

2020 年度  
琉球大学大学院理工学研究科  
博士前期課程  
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題  
専門(物理)

2020 年 2 月 17 日(月)

注意事項

1. 全ての解答用紙(B4用紙)の受験番号欄に受験番号を記入すること.
2. 全ての解答用紙の□(左上)に大問番号(I, II, III, IV)を記入すること.
3. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること.
4. 解答用紙は片面のみを使用し, 縦置き横書きで解答すること.
5. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること.
6. 問題冊子は, 各自持ち帰ること.

Ⅰ 以下の各問に答えよ.

(100 点)

問1 いま, 図1のように,  $xy$  平面上の2つの定点  $C(x=a)$  と

$D(x=b)$  を結ぶ曲線の長さ  $s$  を考える.

(1) 図1のような, 曲線上の十分に小さい区間  $d\mathbf{r} = (dx, dy)$

の長さ  $dr$  は,

$$dr = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

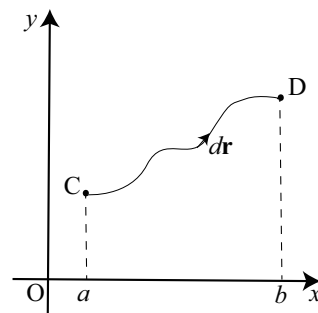


図 1

と書けることを説明せよ. ただし,  $y'$  は, 関数  $y$  の  $x$  についての一階微分を表す.

(2) (1) から, 距離  $s$  は,

$$s = \int_a^b dr = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \cdots (i)$$

と書ける. この距離  $s$  を極小化する変分法の問題は, 以下のオイラーの微分方程式に

帰着する.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}$$

ここで  $f(x, y, y')$  は式(i)の被積分関数  $\sqrt{1 + y'^2}$  である. このオイラーの微分方程式を解き, 定点  $C$  と  $D$  を結ぶ長さが極小になるのは, 定点間を直線で結ぶときであることを示せ.

問2 次に, 図2の, 天井の定点  $O$  に端を固定された長さ  $l$  の糸の

先につながる質点 (質量  $m$ ) による単振り子の運動を考える. 糸

はたるまずに運動するものとし, 鉛直線となす角を  $\theta$  とする. 糸

の質量は無視できるものとし, 重力加速度は  $g$  とする.

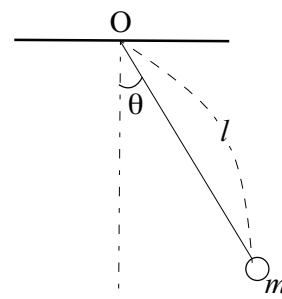


図 2

(1) 質点の運動エネルギー  $K$  を,  $\theta$  の時刻  $t$  に関する微分  $\dot{\theta}$  を使っ

て表せ.

- (2) 質点の最下点を基準として，位置エネルギー  $U$  を表せ．
- (3) ラグランジアン  $L(t, \theta, \dot{\theta})$  を表せ．さらに，オイラー・ラグランジュ方程式を計算し， $\theta$  の時刻  $t$  に関する二階微分  $\ddot{\theta}$  を， $\theta$  を使って表せ．
- (4) 角度  $\theta$  が十分に小さいとして，振動の周期  $T$  を求めよ．

**問3** 図3のように，3つの質点（いずれも質量  $m$ ）が天井から長さ  $l$  の軽い糸で吊るされ，互いに軽いバネ（いずれもバネ定数  $k$ ）でつながれた場合の微小振動を考える．質点が静止しているとき，バネはいずれも自然長にあり，運動中に糸はたるまないものとする．静止時からの各質点の変位を図3の

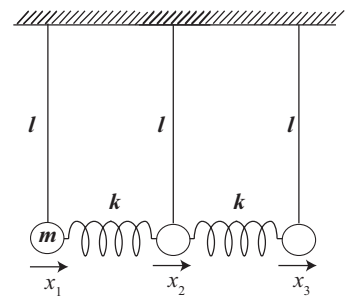


図 3

ように  $x_1, x_2, x_3$  とし，右向きを正の向きとする．重力加速度は  $g$  とする．

- (1) 左から1番目の質点（変位  $x_1$ ）は，バネから受ける復元力は（ ア ），質点を受ける重力の，糸に垂直な方向の成分は（ イ ）と書けるので，変位  $x_1$  に関する運動方程式は，

