

2021 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門（物理）

2020 年 8 月 26 日(水)

注意事項

1. 全ての解答用紙（B4 用紙）の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 全ての解答用紙の口（左上）に大問番号（Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ）を記入すること。
3. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
5. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
6. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I

振り子の運動について、以下の各問に答えよ。

(100 点)

問 1 図 1 のような質量の無視できる長さ l の糸に半径 a 、質量 M の一様な球をつけた剛体振り子を考える。糸はたわまず、剛体の重心 G は常に糸の延長線上にあるものとする。水平方向に x 軸をとり、鉛直下方に y 軸をとる。また、鉛直線と糸のなす角を θ とし、重力加速度を g とする。

- (1) 運動エネルギー K と位置エネルギー U を求めよ。ここで、振り子の固定軸（原点 O ）まわりの慣性モーメントを I_1 として計算せよ。
- (2) Lagrange の方法を用いて振り子の運動方程式を求めよ。
- (3) 力学的エネルギーが保存することを示せ。
- (4) 振れ角 θ が小さい ($\theta \ll 1$) として、振り子の周期 T を求めよ。
- (5) 慣性モーメントが $I_1 = M(l+a)^2 + \frac{2}{5}Ma^2$ で表されることを示せ。

問 2 剛体の重心 G が常に糸の延長線上にあるとは限らない。図 2 のような、より一般化した振り子の運動を考える。糸の張力を S とし、鉛直線と PG のなす角を ϕ をする。その他の条件は前問と同様とする。

- (1) 重心の座標を (x_G, y_G) とする。重心の運動方程式を求めよ。
- (2) 重心まわりの回転の運動方程式を求めよ。
- (3) x_G と y_G を l, θ, ϕ を用いて表せ。
- (4) 振れ角 θ, ϕ は小さい ($\theta, \phi \ll 1$) とする。また、

$$\theta = A \cos \omega t, \quad \phi = B \cos \omega t$$

と仮定すると、周期 T に関する方程式

$$C \left(\frac{T}{2\pi} \right)^4 + D \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 + 1 = 0$$

が得られる。 C と D を求めよ。

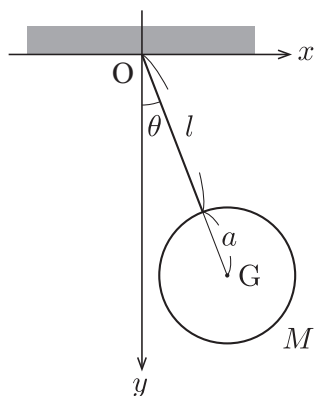


図 1

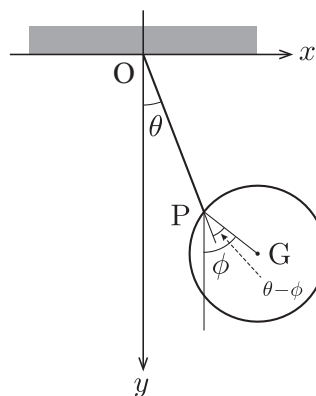


図 2

II

以下の各問に答えよ。

(100 点)

問1 図1に示すように、真空中の原点 O に $-Q$ の電荷を持つ点電荷があり、点電荷からの距離を r として、 $\Gamma_1(a < r < 3a)$ と $\Gamma_2(4a < r < 5a)$ の2つの球殻が存在している。 Γ_1 では $2Q$ の電荷が一様に分布しているが、 Γ_2 の球殻は導体であり全体で Q の電荷がある。ただし、真空の誘電率を ε_0 とする。

- (1) Γ_1 の球殻内で電場がゼロになる距離 r を求めよ。
- (2) Γ_2 の球殻内では電場の影響を受け、電荷の移動が生じる。 Γ_2 の球殻の内側に存在する電荷を Q_1 、外側に存在する電荷 Q_2 としたとき、 Q_1 と Q_2 をそれぞれ求めよ。
- (3) $r > 3a$ の各領域における電場 $E(r)$ を求めよ。

