

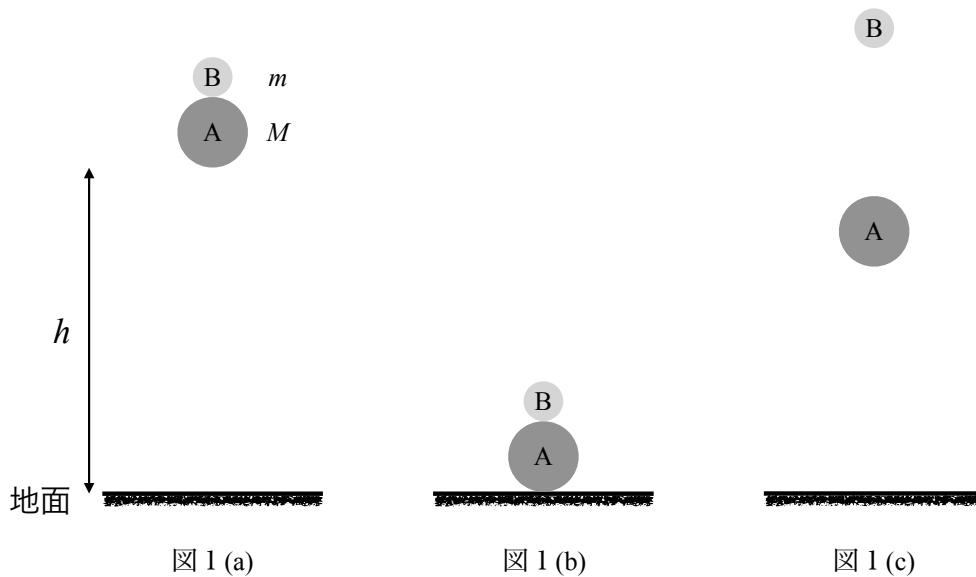
I

以下の各問に答えよ。

(100 点)

問1 共に大きさの無視できる質量 M の小球 A と質量 m の小球 B が、小球 A を下にして鉛直方向に接触した状態で、一様重力場中にあるとする。小球 A と地面、及び、小球 A と B との間の衝突は、どちらも弾性衝突（反発係数が1）とする。ただし、小球 A の質量 M は小球 B の質量 m よりも十分大きく、小球 A と B が衝突した場合、小球 A も B も、小球 A の衝突前の運動方向の速度を持つ。以下では、空気抵抗は無視し、重力加速度の大きさは g とする。また、鉛直上向きを速度の正方向とする。

- (1) 図1(a)のように、小球 A と B を地面から高さ h の場所に置き、接触した状態を保ったまま自由落下させた。小球 A が地面に衝突する直前の速度を求めよ。
- (2) 図1(b)のように、小球 A が地面と弾性衝突した直後の、小球 A の速度を求めよ。
- (3) 小球 A は地面と弾性衝突した直後、今度は上に乗っている小球 B と弾性衝突する。この小球 A と B との弾性衝突直後の、小球 A と B のそれぞれの速度を求めよ。
- (4) 小球 A との弾性衝突後、図1(c)のように小球 B は上昇する。小球 B が上昇する最大の高さを、 h を用いて表せ。
- (5) 小球 B との弾性衝突後、図1(c)のように小球 A も上昇する。小球 A が上昇する最大の高さを、 h を用いて表せ。



問2 2次元空間において、相互作用している質量 m_A の質点 A と質量 m_B の質点 B のみからなる系を考える。座標原点から見た質点 A と B のそれぞれの位置ベクトルを \vec{r}_A , \vec{r}_B とし、2つの質点の相互作用のポテンシャルエネルギー U は、それらの位置ベクトルの差の絶対値のみに依存しているとして、 $U(|\vec{r}_A - \vec{r}_B|)$ と表す。ただし、それぞれの質量は定数とする。また以下では、 t を時間座標としたとき、ある座標 q の時間微分を $\dot{q} = dq/dt$ のように $\dot{}$ を使って表示する。

(1) この系のラグランジアン L を書け。

(2) ベクトル $\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ を導入し、さらに、座標原点を系の重心に移動させることで、 $m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B = 0$ を成り立たせる。これらを利用すると、(1) のラグランジアンが

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

と変形できることを示せ。ただし、 $\mu = m_A m_B / (m_A + m_B)$ は換算質量、 $r = |\vec{r}|$ はベクトル \vec{r} の大きさである。

