I

以下の各問に答えよ． (100 点)

問 1　図 1 のように，半径 a で質量 M の一様な円柱棒が傾斜角 θ の斜面を滑らずに運動している場合を考える．

(1) 斜面に (i) 平行および (ii) 垂直方向の円柱棒の重心 G の運動方程式をかけ．ただし，図 1 に示したように重心の速度を V，摩擦力を F, 垂直抗力を N とする．また，重力加速度を g とする．

(2) z 軸のまわりの剛体の慣性モーメント I_z は，密度が一様な剛体の場合，$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$ で与えられる．ただし，$\int dm = M$(物体の質量) である．円柱棒の中心軸まわりの慣性モーメント I を求めよ．

(3) 慣性モーメント I を用いて円柱棒の回転の運動方程式をかけ．ただし，角速度を ω とする．

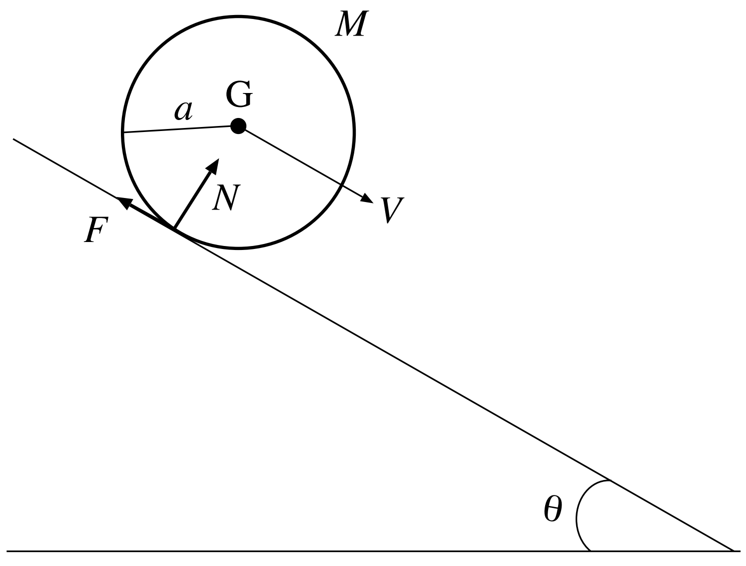


図 1　斜面での円柱棒の運動．

問 2　図 2 のように，x 軸を含む水平面に半径 R の円筒が固定されている．この円筒内の面を半径 r で質量 M の剛体球が滑らずに円筒の中心軸と垂直な面と平行に運動する場合を考える．剛体球の中心を C とし，最下点 O と接していた点を B および移動中の接点を D とする．円筒の中心 A と D を結ぶ直線 AD と y 軸がなす角を θ とし，$\angle$BCD を φ とする．また，重力加速度を g とする．

(1)　剛体球 (あるいは直線 CB) の回転角 $\alpha = \varphi - \theta$ が $\alpha = \dfrac{R-r}{r}\theta$ で与えられることを示せ．

(2)　剛体球の運動エネルギー K を $\dot{\theta}$ を使って表せ．ただし，剛体球の軸周りの慣性モーメント I は $I = \dfrac{2}{5}Mr^2$ である．