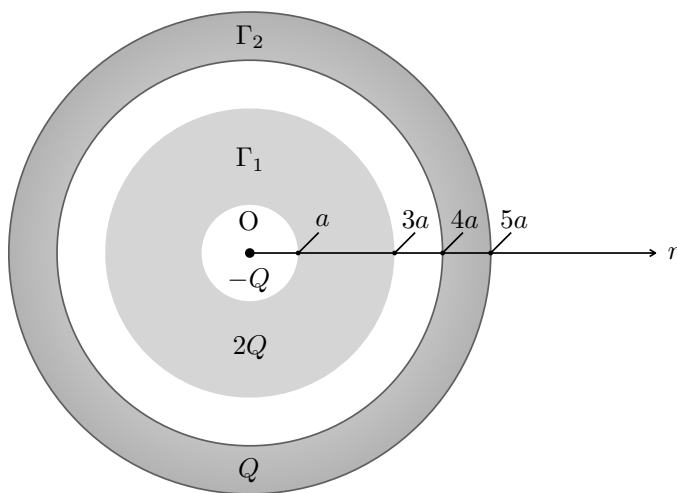


図1

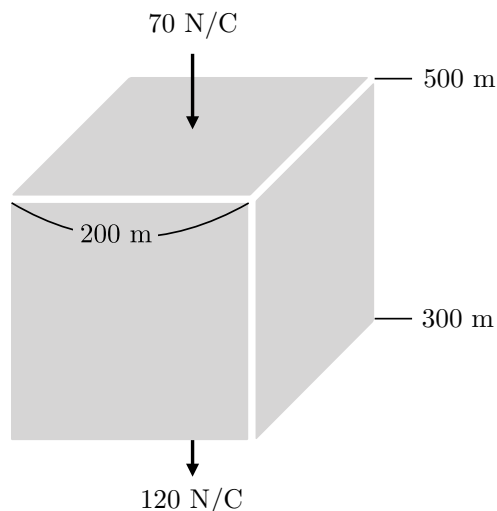


図2

問2 大気中で電場を測定したところ、電場の向きは鉛直下向きで、大きさは高度 500 m で 70 N/C、高度 300 m で 120 N/C であった。図2に示すように、下面の高度が 300 m、上面の高度が 500 m であるような 1 辺 200 m の立方体の中にある電荷の量を求めよ。ただし、大気の比誘電率を 1 とし、真空の誘電率は $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$ とする。

問3 図3に示すように、真空中の xy 平面上に原点 O を中心とした半径 a の円形コイルがあり、電流 I が流れている。ただし、 xy 平面の法線方向に z 軸をとり、真空の透磁率は μ_0 とする。また、円形コイルの導線の太さは無視する。

- (1) コイルに流れる電流 I が原点 O に作り出す磁気モーメントの向きと大きさを求めよ。
- (2) 一般的に磁気モーメント $\mathbf{m}$ から $\mathbf{r}$ だけ離れた位置における磁位 ϕ_m は、十分遠方では $\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} / (4\pi r^3)$ と表すことができる。これを参考にし、 y 軸上の原点からの距離 l の位置 ($l \gg a$) に電流 I が作り出す磁束密度 $\mathbf{B}$ の向きを求め、その大きさを I, a, μ_0, l を用いて表せ。

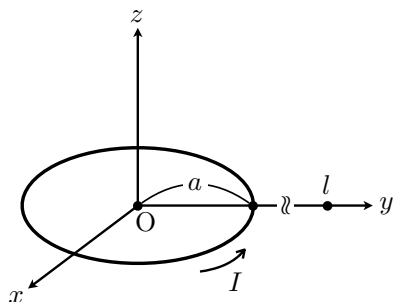


図3

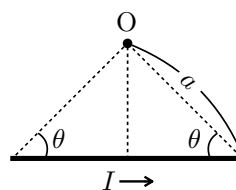


図4

問4 図4に示すように、導線に流れている電流 I が原点 O に作り出す磁束密度 $\mathbf{B}$ について考える。導線は透磁率 μ_0 の真空中に設置されており、導線の太さは無視する。

- (1) 電流 I が原点 O に作り出す磁束密度の大きさ B が $\frac{\mu_0 I}{2\pi a \tan \theta}$ になることを示せ。
- (2) この導線を4つ組み合わせた正方形導線回路を作る。この正方形の中心を原点として、電流 I が原点 O に作り出す磁束密度の大きさ B を I, a, μ_0 を用いて表せ。
- (3) この導線を n 個組み合わせた正 n 角形導線回路を作る。この正 n 角形の中心を原点として、電流 I が原点 O に作り出す磁束密度の大きさ B を n, I, a, μ_0 を用いて表せ。

III 以下の各問に答えよ.

