earth, was Hell. When, in the early Renaissance, Dante used this cosmological scheme in his *Divine Comedy*, it became a view that profoundly influenced Western thought.

<u>The position of the stars in the sky foretold the change of the seasons. What, then, was the significance of the five bright objects that wandered through the starry background? An "obvious" conclusion was the motion of these planets ("planet" means wanderer) foretold erratic human affairs. The planets therefore warranted serious attention. Astronomy's roots are in astrology.</u>(2)

（"Quantum Enigma," written by Bruce Rosenblum and Fred Kuttner より抜粋）

Aristotle - アリストテレス（古代ギリシャの哲学者）
Thomas Aquinas - トマス・アクィナス（中世イタリアの神学者）
Ptolemy - プトレマイオス（エジプトで活躍した古代ローマの学者）

問１　文章中の（A）～（D）に入る最も適切な単語を下記の選択肢から選べ。

（A） difficult, unbelievable, rational, subtle

（B） account, contrary, basis, majority

（C） Wherever, Whatever, Weather, Whether

（D） rediscovered, uncovered, created, developed

問２　文章中の（ア）～（ウ）のそれぞれに入れるのに最も適切な単語を，文章中から選び出して書け。

問３　下線部 (1) を和訳せよ。

問４　下線部 (2) を和訳せよ。

III　次の文章を英訳せよ。文章の後に挙げた単語を用いて良い。　(30 点)

問 1　エーテルの存在は，電磁気の法則がガリレイ座標変換に対し不変ではないことを示唆していた。

エーテル　-　ether

ガリレイ座標　-　Galilean coordinate

問 2　ハートリーの 1 電子描像では, 電子は局所ポテンシャルの中を運動するのに対し，ハートリー - フォック近似では，ポテンシャルは非局所的であったりエネルギーに依存したりする。原理的にはバンド理論はこれらの両方の場合を含んでいる。

ハートリー　-　Hartree

フォック　-　Fock

非局所的　-　non-local

問 3　太陽の熱は，月の潮汐力を例外として，大気と海洋の両方の運動の究極のエネルギー源である。

月の潮汐力　-　the lunar forcing of the tides

問 4　適切な境界条件と初期条件を伴った支配方程式の精度の良い解は，いかなる特定の問題についても，全ての必要な情報を明らかにする。

支配方程式　-　the governing equations