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = ( \text{ア} ) + ( \text{イ} )$$

と書ける．（ ア ）および（ イ ）にあてはまる式を， $l, m, g, k, x_1, x_2, x_3$  のうち必要なものを用いて表せ．

- (2) (1)と同様に， $x_2$  および  $x_3$  に関する運動方程式を表せ．この微小振動におけるモードを求めるため， $x_1 = A_1 \cos \omega t, x_2 = A_2 \cos \omega t, x_3 = A_3 \cos \omega t$ （ $\omega$  は，固有振動数）のように  $x_1$  から  $x_3$  の形を仮定し，モードの固有振動数を求めよ．また，それぞれの固有振動数に対応するモードの形についても簡潔に説明せよ．

## II

以下の各問に答えよ。

(100 点)

問1 図1のように、高さが $h$ で半径がそれぞれ $a$ と $b$ の同軸円筒電極AとBがあり、その間が誘電率 $\varepsilon$ の絶縁油で満たされている。電極の厚さは無視でき、高さ $h$ は半径 $a$ と $b$ に比べ十分に長いものとする。

(1) この円筒コンデンサーの電気容量 $C_h$ が、

$$C_h = \frac{2\pi\varepsilon h}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

で与えられることを示せ。

(2) 電極AとBの間隔 $d(=b-a)$ が $a$ に比べて非常に小さいときの電気容量 $C_d$ を求めよ。

問2 次に、円筒電極AとBの間を電気伝導度 $\sigma$ (電気抵抗率 $\rho=1/\sigma$ )の電解質溶液で満たした。

(1) 電極AとBの間を流れる電流を $I$ とする。円筒電極の中心軸からの距離 $r$ の位置における電流密度 $J_r$ を求めよ。ただし、 $a \leq r \leq b$ である。

(2) オームの法則 $J_r = \sigma E_r$ から、電極AとBの間の電気抵抗 $R$ を求めよ。ただし、 $E_r$ は中心軸からの距離 $r$ の位置での電場の大きさである。

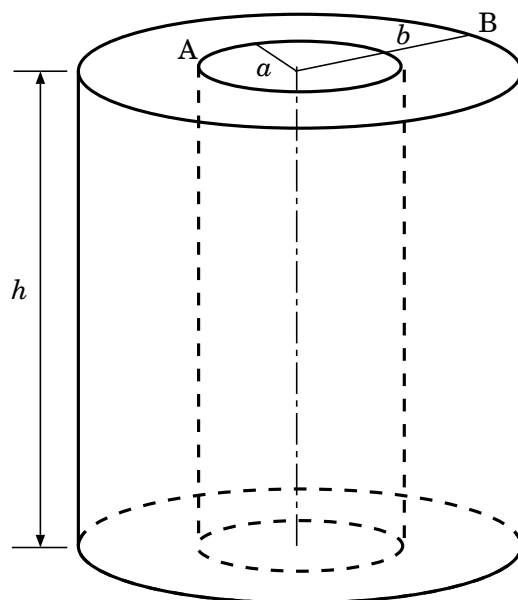


図1: 同軸円筒電極。

問3 実際の電解質溶液の電気抵抗測定には，電解質溶液の電気分解の影響を避けるため交流電源を用いる．電極間に電圧  $V$  を加えると分極電圧  $V_p$  が生じ，

$$V - V_p = RI$$

が成り立つ．ここで，誘導起電力は無視できるとした． $V_p$  は

$$V_p = \frac{1}{C} \int I dt$$

とかけるので，測定回路は電気容量  $C$  のコンデンサーと抵抗が直列に接続されている図 2 の回路と等価である．

- (1)  $V(t) = V_0 \cos \omega t$  として， $I$  に関する微分方程式をかけ．
- (2) (1) の微分方程式を  $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$  とおいて解くと， $I_0$  と  $\varphi$  がそれぞれ以下で与えられることを示せ．

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}},$$
$$\varphi = \tan^{-1} \frac{1/C\omega}{R}.$$

- (3) (2) の結果から，電解質溶液の抵抗  $R$  を  $I_0$  と  $V_0$  から正確に求めるためには電源電圧  $V$  の振動数がどのような条件を満たせばよいか説明せよ．