(100 点)

問1 1次元空間の領域 $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$ に閉じ込められた粒子の量子状態が, 以下の波動関数で与えられるとする.

$$\psi(x) = A \cos(kx) e^{iqx}.$$

A, k, q を正の実定数とし, 境界条件を $\psi(-\frac{L}{2}) = \psi(\frac{L}{2}) = 0$ とする.

- (1) k の最小値を求めよ.
- (2) 波動関数の規格化条件により A を求めよ.
- (3) 運動量 $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ の期待値を求めよ.

問2 波動関数 ψ に対する時間 t に依存したシュレディンガー方程式を

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = H \psi(\vec{r}, t)$$

とし, 3次元空間における質量 m の粒子のハミルトニアン

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r})$$

を考える. ここで, $V(\vec{r})$ はポテンシャルであり, 時間によらないとする. このとき, 波動関数は, $t = 0$ の波動関数を用いて $\psi(\vec{r}, t) = e^{-iHt/\hbar} \psi(\vec{r}, 0)$ と表すことができる. また, 時間によらない演算子 A に対して, ハイゼンベルグ形式の演算子を $A_H = e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar}$ と定義する.

- (1) $e^{-iHt/\hbar}$ がユニタリ演算子であることを示せ.
- (2) 座標 $\vec{r}$ および運動量 $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ に対して, 以下の関係が成り立つことを示せ.

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_H = \frac{1}{m} \vec{p}_H.$$

- (3) $V(\vec{r})$ が座標原点に対する中心力ポテンシャル, すなわち原点からの距離 $r = |\vec{r}|$ のみの関数 $V_0(r) = V(\vec{r})$ として表せるとする. 任意の初期状態 $\psi(\vec{r}, 0)$ に対して, 角運動量保存則

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{r} \times \vec{p} \rangle = 0$$

が成り立つことを示せ. ただし, 演算子 A に対して, $\langle A \rangle$ を波動関数 $\psi(\vec{r}, t)$ による期待値とする.

問3 $L = 1$ の角運動量に関して、規格化された波動関数 $\Psi_{L,M}$ (ただし $M = -1, 0, 1$) , および、それらに作用する角運動量演算子 ($\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$) を導入する. 波動関数は以下の固有値方程式を満たし,

$$(\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2)\Psi_{L,M} = L(L+1)\hbar^2\Psi_{L,M}, \quad \hat{L}_z\Psi_{L,M} = M\hbar\Psi_{L,M},$$

演算子の各成分には以下の交換関係が成り立つ.

$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y, \quad [\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z.$$

また、波動関数による演算子 $\hat{X}$ の行列要素を $\langle\Psi_{L,M}|\hat{X}|\Psi_{L,M'}\rangle$ と表し、それらを用いて、演算子 $\hat{X}$ を 3×3 行列で表すことを $\hat{X}$ の行列表示と呼ぶことにする.

$$\hat{X} \rightarrow \begin{pmatrix} \langle\Psi_{1,1}|\hat{X}|\Psi_{1,1}\rangle & \langle\Psi_{1,1}|\hat{X}|\Psi_{1,0}\rangle & \langle\Psi_{1,1}|\hat{X}|\Psi_{1,-1}\rangle \\ \langle\Psi_{1,0}|\hat{X}|\Psi_{1,1}\rangle & \langle\Psi_{1,0}|\hat{X}|\Psi_{1,0}\rangle & \langle\Psi_{1,0}|\hat{X}|\Psi_{1,-1}\rangle \\ \langle\Psi_{1,-1}|\hat{X}|\Psi_{1,1}\rangle & \langle\Psi_{1,-1}|\hat{X}|\Psi_{1,0}\rangle & \langle\Psi_{1,-1}|\hat{X}|\Psi_{1,-1}\rangle \end{pmatrix}.$$

(1) $\hat{L}_z$ の行列表示を求めよ.