(3)　剛体球の位置エネルギー U を求めよ．ただし，剛体球の点 B が O と接するつりあいの位置にあるときを $U = 0$ とする．

(4)　ラグランジュの運動方程式をかけ．

(5)　つりあいの位置近傍における微小振動の周期 T を求めよ．

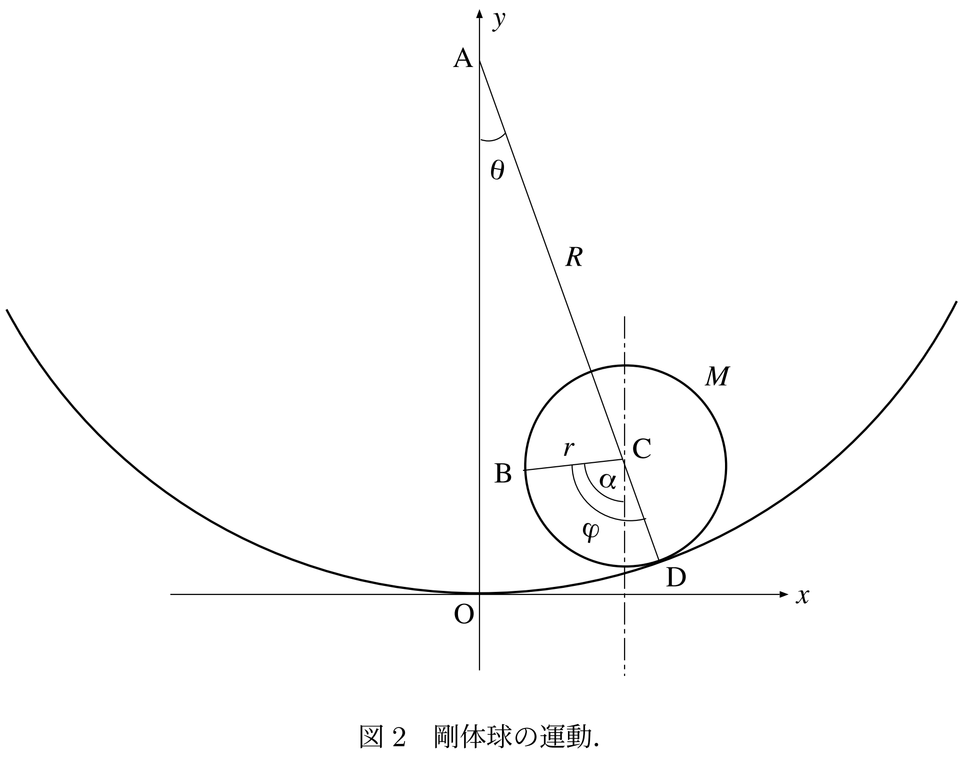


図 2　剛体球の運動．

II　以下の各問に答えよ。　　（100 点）

問 1　原点にある電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ による電位 $V(x,y,z)$ は，位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ を使って，次式のように表すことができる。

$$V(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$$

上式を $\boldsymbol{E}(x,y,z)=-\nabla V(x,y,z)$ に代入して，電気双極子 $\boldsymbol{p}$ による電場が次式となることを示せ。

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left\{\boldsymbol{p}-\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^2}\right\}$$

問 2　真空中で，半径 a の球内に電荷が一様な電荷密度で分布している。全電荷量を q $(q>0)$とする。球の中心からの距離をrとする。

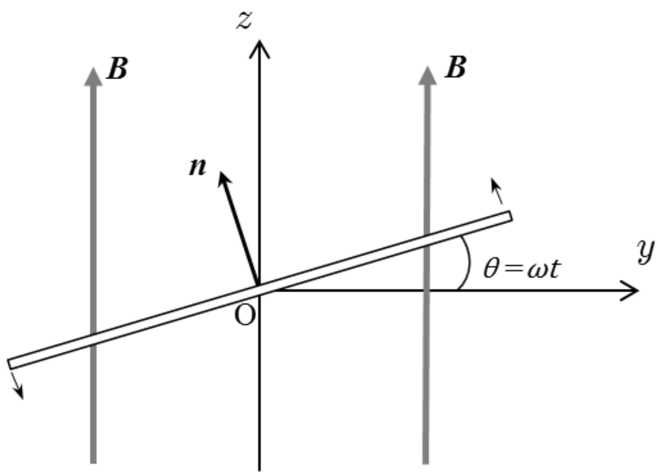
(1) 球内外の電場の強さ E を求めよ。

(2) 球内外の電位 V を求めよ。ただし，無限遠における電位をゼロとする。

(3) 電場 E と電位 V を，距離rの関数として各々グラフに示せ。

(4) 静電エネルギー U を求めよ。

問 3　半径 a，抵抗 R の円形コイルが，中心と原点 O が一致するように，xy 平面上に置かれている。これに z 軸方向に一様な磁場（磁束密度 $\boldsymbol{B}$）をかけて，x 軸のまわりに一定の角速度ωで回転させる。x 軸方向の円形コイルの直径が回転軸となる。コイルの自己誘導は無視するものとする。



x 軸方向からみた図

(1) 時刻 t にコイルが xy 平面となす角を$\theta = \omega t$として, コイルに生じる誘導起電力 V を求めよ。

(2) コイルが回転し続けるために外から加えなければならない力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を求めよ。ただし，コイルの磁気モーメント$\boldsymbol{m}$は，$\boldsymbol{m} = IS\boldsymbol{n}$である。ここで I はコイルに流れる電流，S はコイルの面積，$\boldsymbol{n}$ はこの面に垂直な単位ベクトルである。