(3) 座標として2次元極座標 (r, θ) を採用したとき、

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

と書くことができることを示せ。

(4) (2) のラグランジアンと (3) の表現を利用し、ラグランジュの運動方程式を求めよ。

(5) (2) のラグランジアンを、ポテンシャル U の中で運動する質量 μ の質点のラグランジアンとみなしたとき、その質点の角運動量が保存することを示せ。

Ⅱ

以下の各問に答えよ。

(100 点)

問 1 厚さを無視することができる半径 a の平面円板に正の電荷が面密度 σ で分布している。円板は真空中に設置されており、真空の誘電率は ε_0 とする。

(1) 円板の中心 O より円板に垂直に x だけ離れた点 P に作り出す電場の強さ E が、

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) \text{ になることを示せ。}$$

(2) 次に、図 1 のように面密度 σ で電荷分布している円板の中心から半径 b ($< a$) までの領域を面密度 $-\sigma$ で電荷分布させた。このときの点 P での電場の強さを求めよ。

(3) (2) の状況において $a = 4$, $x = 3$ としたとき、点 P の電場がゼロになる b の値を求めよ。

問 2 図 2 のように一辺 r の正三角形の頂点に半径 a , b , c の導体球 S_1 , S_2 , S_3 が設置されている。これらの導体球にはすべて Q の電荷が与えてある。 $a, b, c \ll r$ の条件とし、各導体球にとって自身以外の導体球の電荷分布は点電荷とみなすことができる。また、これらの導体球は真空中に設置されており、真空の誘電率は ε_0 とする。

(1) 導体球 S_1 の中心の電位 V_1 を求めよ。

(2) S_1 を接地 (電位をゼロに) して電荷移動が生じたあとに接地をやめた。その次に S_2 , S_3 について S_2 , S_3 の順に同じ手続きを行った場合、各導体球に残る電荷量 Q_1 , Q_2 , Q_3 を求めよ。

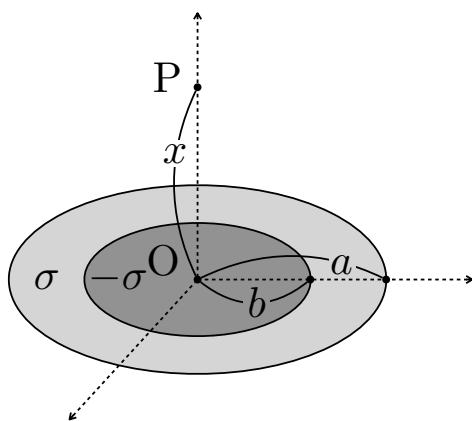


図 1

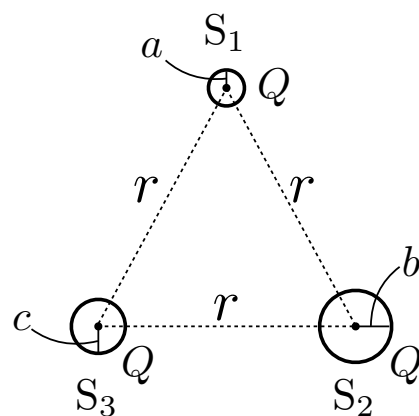


図 2

問3 図3のように、太さを無視することができる半径 a の円形導線に電流 I が流れている。これらの装置は真空中に設置されており、真空の透磁率は μ_0 とする。

- (1) 電流 I が円形導線全体に流れたとき、円の中心 O を原点とし、 O から中心軸上に x 離れた点 P での磁束密度の大きさ B を求めよ。
- (2) 電流 I が角度 α で指定される円弧 AB のみに流れているとき、円の中心 O ($x = 0$) の磁束密度の大きさ B を求めよ。

問4 図4のように、断面積 S 、磁路の長さ l 、透磁率 μ の環状鉄心に、巻数 N_1 , N_2 、抵抗 R_1 , R_2 の一次および二次コイルを巻いた変圧器が設置されており、一次コイル側に電圧 V の電池とスイッチが、二次コイル側に検流計がそれぞれ接続されている。最初スイッチは開いている。このスイッチを閉じたところ、検流計に電流が流れた。また、検流計が変圧器に与える影響は無視することができる。

- (1) 一次コイルに流れる電流の大きさ I を求めよ。
- (2) 鉄心内の磁場の強さは $\frac{N_1}{l}I$ となる。鉄心内の磁束 ϕ を求めよ。
- (3) スwitchを閉じてから十分時間が経過するまでに、検流計に流れた総電荷量 Q を求めよ。

