

2021 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門（物理）

2021 年 2 月 15 日(月)

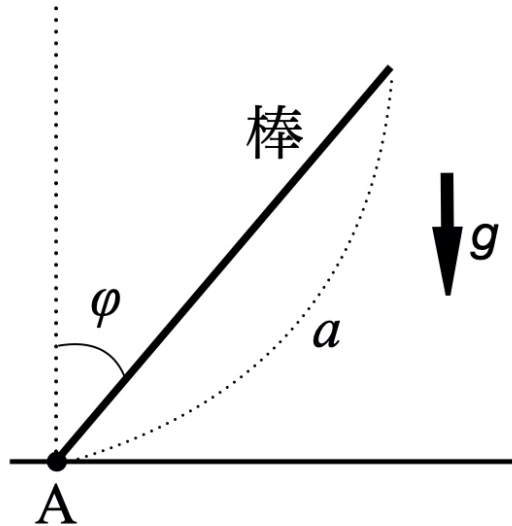
注意事項

1. 全ての解答用紙（B4用紙）の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 全ての解答用紙の□（左上）に大問番号（Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ）を記入すること。
3. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
5. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
6. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

I 以下の各問に答えよ。

(100点)

図のように、質量 M 、長さ a の様な棒が水平面上の固定点Aに一端を固定され、同一鉛直平面内で回転できる。棒が鉛直線となす角度を φ 、重力加速度の大きさを g とする。



- 問1 水平面の高さを基準として、棒のポテンシャルエネルギー U を求めよ。
- 問2 固定点Aのまわりで棒の慣性モーメント I を求めよ。
- 問3 棒の運動エネルギー T とラグランジアン $L(\varphi, \dot{\varphi})$ を求めよ。ただし、 $\dot{\varphi}$ は φ の時間微分を表す。
- 問4 ラグランジュの運動方程式を求めよ。

棒の角度 φ を十分に小さい φ_0 に保った後、時刻 $t=0$ で静かに放すことを考える。

- 問5 φ が十分に小さいとみなせる範囲で運動方程式の一般解を求めよ。更に、上の初期条件を満たす特殊解も求めよ。
- 問6 棒が水平面まで落ちたとき、棒の角速度 $\dot{\varphi}$ を求めよ。

Ⅱ 以下の各問に答えよ。

(100 点)

問1 図 1(a) のように、面積 S の大きさの等しい 2 枚の導体平行板を間隔 d だけ平行に離し、その平行板の間に誘電率 ε の誘電体を隙間なく挿入してコンデンサーをつくった。ただし、真空の誘電率を ε_0 とし、極板の端の効果は無視するものとする。

はじめに、コンデンサーの極板 A に $+Q$ 、極板 B に $-Q$ の電荷を与えた。

- (1) 誘電体中の電束密度の大きさ D と電場の大きさ E を求めよ。
- (2) 誘電体中に生じる誘電分極の大きさ P を求めよ。また、誘電体の表面に誘起される分極電荷 Q_P を求めよ。

次に、図 1(b) のように、極板間の誘電体を極板 A からの距離 x によって変化する誘電率 $\varepsilon(x)$ の誘電体に交換した。

- (3) 誘電率 $\varepsilon(x)$ が

$$\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}x + \varepsilon_1 \quad (\varepsilon_1 > \varepsilon_2)$$

と表されるとき、このコンデンサーの極板間の電位差 V と電気容量 C を求めよ。

- (4) 誘電体の分極電荷密度（体積密度） $\rho_p(x)$ を求めよ。また、 $\rho_p(x)$ の電荷は正か負か、その理由と共に示せ。

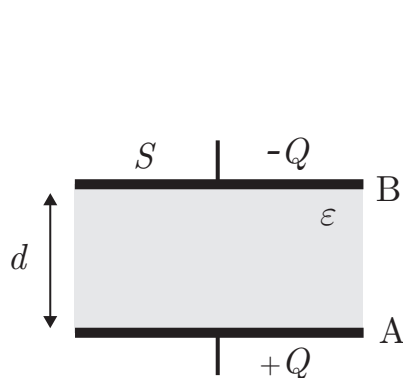


図 1 (a)