(3) コイルに発生するジュール熱 Q を求め，これが外力のなす仕事率 P に等しいことを確かめよ。

問 4　直交している一様な静電場と静磁場の中での荷電粒子の運動を考える。3次元空間の直交座標系(x, y, z)をとり，y軸の正の向きに電場$\boldsymbol{E} = (0, E, 0)$，$z$軸の正の向きに磁束密度$\boldsymbol{B} = (0,0, B)$の磁場が存在しているとする。質量$m$，正電荷$q$をもつ粒子を原点に静止させたところ，粒子は力を受けて運動を始めた。粒子のもつ速度ベクトルの成分をそれぞれ(v_x, v_y, v_z)とする。

(1) 粒子にはたらく力の成分(F_x, F_y, F_z)を求めよ。

(2) 粒子の運動方程式を各成分についてたてよ。

(3) 速度ベクトルの各成分を求めよ。

(4) 粒子はどのような運動を行うか，粒子の描く軌道を求めよ。

$\boxed{\text{III}}$ 質量 m の粒子が１次元シュレーディンガー方程式，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) \;=\; \hat{H}\, \Psi(x,t) \qquad (-\infty < x < \infty),$$
$$\hat{H} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \;+\; V(x),$$

に従って，x 軸方向に沿った１次元運動をしている。 ここで，$\Psi(x,t)$ は粒子の波動関数，$\hat{H}$ はハミルトニアン演算子である。以下の各問に答えよ。（100 点）

問１　波動関数 $\Psi(x,t)$ を

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 \, dx \;=\; 1$$

のように規格化した時，$|\Psi(x,t)|^2$ は何を表すと解釈されるか説明せよ。この解釈が任意の時刻 t で成り立つには

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 \, dx \;=\; 0$$

が満たされればよい。$x \to \pm\infty$ で $\Psi(x,t) \to 0$ となる境界条件の下で，これが満たされることを示せ。

問２　物理量 $Q(x,p)$ の期待値 $\langle Q(x,p) \rangle$ は，以下のように定義される。

$$\langle Q(x,p) \rangle \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\, \hat{Q} \left(x,\, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x,t)\, dx$$

ここで，$\hat{p} \;=\; \dfrac{\hbar}{i} \dfrac{\partial}{\partial x}$ は運動量演算子である。この時，

$$\frac{d \langle Q \rangle}{dt} \;=\; \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H},\, \hat{Q}] \rangle$$

が成り立つことを示せ。また，量子力学において，物理量 Q が保存量であるとはどういう事か説明し，ここでの物理量 Q が保存されるための条件を述べよ。

問３　古典力学の運動方程式に対応する関係式，

$$\frac{d \langle p \rangle}{dt} \;=\; \left\langle -\frac{dV}{dx} \right\rangle$$

を導け。

次に，ポテンシャル $V(x)$ がディラックの δ 関数で表される場合を考える。すなわち，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \;=\; f(0), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx \;=\; 1$$

となる超関数 $\delta(x)$ を用いて，

$$V(x) \;=\; -a\,\delta(x)\,, \qquad \text{ただし} \qquad a > 0$$

とする。この時，粒子の定常状態の波動関数は

$$\Psi(x,t) \;=\; \psi(x)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}Et\right],$$

と書ける。

問 4　束縛状態 $E < 0$ の時，定常状態のシュレーディンガー方程式が $x \neq 0$ で

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} \;=\; \kappa^2\psi(x)$$

と書けることを示し，κ を求めよ。この定常状態のシュレーディンガー方程式の一般解は

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x} & \text{for} \quad x < 0 \\ Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x} & \text{for} \quad x > 0 \end{cases}$$