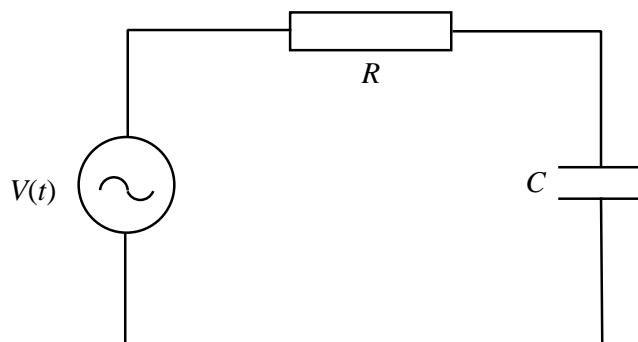


図 2: 等価交流回路．

III 以下の各問に答えよ.

(100 点)

質量  $m$  の粒子が調和振動子ポテンシャル  $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$  のもとで  $x$  軸上を運動している. この粒子に対するシュレーディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \varphi(x) = E \varphi(x)$$

と表される. 必要に応じて積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-Ax^2} dx = \frac{1}{2A} \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

を用いてよい.

問 1 波動関数

$$\varphi_0(x) = C_0 e^{-\alpha x^2} \quad (C_0, \alpha \text{ は正の定数})$$

について, 規格化条件から,  $C_0$  と  $\alpha$  の関係を求めよ.

問 2  $\varphi_0(x)$  がシュレーディンガー方程式の解となるように定数  $\alpha$  を定めると,

$$\alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

となることを示せ. また,  $\varphi_0(x)$  に対応するエネルギー固有値  $E_0$  を求めよ.

問 3 状態  $\varphi_0$  における物理量  $A$  の期待値を  $\langle A \rangle$  と表すことにする. 位置の不確定さ  $\Delta x$  および運動量の不確定さ  $\Delta p$  をそれぞれ

$$\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}, \quad \Delta p = \sqrt{\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle}$$

で定義すると,

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

が成り立つことを示せ.

問 4 波動関数

$$\varphi_1(x) = C_1 x \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) \quad (C_1 \text{ は定数})$$

に対応するエネルギー固有値  $E_1$  を求めよ.

問 5 状態  $\varphi_1(x)$  に対して, 粒子の存在確率が最大になる位置を求めよ.

問 6 波動関数  $\varphi_0(x)$  は偶関数,  $\varphi_1(x)$  は奇関数である. 一般に, 1次元調和振動子のすべての固有関数は, 偶関数または奇関数のいずれかであることを示せ. ただし, 1次元調和振動子のエネルギー固有状態には縮退がないことを既知としてよい.

次に， $xy$  平面内の 2 次元の調和振動子を考える．粒子の波動関数を  $\psi(x, y)$  とすると，シュレーディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \psi(x, y) = E \psi(x, y)$$

と表される．

問 7 1 次元調和振動子のエネルギー固有状態を  $\varphi_k(x)$ ，対応するエネルギー固有値を  $E_k$  とおく．このとき，

$$\psi(x, y) = \varphi_k(x) \varphi_l(y)$$

が 2 次元調和振動子のエネルギー固有状態であり，エネルギー固有値が  $E_k + E_l$  であることを示せ．

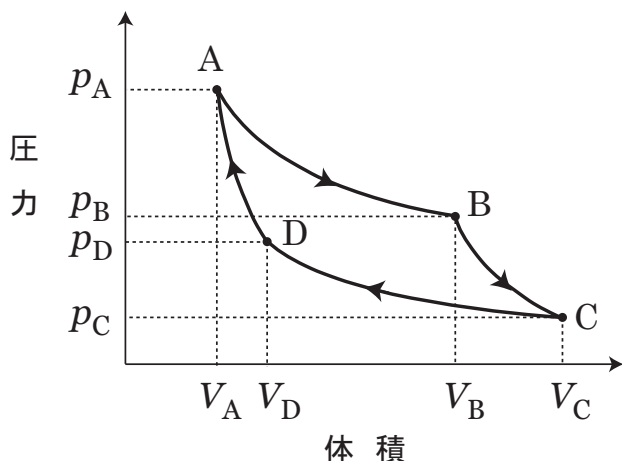
問 8 この 2 次元調和振動子の第 1 励起状態の縮退度を求めよ．ただし，1 次元調和振動子のエネルギー固有状態には縮退がないこと，および 2 次元調和振動子の独立なエネルギー固有状態は前問の  $\psi(x, y)$  の形に限られることを既知としてよい．

## IV

以下の各問に答えよ.