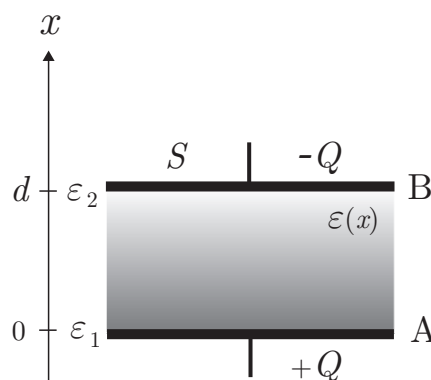


図 1 (b)

問2 図2のように、真空中に抵抗 R の小さな半径 a の1回巻の円形コイルが、大きな半径 b ($b \gg a$) の1回巻の円形コイルと中心 O を同じにして、同一平面上に配置されている。半径 b のコイルは固定され、反時計まわりに一定の電流 I が流れている。また、半径 a のコイルは角速度 ω で直径のまわりに回転している。ただし、真空の透磁率を μ_0 とし、コイルの自己誘導は無視するものとする。

- (1) 半径 b のコイルが中心 O につくる磁束密度の大きさ B を求めよ。また、その方向を示せ。
- (2) 時刻 t に半径 a のコイルの面が半径 b のコイルの面とのなす角 θ を $\theta = \omega t$ として、半径 a のコイルを貫く磁束 $\Phi(t)$ を求めよ。ただし、半径 a のコイル内の磁束密度はその中心 O の磁束密度と同じであると近似できるものとする。
- (3) 半径 a のコイルを流れる電流 $I(t)$ を求めよ。
- (4) 半径 a のコイルを ω で回転させ続けるために必要な回転軸のまわりの力のモーメントの大きさ（トルク） $N(t)$ を求めよ。
- (5) 2つのコイルの間の相互インダクタンス M を求めよ。また、半径 b のコイルに発生する相互誘導による起電力 V を求めよ。

次に、半径 a のコイルの回転を止めて図2の配置のように2つのコイルの面を一致させて固定し、半径 b のコイルに流れている電流を Δt の間に I から $I + \Delta I$ へ増加させた。

- (6) このとき、半径 a の円周上（コイルの導線中）に生じる電場の大きさ E を求めよ。また、その方向を図示せよ。

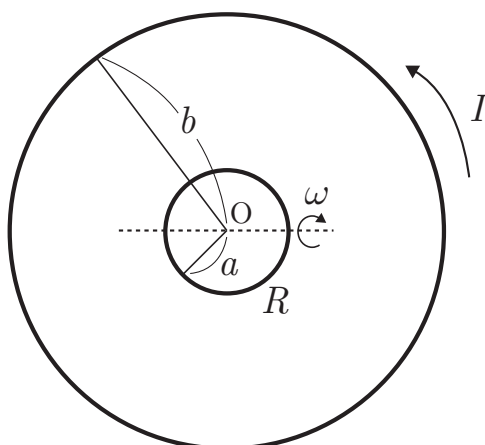


図2

III 質量 m の粒子が角振動数 ω で 1 次元調和振動をしている物理系を考える. 位置の演算子を x , 運動量の演算子を $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ とするとき, そのハミルトニアン H は

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (1)$$

によって与えられる. 以下の問に答えなさい.

(100 点)

問 1 (1) から得られる時間に依存しないシュレディンガー方程式を考える. 座標表示の波動関数 $\psi(x)$ に課すべき境界条件を書きなさい.

問 2 以下のように演算子 $a, a^\dagger$ を定義する.

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{i}{m\omega} p \right).$$

交換関係 $[a, a^\dagger]$ を求めなさい.

問 3 数演算子 $N = a^\dagger a$ を導入する. (1) のハミルトニアンは

$$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right),$$

と書けることを証明しなさい.

問 4 次の 2 つの交換関係

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger,$$

を証明しなさい.

問 5 数演算子 N の固有値方程式

$$N|n\rangle = n|n\rangle,$$

を考える. ここで, $|n\rangle$ は $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ を満足する規格化された固有状態で, n は固有値である. $n \geq 0$ であることを証明しなさい.