となる。この解の未定定数 A, B, C, D を，$\psi(x)$ が $x \to \pm\infty$ で有界である事，$x = 0$ で連続である事と，波動関数の規格化条件から求めよ。また，求めた関数 $\psi(x)$ のグラフを図示せよ。

問 5　通常，波動関数 $\psi(x)$ はその値だけでなく 1 階微分 $\dfrac{d\psi}{dx}$ も連続である。問 4 で求めた $\psi(x)$ の微分が $x = 0$ で不連続なのは，ポテンシャルが δ 関数だからである。$x = 0$ での $\dfrac{d\psi}{dx}$ の値の不連続性についての接続条件は，ポテンシャルの項を含む定常シュレーディンガー方程式を $x = 0$ の近傍 $[-\epsilon, \epsilon]$　$(0 < \epsilon \ll 1)$ で積分することにより得られる。

$$-\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}dx - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} a\,\delta(x)\,\psi(x)dx \;=\; -\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \kappa^2\psi(x)dx$$

この積分を実行し，$\epsilon \to 0$ の極限での関係式を求めることで，束縛状態のエネルギー固有値 E を求めよ。左辺 1 項目の積分で，1 階微分 $\dfrac{d\psi}{dx}$ の左側極限と右側極限 $(x \to \pm 0)$ の両方の値を利用することに注意せよ。

問 6　問 4，5 で求めた束縛状態について，粒子の位置 $\hat{x}$ と運動量 $\hat{p}$ の不確定性

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sqrt{\langle(x - \langle x\rangle)^2\rangle} \;=\; \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \\ \Delta p &= \sqrt{\langle(p - \langle p\rangle)^2\rangle} \;=\; \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} \end{aligned}$$

を計算し，この積 $\Delta x\Delta p$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{IV}}$ 以下の各問に答えよ。 (100 点)

問 1 熱平衡状態にある気体の圧力を P, 体積を V, 温度を T, エントロピーを S, 内部エネルギーを U とする。

(1) 関係式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{P}{T},$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\dfrac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \dfrac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$ であることを用いて,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

を示せ。

(3) 理想気体とは，状態方程式 $PV = Nk_{\mathrm{B}}T$（N は粒子数，k_{B} はボルツマン定数）にしたがう気体である。この状態方程式を用いて，理想気体の内部エネルギー U が体積 V によらないことを示せ。

(4) 定積比熱 $C_V = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ について,

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V$$

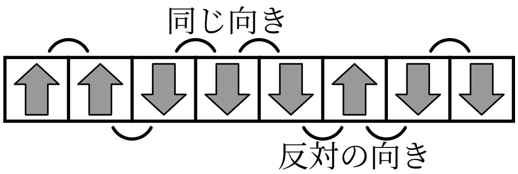
が成り立つことを示せ。

(5) ファンデルワールス気体とは,

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = Nk_{\mathrm{B}}T$$

という状態方程式にしたがう気体である。ただし，N は粒子数，k_{B} はボルツマン定数，a, b は定数である。ファンデルワールス気体の定積比熱 C_V が体積 V によらないことを示せ。

問 2 N 個のスピンが一列に並んだ系が温度 T の熱平衡状態にある。スピンは上向きまたは下向きのいずれかの状態をとり，隣り合うスピンどうしのみが相互作用する。隣り合うスピンが同じ向きであるときのエネルギーが $-J$, 反対の向きであるときのエネルギーが J とする（$J > 0$ は定数)。下の図は $N = 8$ のスピン配置の一例であり，隣り合うスピンが同じ向きなのが 4 か所，反対の向きが 3 か所なので，エネルギーは $4(-J) + 3J = -J$ となる。以下，ボルツマン定数を k_{B}，逆温度を $\beta = (k_{\mathrm{B}}T)^{-1}$ とする。



(1) 隣り合うスピンのうち n か所が同じ向きである配置の総数が

$$\frac{2(N-1)!}{n!(N-1-n)!}$$

であることを示せ。

(2) この系の分配関数が

$$Z = 2^N \cosh^{N-1}(\beta J) \quad \left(\text{ただし，}\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