(2) $\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ と置く. $\hat{L}_+$ に対して

$$\hat{L}_z\hat{L}_+\Psi_{L,M} = (M+1)\hbar\hat{L}_+\Psi_{L,M}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 前問 (2) は C_+ を定数として, $\hat{L}_+\Psi_{L,M} = C_+\hbar\Psi_{L,M+1}$ が成り立つことを表している. このとき以下の等式を証明せよ.

$$|C_+| = \sqrt{L(L+1) - M(M+1)}.$$

C_+ には位相の任意性があるが、以下では正の実数すなわち $C_+ = |C_+|$ を仮定する.

(4) $\hat{L}_y$ の行列表示を求めよ. ただし、前問 (3) の結果とともに以下の関係を用いてよい.

$$\hat{L}_-\Psi_{L,M} = \sqrt{L(L+1) - M(M-1)}\hbar\Psi_{L,M-1}.$$

磁場中において、角運動量 $L = 1$ をもつ粒子のハミルトニアンが、以下の行列表示で与えられたとする.

$$\hat{H} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ -b & 0 & -b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

ここで a, b は正の実定数である. なお、 b は x 軸方向の磁場の強さを表す変数である.

(5) この粒子のエネルギー準位を求めよ.

(6) $a = 0$ での基底状態において、期待値 $\langle\hat{L}_x\rangle$ を求めよ.

IV

以下の各問に答えよ．ただし，導出過程を明確に示すこと．

(100 点)

問1 熱平衡状態で，独立変数として圧力 p ，体積 V ，温度 T ，エントロピー S のうちの任意の2個を選択できる閉じた体系がある．その内部エネルギーを U ，ヘルムホルツの自由エネルギーを $F = U - TS$ ，ギブスの自由エネルギーを $G = F + pV$ ，エンタルピーを $H = U + pV$ とする．また，熱量 $d'Q$ を与える場合は準静的に行われるものとする．

- (1) 内部エネルギーとヘルムホルツの自由エネルギーとの関係式（ギブス・ヘルムホルツの方程式）

$$U = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$$

と

$$U = -T^2 \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right) \right]_V$$

が成り立つことを示せ．

- (2) 定積熱容量 $C_V = (d'Q/dT)_V$ と定圧熱容量 $C_p = (d'Q/dT)_p$ が，それぞれ

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$$

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p$$

と表せることを示せ．

- (3) ギブスの自由エネルギーを用いてマクスウェルの関係式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

が成り立つことを示せ．

- (4) 定圧熱容量と定積熱容量の差が

$$C_p - C_V = T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

と表せることを示せ．

- 問2 N 個の同種の原子で構成されている固体があるとする．固体中の原子はそれぞれの格子点のまわりで振動しており，すべての原子が互いに独立に，等しい角振動数 ω の調和振動をしていると仮定する．以下では，ボルツマン定数を k_B ，温度を T ，プランク定数を h とし， $\beta = 1/(k_B T)$ ， $\hbar = h/(2\pi)$ とする．また，必要ならば無限等比級数の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \quad (|r| < 1, \quad a: \text{定数})$$

を用いてよい．

- (1) 1 個の 1 次元調和振動子の固有エネルギーは

$$\epsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

で与えられるものとする．許されるすべてのエネルギーについて和をとることにより，1 個の 1 次元調和振動子の分配関数 Z_1 を求めよ．

- (2) 3 次元系で N 個の原子によって構成された調和振動子は， $3N$ 個の 1 次元調和振動子の集まりと考えることができるので，分配関数は $Z = (Z_1)^{3N}$ で与えられる．