(100 点)

- 問 1** 熱機関として下図のような圧力  $p$  と 体積  $V$  を軸とする概略図で表示されるカルノーサイクルを考える. つまり, 物質質量  $N$  の理想気体が図のような道筋  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  を 1 サイクルとする準静的な変化をする.  $A \rightarrow B$  は温度  $T_H$  の環境での膨張の操作,  $B \rightarrow C$  は断熱膨張の操作,  $C \rightarrow D$  は温度  $T_L$  の環境での圧縮の操作,  $D \rightarrow A$  は断熱圧縮の操作である. ただし,  $0 < T_L < T_H$  であり, 気体定数を  $R$  とする.



- (1)  $A \rightarrow B$  の等温操作において, 気体が外部に行なう仕事は

$$W_{AB} = NRT_H \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right) \quad (1.1)$$

であることを示せ.

- (2) 断熱操作におけるポアソンの関係式  $T^c V = \text{定数}$  を用いて,

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{V_A}{V_B} \quad (1.2)$$

の関係があることを示せ. ここで,  $c$  は定数である.

- (3)  $A \rightarrow B$  の操作において気体が吸収した熱量を  $Q_{AB}$ ,  $C \rightarrow D$  の操作において気体から放出された熱量を  $-Q_{CD}$  とすると,

$$\frac{-Q_{CD}}{Q_{AB}} = \frac{T_L}{T_H} \quad (1.3)$$

が成り立つことを示せ. ただし, 式 (1.1) と (1.2) を用いてよい.

- (4) カルノーサイクルの 1 サイクルで気体が外部に行なう全仕事  $W_{\text{cyc}}$  を求めよ. ただし, 式 (1.1) を用いてよい.

- (5) カルノーサイクルの効率  $\epsilon$  を求めよ.



**問2** 質量  $m$ , 角振動数  $\omega$  の  $N$  個の独立な 1 次元調和振動子からなる古典系を考える. そのハミルトニアンは

$$H = \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \right)$$

と表される. ただし,  $p_i$  と  $q_i$  はそれぞれ  $i$  番目の調和振動子の運動量の大きさと位置を表す. この系を「ミクロカノニカルアンサンブル」と「カノニカルアンサンブル」の二つの方法で解析したい. ただし, ボルツマン定数を  $k_B$ ,  $\hbar = h/(2\pi)$  ( $h$  はプランク定数) とする.

- (1) ミクロカノニカルアンサンブルの方法では, この系のエネルギー  $E$  におけるエントロピー  $S$  は,  $N$  が十分大きいとき,

$$S = N k_B \left( \ln \left( \frac{E}{\hbar \omega N} \right) + 1 \right) \quad (2.1)$$

であることを示せ. ただし,  $2N$  次元空間内の半径  $R$  の球の体積が  $\pi^N R^{2N}/N!$  になることやスターリングの公式

$$\ln N! = N \ln N - N$$

を用いてよい.

- (2) この系の内部エネルギーは

$$E = N k_B T \quad (2.2)$$

であることを, 式 (2.1) を用いて示せ.

- (3) カノニカルアンサンブルの方法では, 温度  $T$  の熱平衡状態におけるこの系の分配関数は

$$Z(T, N) = \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^N \quad (2.3)$$

であることを示せ. ただし, ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-Ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

を用いてよい.

- (4) 温度  $T$  の熱平衡状態におけるこの系のエントロピーは,

$$S = N k_B \left( \ln \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega} \right) + 1 \right)$$

であることを, 式 (2.3) を用いて示せ.

- (5) この系の内部エネルギーは

$$U = N k_B T \quad (2.4)$$

であることを, カノニカルアンサンブルの方法で示せ.

- (6) 二つの方法で得られた内部エネルギーの式 (2.2) と (2.4) は当然同じである. この系の定積熱容量を求めよ.