であることを示せ。

(3) 温度 T のカノニカル分布に関する平均を $\langle\ \rangle$ で表すことにすると，系の平均エネルギー $\langle E \rangle$ およびエネルギーのゆらぎ ΔE がそれぞれ

$$\langle E \rangle = -(N-1)J \tanh(\beta J),$$
$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \frac{\sqrt{N-1}J}{\cosh(\beta J)}$$

となることを示せ。ただし，

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

である。

(4) 前問の $\langle E \rangle$ および ΔE が低温（$T \to 0$）および高温（$T \to \infty$）の極限でどのような形になるか導出し，これらの極限におけるスピンの配置について述べよ。

I 次の文章を読んで，以下の各問に答えよ。参考のために，文章の後に語句の意味が説明してある。 (40 点)

Historical records of supernovae stretch as far back as 185 CE, but one of the most significant cosmic explosions in terms of advancing astronomical knowledge occurred in November 1572. <u>Among those who observed the event was Danish astronomer Tycho Brahe – the last famed astronomer to make observations of the night sky without the aid of a telescope.</u>(1)

Brahe was born into the nobility at his family's ancestral seat of Knutstrop Castle in December 1546. He began attending the University of Copenhagen at age 12, initially studying law. But then he witnessed a solar eclipse on August 21, 1560 triggering his lifelong passion for astronomy.

<u>This was a critical period in astronomy, as the Ptolemaic model of the universe – with a fixed Earth placed at the center of the solar system, and the sun, moon, and planets orbiting around it – was being challenged by the Copernican worldview, in which everything orbited the Sun at the center.</u>(2) During a tour of Europe when he was 15, Brahe witnessed a conjunction of Jupiter and Saturn. <u>He noticed that neither the Copernican nor Ptolemaic models accurately predicted the conjunction. He became convinced that more accurate observations would be the key to making better predictions about such events.</u>(3)

Tycho was making observations from an observatory he set up at Herrevad Abbey on the night of November 11, 1572, when he spotted a very bright new star in the constellation Cassiopeia. He was not the only one to do so, but it is known as Tycho's Supernova because he undertook the most detailed study of its properties. Many contemporary astronomers who still subscribed to the Ptolemaic view concluded the object must be in the so-called "terrestrial sphere" (i.e., inside the orbit of the moon), since the heavenly firmament should be unchanging.

For Brahe, the scientific evidence clearly showed this was a distant star. It was certainly much farther away than the moon since there was no daily parallax against what was then believed to be a background of fixed stars. Nor did said object change its position relative to those fixed stars. So <u>it</u>(4) could not be a planet either.

（This Month in Physics History, APS News Vol.28, No.5 November 2019 より抜粋）

CE – 西暦（AD の別の表現）　　Tycho Brahe – ティコ ブラーエ
daily parallax – 日周視差，地心視差

問1　下線部 (1) を the event の意味を明確にしながら和訳せよ。

問2　下線部 (2) を和訳せよ。

問3　下線部 (3) を和訳せよ。

問4　ティコ ブラーエが観察した天体現象を，この文章中から 3 つ探して書き出せ。

問5　下線部 (4) の代名詞 it が指す対象が，文中に色々な表現で書かれている。第 4 および第 5 パラグラフの中からそれらを全て書き出せ。

II　次の文章を読んで，以下の各問に答えよ。参考のために，文章の後に語句の意味が説明してある。 (40 点)

Units of measure are important for applications from commerce to fundamental physics. The current Système International (SI) units emerged early in the French Revolution to unify and promote égalité (“equality”) in commerce. Over the past two centuries, major changes and updates to SI units have occurred, but the redefinitions introduced in 20 May 2019 were the biggest conceptual transformation in metrology since the French Revolution.(1)

Over time, physicists have defined and redefined units based on natural objects, then objects of human creation and scale, and finally microscopic objects paired with fundamental constants. For example, the meter was first defined as one ten-millionth of the distance from the equator to the North Pole. In 1799 that standard was replaced by a manufactured prototype meter bar, which was more precise. But the accuracy was still limited to 10^{-7}, and calibration measurements required a precise temperature and pressure; also required was that the meter bar be supported at the so-called Airy points, for which bending is minimized.