エネルギーの表式が

$$E = 3N\hbar\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right)$$

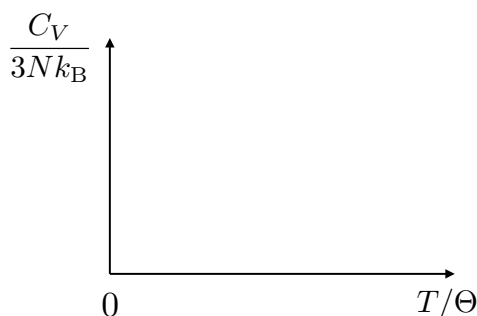
で与えられることを示せ．

- (3) 定積熱容量が

$$C_V = 3Nk_B \left(\frac{\Theta}{T} \right)^2 \frac{e^{\Theta/T}}{(e^{\Theta/T} - 1)^2}$$

で与えられることを示せ．ただし， $\Theta \equiv \hbar\omega/k_B$ である．

- (4) 高温 ($\Theta/T \ll 1$) の場合の定積熱容量の振る舞いを調べる．(3) で与えた C_V の式を展開し， $(\Theta/T)^2$ のオーダーの項まで求めよ．
- (5) 低温 ($\Theta/T \gg 1$) の場合の定積熱容量の振る舞いを調べる．(3) で与えた C_V の式を用いて最低次のみ求めよ．
- (6) (4)(5) で調べた高温と低温の振る舞いを考慮に入れ，横軸を T/Θ ，縦軸を $C_V/(3Nk_B)$ とした図（下図参照）に，(3) で与えた式を描きなさい．ただし，図は解答用紙に描き，必要に応じて目盛を書き入れること．



2021 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2020 年 8 月 26 日(水)

注意事項

1. 全ての解答用紙（B4 用紙）の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみを使用し、縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は、各自持ち帰ること。

[1] 次の英文を読んで、各問に答えよ。なお、参考のために、左肩番号を付した単語の意味が文章の最後に説明してある。

Manufacturing Masks with a Cotton-Candy Machine
(綿あめ製造機でマスクの製造)

A) With ¹⁾ COVID-19 causing a shortage of essential protective material like face masks Professor Mahesh Bandi, who runs the Nonlinear and Non-equilibrium Physics Unit, has found a way to manufacture masks, inspired by the principle of ²⁾ N95 ones, using a process developed ³⁾ in-house at ⁴⁾ OIST.

B) “Neither the homemade cloth masks nor most commercial masks can filter the COVID-19 ⁵⁾ virion,” said Professor Bandi. “The N95 mask is the only available design capable of stopping the virion because it contains an ⁶⁾ electro-charged layer.” Although the technique used to manufacture these masks is hard to replicate with everyday material, Professor Bandi stressed that it’s not impossible. “A simple way to generate the necessary ⁷⁾ fabric is to use C) a slightly modified cotton candy machine,” said Professor Bandi.

D) A cotton candy machine is made up of a drum that sits on a fast-spinning container. The container has small holes in it which, in traditional situations, the ⁸⁾ caramelized sugar flows through before it turns into cotton candy. Professor Bandi modified the machine by setting up a 12-24 volt-age DC electric field using a regular car battery.

Instead of sugar, Professor Bandi poured a powdered polypropylene polymer into the drum. This polymer could be created from any polypropylene plastic bottle. When the machine began to spin, it processed the polymer to generate a fabric comprising of electro-charged nanofibers.

From there, making the mask was relatively straightforward. Two batches of the fabric at a zero-electric field were produced for every three batches of the fabric at an electric field of 12-24 voltage using a car battery. The fabrics were pressed between two clean, flat surfaces. They were then laid out to form five layers. The fabric created at a zero-electric field served as the outer layers, whereas the ones created at 12-24 volts formed three inner layers. This layered material was then cut into 6 cm × 6 cm pieces, ⁹⁾ folded, and ¹⁰⁾ stitched together.

<https://groups.oist.jp/nnp/diy-face-mask>

Figure 3 を参照.

Fig. 1 Professor Bandi took a regular cotton candy machine, applied a high voltage electric field, and poured in a powered polymer instead of sugar. The result was a fabric that could be used to create face masks to combat the spread of COVID-19.

<https://groups.oist.jp/nnp/diy-face-mask>

Figure 9 を参照.