問 6 問 4 と問 5 の結果を使うと, n は 0 以上の整数であり,

$$a|n\rangle = A|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = B|n+1\rangle,$$

の関係式が成り立つことがわかる. 定数 A, B を求めよ. ただし, 定数 A, B は 0 以上の実数である.

問 7 この系の基底状態, すなわち「真空」を $|0\rangle$ と書くと, 真空は $a|0\rangle = 0$ によって定義される. 規格化された固有状態 $|n\rangle$ は, 真空 $|0\rangle$ を用いると

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle,$$

と書ける. そのとき, 以下の問に答えなさい. ただし, $0! = 1$ とする.

(1) $N(a^\dagger)^n = (a^\dagger)^n(N+n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法を使って証明しなさい.

(2) この固有状態が $N|n\rangle = n|n\rangle$ を満たすことを示しなさい.

問 8 真空 $|0\rangle$ の座標表示は $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ で与えられる. 真空の定義式 $a|0\rangle = 0$ を使って, 規格化された固有関数 $\psi_0(x)$ を求めなさい. ただし, ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi},$$

を用いても良い.

問 9 時刻 $t = 0$ における状態 $|\psi(0)\rangle$ が,

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle + |n-1\rangle),$$

で与えられているとする. そのとき, 以下の問に答えなさい.

(1) $\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle$ を求めなさい.

(2) 一般の時刻での状態 $|\psi(t)\rangle$ を求めなさい.

(3) 期待値 $\langle\psi(t)|p|\psi(t)\rangle$ を求めなさい.

問 10 一般の 1 次元ポテンシャル $V(x)$ を考える. ポテンシャルが $x = x_0$ において極値をとるとすると,

$$\left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = 0,$$

となる. このポテンシャルを $x = x_0$ の周りにテーラー展開して $\Delta x = x - x_0$ (ただし, $|\Delta x| \ll 1$) とおけば, 調和振動子のポテンシャルが得られることを示しなさい. また, そのときポテンシャル $V(x)$ に課される十分条件を求めなさい.

IV 以下の各問に答えよ。

(100 点)

- 問 1. 図 1 のように、容器 A と容器 B が弁のある細い管で連結されている。A 側には気体、B 側は真空になっており、はじめ弁は閉じられている。弁を開けて気体を自由膨張させるとき、気体がなす仕事について説明せよ。

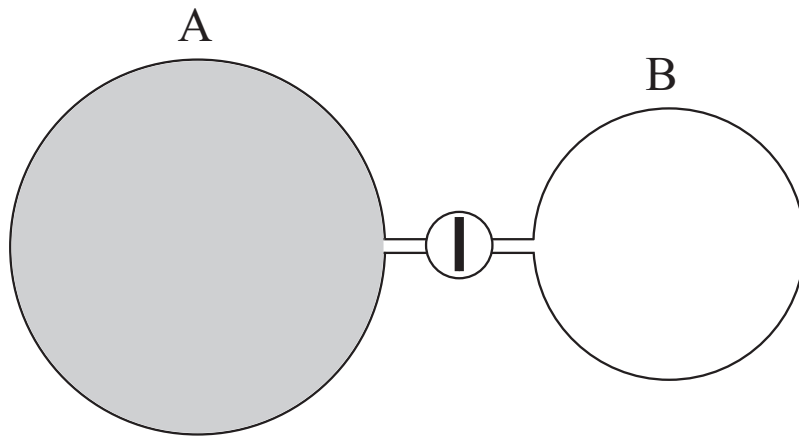


図 1: 細い管で連結された容器 A と容器 B。

- 問 2. 圧力 p 、体積 V 、温度 T の状態にある物質に熱量 δQ を与えると、物質の p 、 V 、 T は変化した別の状態に移る。また、それに伴い内部エネルギー U も変化する。なお、ここでいう状態変化は準静的変化を考える。