In 1960 the General Conference on Weights and Measures (CGPM) introduced a microscopic reference by defining the meter as a specific number of wavelengths of the emission from a transition in krypton-86. Now every laboratory in the world could create their own standard. But the length standard was still tied to a specific atomic transition, and with the development of lasers, krypton was no longer the best choice available. Instead of picking another atomic or molecular line, in 1983 CGPM defined the speed of light as c=299792458 m/s and the meter as the distance travelled by light in vacuum in 1/299792458 of a second. In practice, because researchers can measure time and frequency much more accurately than length, they measure any laser’s frequency and then convert it to a wavelength using the speed of light. With a defined c, any laser wavelength can serve as a ruler for the meter.

The kilogram’s definition has a history similar to that of the meter. Originally, in 1795 the kilogram was defined as the mass of one liter of pure water at the melting point of ice. But unavoidable impurities in the water limited the (　A　).　Manufactured prototypes were thus developed. In 1799 a cylinder made of platinum was introduced, and in 1879 one made of platinum-iridium came into use; it provided the definition of the kilogram for 140 years. The problem was that when the original platinum-iridium cylinder, or the urkilogram, and its copies were (　B　) after a year, their masses differed by up to 50 micrograms, likely because atoms fell off or hydrogen was absorbed from air contaminants or cleaning products.

The urkilogram was difficult to (　C　) because microscopic and macroscopic masses differ by a factor of 10^{25}, which is hard to measure accurately; in contrast, the meter is on the order of 10^6 optical wavelengths. To define the kilogram in a microscopic way, metrologists could have used the mass of a specific number of a specific atom, or of electrons or protons, similar to the meter's definition in terms of krypton radiation. (　D　), the new definition relied on a set value for a fundamental constant, similar to the meter's definition through the speed of light. For the kilogram, the fundamental constant was Planck's quantum h. Researchers can use many systems and measurement methods to realize the kilogram, as long as the result can be expressed by h and a frequency.

<u>With the new definition of the kilogram, all unit definitions in physics rely on microscopic quantities or fundamental constants and no longer involve manufactured artifacts. Any laboratory in the world can create primary standards; Paris, the home of the meter bar and the urkilogram, has lost its special role.</u>(2)

（"An atomic physics perspective on the kilogram's new definition" written by Wolfgang Ketterle and Alan O. Jamison, Physics Today, May 2020, volume 73, number 5 より抜粋）

General Conference on Weights and Measures (Conférence Générale des Poids et Mesures CGPM) － 国際度量衡総会
metrology － 計量学，計測学
a prototype meter bar － メートル原器
the urkilogram － 国際キログラム原器

問１　下線部 (1) を和訳せよ。

問２　文章中の（　A　）～（　D　）に入る最も適切な単語を四角の中から選べ。

(　A　) quantity,　weight,　precision,　number

(　B　) destroyed,　compared,　cleaned,　transferred

(　C　) find,　construct,　prepare,　replace

(　D　) Otherwise,　Instead,　Then,　Therefore

問3　メートルとキログラムは歴史的にどのように再定義されてきたと文中に書かれているか，メートルとキログラムについて，それぞれ3通りの定義の内容を年代順に日本語で説明せよ。

問4　下線部 (2) を和訳せよ。

III　次の文章を英訳せよ。文章の後に挙げた単語を用いて良い。　(20点)

問1　全ての物理的な場の正確で基本的な記述は，量子場の理論の一般的な枠組みで与えられると一般に信じられている。

量子場の理論　－　quantum field theory

問2　原子が凝縮して結晶を形成するとき，各々の原子の電子状態は，その周囲の原子との相互作用によって，自由原子の状態から変更を受ける。原子の一番外側の価電子は結晶の凝集エネルギーに寄与する。

凝集エネルギー　－　cohesive energy　　価電子　－　valence electron

問3　電気抵抗率の値は，熱勾配がない場合に，電場とそれと同じ向きの電流密度との比で定義される。等方的な導体では電気伝導率は電気抵抗率の逆数となる。