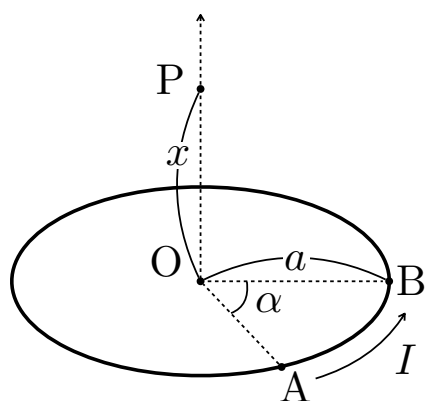


図3

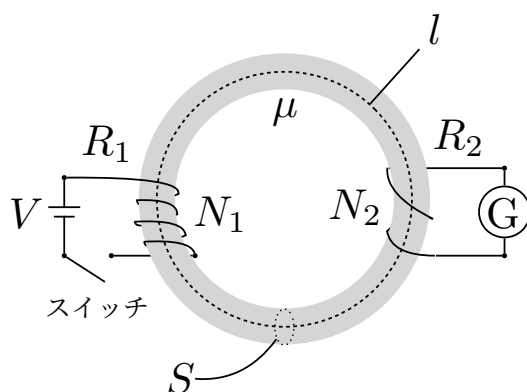


図4

III 以下の各問に答えよ.

(100 点)

問1 座標 x ($-\infty < x < \infty$) の一次元空間において, 規格化された波動関数が以下で与えられている.

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} \left(\cos(kx) + i \sin(kx) \right)$$

ここで, k は実定数である.

- (1) この粒子の確率振幅が最大となる座標 x_0 と確率振幅の最大値を求めよ.
- (2) 運動量 $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ の期待値 $\langle p \rangle$ を求めよ.

問2 量子力学では, 粒子の座標 $\vec{r} = (x, y, z)$ と運動量 $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = -i\hbar(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ は可換ではない.

- (1) 交換関係 $[e^{ikx}, p_x]$ を計算せよ. ただし, k は実定数とする.
- (2) 角運動量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ について, 交換関係 $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$ が成り立つことを示せ.

問3 座標 x ($-\infty < x < \infty$) の一次元空間を考える. ある演算子 A がエルミート演算子であるとき, 任意の波動関数 $\Psi(x)$ および $\Phi(x)$ に対して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)^* A \Phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (A \Psi(x))^* \Phi(x) dx$$

が成り立つことが知られている.

- (1) エルミート演算子の固有値が実数であることを示せ.
- (2) エルミート演算子の異なる固有値に属する固有波動関数が直交することを示せ.

問4 3次元空間において1個の陽子と1個の電子からなる水素原子を考える。

- (1) 水素原子において、陽子は、近似的に、空間内の一点で静止していると考えることができる。その理由を100字以内で答えよ。
- (2) 古典論では、電子が陽子に密着して静止した状態が最低のエネルギーを与える。これが、電子の量子力学的性質と矛盾することを100字以内で説明せよ。
- (3) 電子の座標を $\vec{r} = (x, y, z)$ とし、陽子が座標原点に固定されているとする。また、電子の質量を m 、電荷を $-e$ (< 0)、真空の誘電率を ϵ_0 とする。電子のハミルトニアンを演算子 $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ を用いて書け。
- (4) ハミルトニアンを極座標表示 $(x, y, z) = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ に変換することを考える。動径座標 r と角運動量演算子 \vec{L} により、ラプラシアンは

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2}$$

と表すことができる。電子の波動関数が動径部分と角度部分に $\Psi(\vec{r}) = R(r)\Theta(\theta, \phi)$ のように変数分離できることを説明せよ。その上で、動径波動関数 $R(r)$ に対する微分方程式を書き下せ。

- (5) $\Psi(\vec{r})$ の規格化条件に基づき、 $R(r)$ および $\Theta(\theta, \phi)$ それぞれに対する規格化条件を与えよ。(それぞれの変数に対する積分形で答えること。)
- (6) 水素原子の基底状態の波動関数は、角度に依存せず、ボーア半径 $a_B = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$ を定数として