- (1) 内部エネルギー U を、 T と V の関数とみなして全微分 dU を dT 、 dV と関係させて表せ。
(2) 熱量の変化量を与える式 $\delta Q = dU + pdV$ から、定積比熱 C_V と定圧比熱 C_p との間には、以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$C_p = C_V + \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

- (3) 定圧比熱 C_p は定積比熱 C_V より大である理由を述べよ。
(4) 理想気体は、状態方程式 $pV = nRT$ に従う。 n はモル数を表す。ある物質が理想気体 1 モルの場合、上記 (2) の結果を用いて $C_p - C_V = R$ であることを示せ。

問 3. 温度 T の熱浴と接している N 個の独立で局在した粒子系を考える。各々の粒子は ε および $-\varepsilon$ の 2 つのエネルギー準位を取り得るとする。温度 T に保たれている場合、この系をカノニカル分布によって考え、系の取り得る比熱 C を求める過程を考える。

- (1) まずは系の分配関数 Z を求めよ。これを求めるために、最初は 1 粒子あたりの分配関数 z を求め、 N 粒子の分配関数 $Z = z^N$ を求める。 z は、

$$z = \sum_{E_i} e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

と表すことができる。ただし、 k_B はボルツマン定数である。

- (2) 次に、系におけるヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。
(3) さらに、上で求めた F よりエントロピー S を求めよ。
(4) ここで、系の内部エネルギー U は次式で表されることを示せ。

$$U = -N\varepsilon \frac{\sinh(\frac{\varepsilon}{k_B T})}{\cosh(\frac{\varepsilon}{k_B T})}$$

- (5) 上で求めた内部エネルギー U を用いて比熱 C を求めよ。さらに、縦軸を比熱、横軸を温度とするグラフの概形を描け。

2021 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2021 年 2 月 15 日(月)

注意事項

1. 全ての解答用紙（B4用紙）の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

以下の各問に答えよ。

(100 点)

I 惑星の気温を見積もる方法について述べた以下の文章を読み、次の問に答えよ。

(a) The temperature of a planet's surface is not only dependent on the amount of light it receives from its star; it also depends on the reflectivity of its surface and on the content of so-called greenhouse gases*¹ in its atmosphere. Only if a planet had the surface properties of what physicists refer to as a black body would its temperatures be fixed solely by the amount of light reaching its surfaces. To qualify as a black body the surface of the planet must be nonreflecting; that is, all the sunlight reaching it must be absorbed and later reradiated*² as planet light. Also, there can be no gases in its atmosphere that absorbed outgoing planet light. Were the Earth a black body it would have a mean surface temperature of about 5°C.

The Earth is not a black body. First of all, its clouds, its ice caps, and its deserts reflect back to space a sizable portion ($\simeq 33$ percent) of sunlight impinging*³ upon the Earth. The sunlight reflected back into space plays no role in maintaining the temperature of the Earth's surface. Were this the only (b) deviation from the black body situation, the Earth's surface temperature would average -20°C (all water would be frozen). However, the Earth's atmosphere contains molecules made up of three or more atoms. Molecules of this type are able to capture packets of outgoing infrared light. Important in the Earth's atmosphere are water vapor (H_2O), carbon dioxide (CO_2), methane (CH_4), and nitrous oxide (NO_2). The capture of outgoing earth light by these gases warms the planet. For Earth the greenhouse warming more than compensates for the sunlight lost through reflection. The Earth's mean surface temperature is 10°C warmer than if it were a black body.

Thus, to assess a planet's temperature, we need to know not only how much sunlight it receives but also the reflective properties of its surface and the amounts of infrared-light-absorbing gases in its atmosphere.

The reflectivity of a planet has much to do with the amount and state of its water. Ocean water is not very reflective; ice is highly reflective; clouds are moderately reflective. Plants absorb nearly all the light they receive; there is no glare in a forest. By contrast, about half the light reaching vegetation-free portions of the continents is reflected. The extent of plant cover depends on the amount of rainfall.

The greenhouse capacity of a planet also has much to do with the state of its water. For today's Earth, water vapor is the most important absorber of outgoing infrared light. The warming produced by this greenhouse capacity by chance just about compensates for the cooling produced by reflectivity of the Earth's clouds.