2020 年度  
琉球大学大学院理工学研究科  
博士前期課程  
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題  
英語

2020 年 2 月 17 日(月)

注意事項

1. 全ての解答用紙(B4用紙)の受験番号欄に受験番号を記入すること.
2. 解答用紙は片面のみを使用し, 縦置き横書きで解答すること.
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること.
4. 問題冊子は, 各自持ち帰ること.

## I

次の文章を読んで、以下の各問に答えよ。

(30 点)

A cyclotron can accelerate charged particles to very high speeds. Both electric and magnetic forces have a key role. The energetic particles produced are used to bombard atomic nuclei and thereby produce nuclear reactions of interest to researchers. A number of hospitals use cyclotron facilities to produce radioactive substances for diagnosis and treatment.

A schematic drawing of a cyclotron is shown in Fig. 1-1. The charges move inside two semicircular containers  $D_1$  and  $D_2$ , referred to as *dees*. A high-frequency alternating potential difference is applied to the dees, and a uniform magnetic field is directed perpendicular to them. A positive ion released at P near the center of the magnet in one dee moves in a semicircular path (indicated by the dashed line in the drawing) and arrives back at the gap in a time  $T/2$ , where  $T$  is the time needed to make one complete trip around the two dees. The frequency of the applied potential difference is adjusted so that the polarity of the dees is reversed in the same time it takes the ion to travel around one dee. If the applied potential difference is adjusted such that  $D_2$  is at a lower electric potential than  $D_1$  by an amount  $\Delta V$ , the ion accelerates across the gap to  $D_2$  and its kinetic energy increases by an amount  $q\Delta V$ . It then moves around  $D_2$  in a semicircular path of greater radius (because its speed has increased). After a time  $T/2$ , it again arrives at the gap between the dees. By this time, the polarity across the dees is again reversed, and the ion is given another “kick” across the gap. The motion continues so that for each half-circle trip around one dee, the ion gains additional kinetic energy equal to  $q\Delta V$ . When the radius of its path is nearly that of the dees, the energetic ion leaves the system through the exit slit. It is important to note that (A) the operation of the cyclotron is based on the fact that  $T$  is independent of the speed of the ion and of the radius of the circular path.

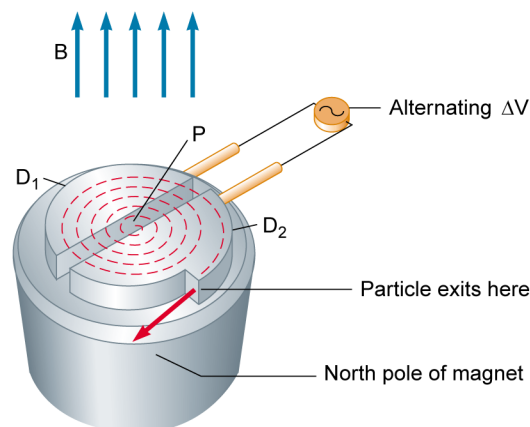


Figure 1-1: A cyclotron consists of an ion source at P, two dees  $D_1$  and  $D_2$  across which an alternating potential difference is applied, and a uniform magnetic field. (The south pole of the magnet is not shown.) The dashed curved lines represent the path of the particles.

We can obtain an expression for the kinetic energy of the ion when it exits the cyclotron in terms of the radius  $R$  of the dees. We know that the speeds of charged particles  $v = qBR/m$ . Hence, the kinetic energy is

$K =$

(ア)

(B) When the energy of the ions in a cyclotron exceeds about 20 MeV, relativistic effects come into play. We observe that  $T$  increases and that the moving ions do not remain in phase with the applied potential difference. Some accelerators overcome this problem by modifying the period of the applied potential difference so that it remains in phase with the moving ions.

(D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fundamental of Physics* より一部改変して引用)

- 問1  $D_1$  と  $D_2$  と表されている “dees” とは何か？本文中から 2 つまたは 3 つの単語を抜き出して示せ.
- 問2 下線部 (A) を和訳せよ.
- 問3 四角 (ア)の中に入る数式を示せ.
- 問4 下線部 (B) を日本語で要約せよ.

## II 次の文章を読んで、以下の各問に答えよ。

(40 点)

In the examples of induction effects that we have studied, the induced currents have been confined to well-defined paths in conductors and other components forming a circuit. However, many pieces of electrical equipment contain masses of metal moving in magnetic fields or located in changing magnetic fields. In situations like these we can have induced currents that circulate throughout the volume of a material. Because their flow patterns resemble swirling eddies in a river, we call these eddy currents.