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_B}\right)$$

と与えられる。電子が領域 $r \leq 2a_B$ に存在する確率を求めよ。ただし、以下の積分の近似値を用いても良い。

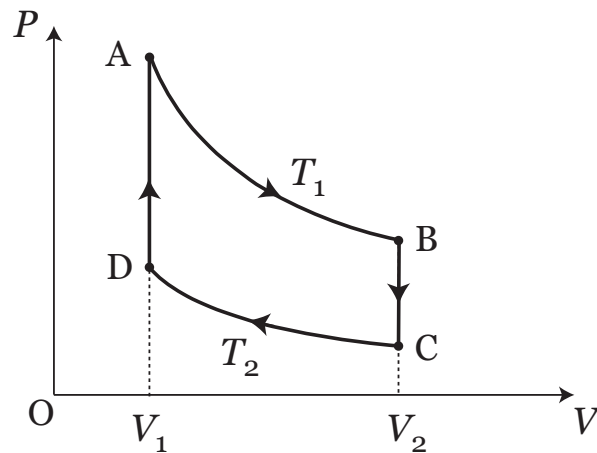
$$\int_0^4 x^2 e^{-x} dx \simeq 1.524$$

IV

以下の各問に答えよ.

(100 点)

- 問 1** 1モルの理想気体が図の道筋 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ を1サイクルとする準静的な変化をする. ここで, P は圧力, V は体積である. 図の $A \rightarrow B$ は温度 T_1 の環境での体積 V_1 から V_2 への膨張の操作, $B \rightarrow C$ は体積 V_2 で温度が T_2 の熱浴に接触させて温度が T_1 から T_2 に下がるのを待つ等積操作, $C \rightarrow D$ は温度 T_2 の環境での体積 V_2 から V_1 への圧縮の操作, $D \rightarrow A$ は体積 V_1 で温度が T_1 の熱浴に接触させて温度が T_2 から T_1 に上がるのを待つ等積操作である. 定積モル比熱 C_V は温度によらず一定であり, 気体定数を R とする.



- (1) $A \rightarrow B$ と $C \rightarrow D$ の等温操作において, 気体が吸収する熱量 Q_{AB} と Q_{CD} が, それぞれ,

$$Q_{AB} = RT_1 \log \frac{V_2}{V_1}, \quad Q_{CD} = -RT_2 \log \frac{V_2}{V_1}$$

であることを示せ.

- (2) $B \rightarrow C$ と $D \rightarrow A$ の等積操作において, 気体が吸収する熱量 Q_{BC} と Q_{DA} が, それぞれ,

$$Q_{BC} = -C_V(T_1 - T_2), \quad Q_{DA} = C_V(T_1 - T_2)$$

であることを示せ.

- (3) 1サイクルで気体が外部に行う全仕事 W_{cyc} を求めよ.

- (4) このサイクルの効率

$$\eta = \frac{W_{\text{cyc}}}{\text{高温熱源から得た総熱量}}$$

はカルノーサイクルの効率 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ より低い. このサイクルにおいて, どのような工夫をすれば, このサイクルとカルノーサイクルの効率を等しくできるか考察し, 記述せよ.

問2 内部エネルギー U , 温度 T , エントロピー S , 圧力 P , 体積 V とする. 準静的操作を考え, また, 粒子数 N の変化はないものとする. エントロピー S の変数を (U, V) に取ったときの S の全微分 dS を考えることにより, 以下の関係式を導出せよ.

$$\frac{P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_U$$

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V$$

問3 体積 V の系の中に N 個の質量 m の三次元自由粒子がある. 三次元自由粒子のエネルギーは

$$E = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \cdots + \mathbf{p}_N^2)$$

と表せる. ここで, \mathbf{p}_i は粒子 i の運動量を示す三次元ベクトルである.

(1) この系の状態数 $W(E, V)$ が

$$W(E, V) = A(2mE)^{3N/2}V^N \quad (\text{I})$$

と表されることを説明せよ. ここで, A は E と V によらない定数である. また, 半径 r の n 次元の球の体積は r^n に比例することを用いて良い.

(2) (I) 式とボルツマンの原理, そして, 問2の関係式を用いて, 状態方程式 $PV = Nk_B T$ を導出せよ. ここで, k_B はボルツマン定数である.

(3) エネルギーの期待値 (内部エネルギー) $\langle E \rangle$ が

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2}Nk_B T \quad (\text{II})$$

となることを示せ. ここで, 問2の関係式を用いて良い.

(4) 三次元自由粒子の定積熱容量 C_V を導出せよ.