Fig. 2 Two ¹²⁾ Scanning Electron Microscopy Micrograph Images compare the OIST-made material with the commercial N95 electro-charged layer, showing that there is no ¹³⁾ discernable structure difference between the two samples.

By using E) this process, F) Professor Bandi fabricated the material and method necessary to replicate medical-grade face masks. In a time of crisis, without access to the traditional N95 masks, this alternative may prove to be lifesaving. To find out more, have a look at Professor Bandi's web page "*N95-electrocharged filtration principle based face mask design using common materials.*" (OIST Research Community Projects, Press Release April 15, 2020. より引用. 一部改変.)

Hints: ¹⁾COVID-19 新型コロナウイルス感染症, ²⁾N95 mask (米国機関の N95 規格をクリアし認可された微粒子用マスク) N95 型マスク, ³⁾in-house 組織内で, ⁴⁾OIST 沖縄科学技術大学院大学, ⁵⁾virion ウイルス粒子, ⁶⁾electro-charged 帯電の, ⁷⁾fabric 繊維, ⁸⁾caramelize (砂糖などを) カラメルにする, ⁹⁾folded 折られた, ¹⁰⁾stitched 縫われた, ¹¹⁾molten 溶けた, ¹²⁾Scanning Electron Microscopy 走査型電子顕微鏡, ¹³⁾discernable 識別可能な

問 1 下線部 A) を和訳せよ.

問 2 下線部 B) を和訳せよ.

問 3 下線部 C) の *slightly modified* の内容について記述せよ.

問 4 下線部 D) を和訳せよ.

問 5 下線部 E) の *this process* とは具体的には何を指すのか, 要約して記述せよ.

問 6 下線部 F) の内容を証明するのが Fig. 2 の写真データである. Fig. 2 の説明文を和訳せよ.

[2] つぎの文章を和訳せよ.

- (1) The Nobel Prize in Physics 2019 was awarded “for contributions to our understanding of the evolution of the universe and Earth’s place in the cosmos” with one half to James Peebles “for theoretical discoveries in physical cosmology”, the other half jointly to Michel Mayor and Didier Queloz “for the discovery of an ¹⁾ exoplanet orbiting a solar-type star.”
- (2) When surfaces in contact move relative to each other, the friction between the two surfaces converts kinetic energy into thermal energy. This property can have dramatic consequences, as illustrated by the use of friction created by rubbing pieces of wood together to start a fire. Kinetic energy is converted to thermal energy whenever motion with friction occurs, for example when a ²⁾ viscous fluid is ³⁾ stirred. Another important consequence of many types of friction can be ⁴⁾ wear, which may lead to performance ⁵⁾ degradation or damage to components. Friction is a component of the science of ⁶⁾ tribology.

Hints: ¹⁾ exoplanet 太陽系外惑星, ²⁾ viscous 粘性の, ³⁾ stirred 攪拌された, ⁴⁾ wear 摩耗, ⁵⁾ degradation 低下, ⁶⁾ tribology トライボロジー (摩擦学)

[3] 大学院に進学する理由を, 100 語程度の英文で記述せよ.

[4] つぎの文章を英訳せよ.

- (1) ¹⁾ 格子振動は結晶中の原子の振動のことである. これは ²⁾ 熱伝導の原因の一つであり, 比熱とも関係が深い. また, 格子振動によって電子が散乱されるため, 電気抵抗の一因ともなる.
- (2) 1803 年, イギリスの ³⁾ ドルトンは全ての物質はそれ以上分割できない粒子からできているという「原子説」を提唱した. しかし, 負の電荷をもった電子, 正の電荷をもった ⁴⁾ 陽子, 電荷をもたない ⁵⁾ 中性子などが次々に発見され, 原子がさらに小さな粒子から成ることが明らかになった.
- (3) 金属においては, 伝導電子が振動電場を受けると, 固体中を往復運動することができ, これを ⁶⁾ プラズマ振動と呼ぶ.

Hints: ¹⁾ 格子振動 lattice vibration, ²⁾ 熱伝導 thermal conductivity, ³⁾ ドルトン Dalton, ⁴⁾ 陽子 proton, ⁵⁾ 中性子 neutron, ⁶⁾ プラズマ振動 plasma oscillation