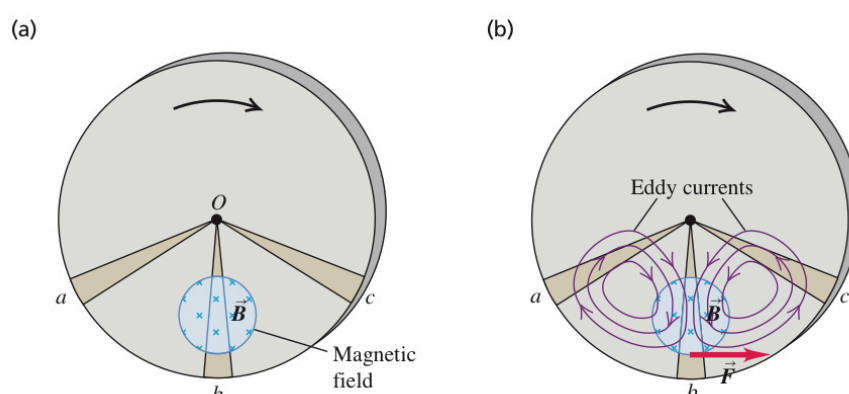


Figure 2-1: Eddy currents induced in a rotating metal disk. (a) Metal disk rotating through a magnetic field. (b) Resulting eddy currents and braking force.

As an example, consider a metallic disk rotating in a magnetic field perpendicular to the plane of the disk but confined to a limited portion of the disk's area, as shown in Fig. 2-1. (c) Sector Ob is moving across the field and has an electromotive force (emf) induced in it. Sectors Oa and Oc are not in the field, but they provide return conducting paths for charges displaced along Ob to return from b to O. The result is a circulation of eddy currents in the disk, somewhat as sketched in Fig. 2-1(b). We can use レンツの法則 Lenz's law to decide on the direction of the induced current in the neighborhood of sector Ob. This current must experience a magnetic force  $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ , where the vector  $\vec{L}$  is in the direction of the current  $I$  and has magnitude  $L$ , that opposes the rotation of the disk, and so this force must be to the right in Fig. 2-1(b). Since  $\vec{B}$  is directed into the plane of the disk, the current and hence  $\vec{L}$  have downward components. The return currents lie outside the field, so they do not experience magnetic forces. The interaction between the eddy currents and the field causes a braking action on the disk. Such effects can be used to stop the rotation of a circular saw quickly when the power is turned off. Eddy current braking is used on some electrically powered rapid-transit vehicles. Electromagnets mounted in the cars induce eddy currents in the rails; the resulting magnetic fields cause braking forces on the electromagnets and thus on the cars.

Eddy currents have many other practical uses. In induction furnaces, eddy currents are used to heat materials in completely sealed containers for processes in which it is essential to avoid the slightest contamination of the materials. The metal detectors used at airport security checkpoints (Fig. 2-2(a)) operate by detecting eddy currents induced in metallic objects. Similar devices (Fig. 2-2(b)) are used to find buried treasure such as bottlecaps and lost pennies. Eddy currents also have undesirable effects. In an alternating-current transformer, coils wrapped around an iron core carry a sinusoidally varying current. (D) The resulting eddy currents in the core waste energy through  $I^2R$  heating and set up an unwanted opposing emf in the coils. To minimize these effects, the core is designed so that the paths for eddy currents are as narrow as possible.