(5) エネルギー

$$E = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2m}p_i^2 + \frac{k}{2}x_i^2 \right)$$

の N 個の一次元古典調和振動子の場合, エネルギーの期待値は $\langle E \rangle = Nk_B T$ となる. ここで, x_i と p_i は, それぞれ, 質点 i の平衡位置からのずれと運動量であり, m は質点の質量, k はバネ定数である. 三次元自由粒子の結果 (II) 式と比較して, その違いの理由を 200 字以内で説明せよ.

[1] 次の英文を読んで、各問に答えよ. なお、参考のために、左肩番号を付した単語の意味が文章の最後に説明してある.

Editorial: Japanese companies must heed risks of not ¹⁾ decarbonizing
(社説：日本企業は脱炭素化しないリスクに注意しなければならない)

A) Decarbonization and ²⁾ digitization have become major trends of the world economy. Will Japanese companies be able to handle this tide? Waves of ³⁾ electrification are rolling up against the automobile industry. But in Japan, electric vehicles (EV) have yet to spread widely. In April of 2021, the operation of fast chargers for electric vehicles at six roadside stations in the Wakayama Prefecture city of Tanabe in western Japan were halted, because there were not enough users to cover even the maintenance costs of the equipment. According to map company Zenrin Co. Ltd., the number of chargers across Japan at the end of ⁴⁾ fiscal 2020 dipped below that of the previous year for the first time. B) Just a decade ago, Japan had been at the cutting edge of electrification. Mitsubishi Motors Corp. and Nissan Motor Corp. were ⁵⁾ mass-producing electric vehicles ahead of the rest of the world, with the Japanese EV market taking up 30% of the world's EV market. Now, Japan is ⁶⁾ way behind China and the United States, comprising less than 1% of the world's EV market. Japan's ⁷⁾ auto industry settled for the EVs' state of affairs and let an opportunity to capture a major change in the market slip through its fingers even though it originally had a lead in the technology. But the way this unfolded is not limited to the issue of EVs.

In the 1970s, when the oil crisis and pollution were serious problems, Japanese companies enhanced their environmental technology, and improved their international competitiveness in electric appliances and cars. A government-led initiative to develop ⁸⁾ solar cells blossomed at the end of the 20th century, and at one point, C) Japan led the world in manufacturing and installing solar cells. But when government support shrank out of consideration for the ⁹⁾ power industry, which was cautious toward expanded applications of ¹⁰⁾ renewable energy, D) Japan's solar cell industry immediately lost momentum. Today, the world market is dominated by Chinese companies. It was a ¹¹⁾ gaffe made by the Japanese government and companies that couldn't get away from the fixed idea that "renewable energy plays ¹²⁾ second fiddle" to other sources of energy. E) In the digital field, Taiwanese and South Korean companies beat Japanese companies to the punch while the latter were having second thoughts about making large investments in semiconductors. Though Japan had a leg up with the i-Mode mobile internet service during the regular cell phone days, it ¹³⁾ lagged behind in smartphones, and lost its competitive edge in communication infrastructure. Management executives who ¹⁴⁾ clung on to their successes with television and cell phones and failed to ¹⁵⁾ envisage a new future that digitization could make possible bear a heavy responsibility. The electronics industry, which failed to invest in technology and human resources, lost its competitiveness, shaking even its employment foundations. F) This mistake must not be repeated. For the auto industry, which has become Japan's only ¹⁶⁾ breadwinner, decarbonization and digitization are truly like the G) "black ships" that came, led by U.S. ¹⁷⁾ Navy Commodore Matthew Perry at the end of the Edo period (1603-1867), to open Japan up to the rest of the world. H) Toyota Motor Corp., which had been hung up on hybrid cars, has shifted gears, announcing its plan to sell 3.5 million electric vehicles in 2030.

That's a 1.5 million increase from its original plan, and is the equivalent of a mid-sized auto manufacturer switching to manufacturing only electric vehicles. Sony Corp. is also ¹⁸⁾deliberating entering the EV business. Digitization has made the crossover easier, and it appears as though companies that had until now been protected by being a group company of a major auto company will be subject to ¹⁹⁾fierce competition from companies from other industries. New technologies and services such as self-driving and car-sharing are closing in on auto companies to make changes to their business models. This is because there is a chance that the main battleground of the industry could shift from car manufacturing to the creation of services that are tied to moving from one place to the next.