*¹ greenhouse gases: 温室効果ガス

*² reradiate: 再放射

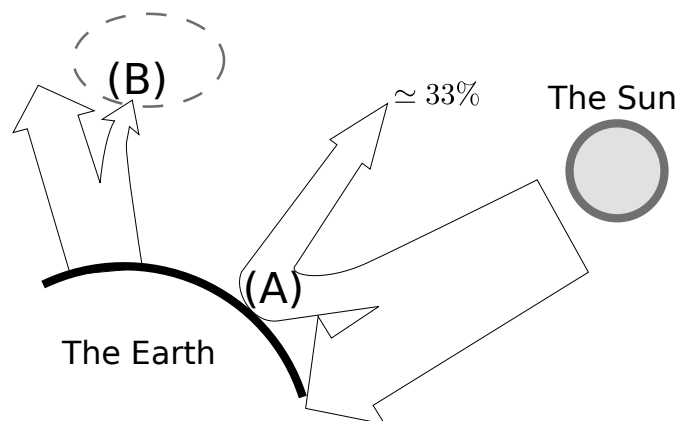
*³ impinging: impinge (衝突する) の現在分詞形

(c) It need not be this way. (d) Imagine that by some magic the Sun's energy output could be turned down for a long enough time for the continents to become snow-covered and the ocean to freeze. Then the Sun is turned back up again to its present output. The ocean would remain frozen, because snow is so reflective that most of the energy reaching us from the Sun would “bounce” off. The Earth would remain cold!

(e) Or imagine that by some magic the Sun's energy output was turned way up for long enough to permit the oceans to boil away, producing a dense atmosphere of steam. Then the Sun is turned back down again. It would remain very hot on Earth. The immense greenhouse effect of the steam would maintain the planet's ground temperature so high that the steam could not recondense. The Earth would remain hot!

—“*How to Build A Habitable Planet*” by Wallace S. Broecker, Lamont-Doherty Geological Observatory of Columbia University より一部改変

問 1 下の図は、上の文章の内容を表現したものである。



(A) と (B) のところで起こっていることは、それぞれ、何が、どのような物理現象を起こした結果であると本文中に説明されているか。日本語で説明せよ（直訳でなくてよい）。

問 2 下線部 (a) を日本語訳せよ。

問 3 下線部 (b) の deviation を辞書で引くと、

- (1) 進路からそれること
- (2) 偏差値
- (3) 脱線
- (4) 逸脱

などの意味が出てくるが、ここでの deviation が指している内容を日本語で説明せよ。

問 4 下線部 (c) の意味するところは以下のうち、どれにもっとも近いか。

- (1) これは偶然ではない。
- (2) こうなるとは限らない。
- (3) この方法はうまくいかない。
- (4) こうならないに違いない。

問 5 下線部 (d) と下線部 (e) の仮定のもとでは, reflectivity, greenhouse effect, temperature はどうなるのだろうか。(d) と (e) に続く文章の中でどう書かれているか。以下の表を解答用紙に写し, 空欄に「上がる／下がる／いったん上がるが元に戻る／いったん下がるが元に戻る／変化しない／言及されていない」のいずれか当てはまるもの(同じものを複数回選んでもよい)を埋めよ。実際にどうかではなく「どう書かれているか」という問いであることに注意せよ。

	reflectivity	greenhouse effects	temperature
(d)			
(e)			

Ⅱ 以下の文章を日本語訳せよ。

- (1) This quantity must be one which is directly determined by the state of the system considered, without reference to the previous history of the system, as is the case with the energy, with the volume, and with other properties of the system.
- (2) The angular-momentum vector for a particle moving with constant angular speed on a circle with center at the origin is a conserved quantity.

Ⅲ 以下の文章を英訳せよ。

- (1) 行列 A, B がともに逆行列が存在する行列であるならば, その積 AB にも逆行列が存在する。
- (2) 相対論的因果律 (relativistic causality) は, 信号が光速以上の速度で伝わることを禁じている。

Ⅳ 各自の卒業研究について

- (1) 内容を 300 字程度の日本語で説明せよ。
- (2) それを英訳せよ。