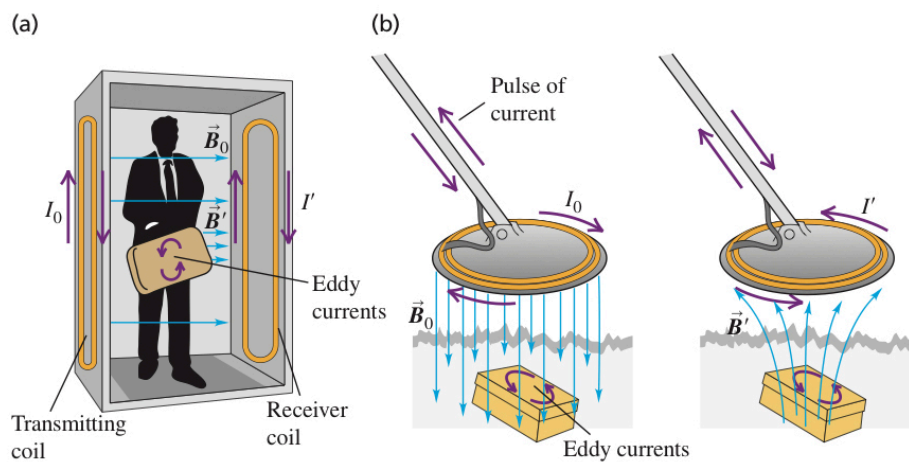


Figure 2-2: (a) A metal detector at an airport security checkpoint generates an alternating magnetic field  $\vec{B}_0$ . This induced eddy currents in a conducting object carried through the detector. The eddy currents in turn produce an alternating magnetic field  $\vec{B}'$ , which induces a current in the detector's receiver coil. (b) Portable metal detectors work on the same principle.

#### TEST:

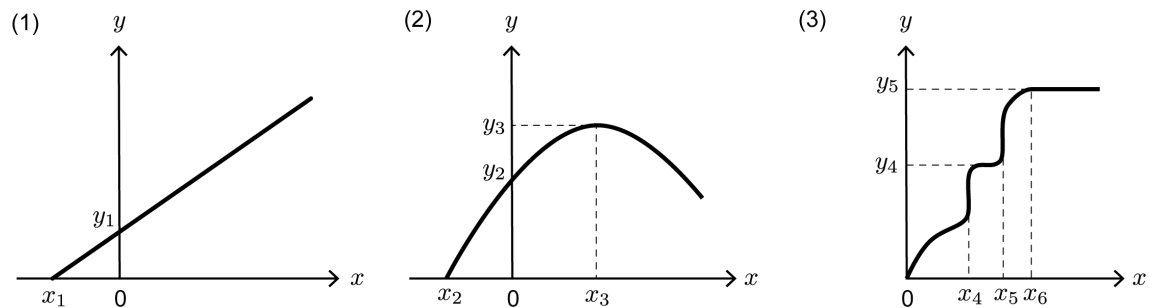
Suppose that the magnetic field in Fig. 2-1 were directed out of the plane of the figure and the disk were rotating counterclockwise. Compared to the directions of the force  $\vec{F}$  and the eddy currents shown in Fig. 2-1(b), what would the new directions be? (i) The force  $\vec{F}$  and the eddy currents would both be in the same direction; (ii) the force  $\vec{F}$  would be in the same direction, but the eddy currents would be in the opposite direction; (iii) the force  $\vec{F}$  would be in the opposite direction, but the eddy currents would be in the same direction; (iv) the force  $\vec{F}$  and the eddy currents would be in the opposite directions.

(H. D. Young, R. A. Freedman, *University Physics with Modern Physics* より一部改変して引用)

- 問1 “Eddy current” とは何かを解説せよ.  
 問2 下線部 (C) を日本語で要約せよ.  
 問3 下線部 (D) を和訳せよ.  
 問4 金属探知機の動作原理を解説せよ.  
 問5 文末の TEST について, 選択肢(i) ~ (iv) の中から1つを選択し, 理由を付して答えよ.

### III

次の (1)~(3) の3つのグラフ全体または一部を説明する英文を示せ. そのうちの一つを任意のグラフで置き換えてもよい. その場合は, 解答用紙にグラフを描き, そのグラフを英文で説明せよ. また, 四角枠内のグラフの様子を表す語群中の単語を使ってもよい. (30点)



線形の : linear, 比例する : proportional, 放物線 : parabola,

曲線 : curve, 頂点 : peak, キンク・折れ曲がり : kink, カスプ・折れ曲がり : cusp,  
 肩の : shoulder, 階段の : step, 台地・安定・プラトー : plateau, 安定する : stabilize,  
 飽和 : saturation, 上凸の : convex, 逆の : inverse,

切片 : intercept, 傾き : slope, 交点 : intersection, 極大 : maximum, 極小 : minimum,

徐々に : gradually, わずかに : slightly, 急激に : suddenly, 鋭く・急に : sharply,  
 著しく・劇的に : dramatically, 急角度で・激しく : steeply, 幅広い : broad