(The Mainichi -Japan Daily News-, Editorial, January 11, 2022, より一部引用.)

Hints: ¹⁾ decarbonizing 脱炭素化, ²⁾ digitization デジタル化, ³⁾ electrification 電化, ⁴⁾ fiscal 会計年度, ⁵⁾ mass-producing 大量生産, ⁶⁾ way behind (かなり) 負けている, 後れを取る, ⁷⁾ auto industry 自動車業界, ⁸⁾ solar cell 太陽電池, ⁹⁾ power industry 電力会社, ¹⁰⁾ renewable energy 再生可能エネルギー, ¹¹⁾ gaffe 失敗, ¹²⁾ second fiddle 脇役, ¹³⁾ lag 遅れる, ¹⁴⁾ clung 固執する (cling) の過去形, ¹⁵⁾ envisage 思い描く, ¹⁶⁾ breadwinner 一家の稼ぎ手, ¹⁷⁾ Navy Commodore 海軍提督, ¹⁸⁾ deliberate 慎重に検討する, ¹⁹⁾ fierce 激しい

問1 下線部 A) を和訳せよ.

問2 下線部 B) を和訳せよ.

問3 下線部 C) D) をそれぞれ和訳すると「日本は太陽電池の製造と設置で世界をリードした」「日本の太陽電池業界はすぐに勢いを失った」となる. なぜ, 勢いを失ったのかについて説明せよ.

問4 下線部 E) を和訳せよ.

問5 下線部 F) の This mistake が意味するところを要約して述べよ.

問6 下線部 G) の "black ships" は「黒船」を意味するが, 具体的には何を指すのか, 要約して述べよ.

問7 下線部 H) のトヨタ自動車について, 2030年までの自動車の生産に関する計画について説明せよ.

[2] つぎの文章を和訳せよ.

- (1) The Nobel Prize in Physics 2021 was awarded "for groundbreaking contributions to our understanding of complex systems" with one half jointly to Syukuro Manabe and Klaus Hasselmann "for the physical modelling of Earth's climate, quantifying variability and reliably predicting global warming" and the other half to Giorgio Parisi "for the discovery of the interplay of disorder and fluctuations in physical systems from atomic to planetary scales."
- (2) In particle physics and condensed matter physics, the target systems are different, and the calculation and experimental methods are also very different. However, looking back on the history of physics, we can see that there is a mysterious interaction between these two fields. For example, in the 1960s, critical phenomena near the second-order phase transition were actively studied in the field of condensed matter physics by methods such as the ¹⁾ coarse graining and the ²⁾ scaling theory. These can be described naturally by the theory of the ³⁾ renormalization group in the field of particles physics, which was pointed out by K. G. Wilson and developed into a modern theory of the renormalization group. At the same time, the understanding of ⁴⁾ superconductivity is progressing in the field of condensed matter physics, and the ⁵⁾ spontaneous breaking of symmetry was discussed. It was Yoichiro Nambu who pointed out that this might have been achieved even in vacuum. This point was the catalyst for the discovery of the Higgs mechanism.

Hints: ¹⁾coarse graining 粗視化, ²⁾scaling theory スケーリング理論, ³⁾renormalization group くりこみ群, ⁴⁾superconductivity 超伝導, ⁵⁾spontaneous 自発的な

[3] 大学院に進学する理由を, 100 語程度の英文で記述せよ.

[4] つぎの文章を英訳せよ.

- (1) ¹⁾ 熱力学を理解するためには, 「温度の単位」について正しく理解しておく必要がある. 温度の単位には三種類あり, 日本で一般的に使われている ²⁾ 摂氏温度 (°C), アメリカで使われる ³⁾ 華氏温度 (°F), さらに絶対温度 (K) がある. 華氏の名前は, 考案者ファーレンファイトの中国語音訳「華倫海 (Hua lin hai)」に由来する.
- (2) ⁴⁾ 中性子星は, ⁵⁾ 超新星爆発後にできる半径 10 km 程度のコンパクトな超高密度天体である. 1932 年に中性子が発見された直後にその存在が予言され, 1967 年パルサーとして見つかった.

Hints: ¹⁾ 熱力学 thermodynamics, ²⁾ 摂氏 Celsius, ³⁾ 華氏 Fahrenheit, ⁴⁾ 中性子 neutron, ⁵⁾ 超新星 supernova, ⁶⁾ パルサー pulsar