

2023 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門(物理)

2023 年 2 月 16 日(木)

注意事項

1. 全ての解答用紙(B4用紙)の受験番号欄に受験番号を記入すること.
2. 全ての解答用紙の□(左上)に大問番号(I, II, III, IV)を記入すること.
3. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること.
4. 解答用紙は片面のみを使用し, 縦置き横書きで解答すること.
5. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること.
6. 問題冊子は, 各自持ち帰ること.

I

図 1 のように、質量 M , 半径 a の一様な薄い球殻と質量 m の質点があり、それらに間に万有引力だけが作用して運動している。球殻の中心から質点への相対ベクトルを $\vec{r} = r \vec{e}_r$ として、以下の問に答えよ。ただし、万有引力定数を G とし、 $\vec{e}_r$ を r 方向の単位ベクトルとする。(100 点)

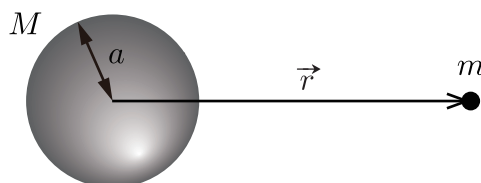


図 1

問 1 質点が球殻から受ける万有引力を求めよ。ただし、求める万有引力は、質点が球殻の内外にある場合に分けて、ベクトル量で示すこと。

問 2 球殻の質量が質点の質量より十分大きく、球殻の外に質点がある場合を考える。このとき、球殻は原点に静止しているとみなせ、質点が受ける万有引力は球殻の中心にすべての質量が集まった場合に等しい。

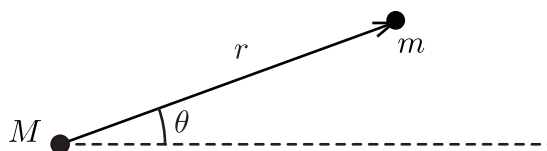


図 2

- (1) 質点に働くポテンシャルエネルギーを求めよ。
- (2) この質点の運動のラグランジアンを二次元曲座標 (r, θ) で表せ。
- (3) ラグランジュの方法を用いて、 r 方向および θ 方向の運動方程式を求めよ。
- (4) この場合、質点の角運動量が保存される。その理由を説明せよ。
- (5) 質点の運動を半径 r の円運動とみなすと、等速円運動になる。このとき、質点の速さ v を万有引力定数を用いて表せ。
- (6) 質点の運動が等速円運動とみなせるとき、運動の周期 T が r の $3/2$ 乗に比例することを示せ。

問3 次に，球殻と質点の質量が同程度で，質点は球殻の外にある場合を考える．図3のように，球殻と質点の運動は球殻の中心と質点との距離 r が一定で，それらを結ぶ直線上にある重心 G を中心に一定の角速度 ω で等速円運動している．

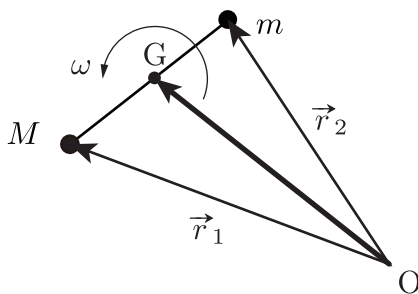


図3

- (1) 球殻の中心の位置ベクトルを $\vec{r}_1$ ，質点の位置ベクトルを $\vec{r}_2$ としたとき，重心の位置ベクトル $\overrightarrow{OG}$ を示せ．
- (2) 重心 G から球殻の中心へ向かう位置ベクトルを $\vec{r}'_1$ ，重心 G から質点へ向かう位置ベクトルを $\vec{r}'_2$ とすると，重心の定義より $M\vec{r}'_1 + m\vec{r}'_2 = 0$ となる．このとき， $\vec{r}'_1$ と $\vec{r}'_2$ を $\vec{r}$ で表すと，

$$\vec{r}'_1 = -\frac{m}{M+m}\vec{r}, \quad \vec{r}'_2 = \frac{M}{M+m}\vec{r}$$

となることを示せ．

- (3) 球殻と質点の重心 G は，原点から垂直距離 D 離れた直線上を，速さ V で等速直線運動しているとする．このとき，この系の全運動量および原点 O のまわりの全角運動量の大きさを求めよ．

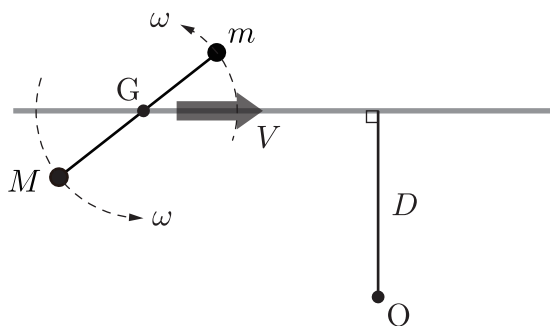


図4

II 以下の各問に答えよ.

(100 点)

問1 図1のように, 垂直に置かれた長さ 2ℓ の導線に線密度 λ の電荷が一様に分布している. この導線の中心 O から水平方向へ距離 x 離れた点を P とする. また, 導線は真空中に置かれており, 真空の誘電率を ε_0 とする.

- (1) 中心 O から距離 s にある導線上の微小部分 (微小導線) Δs が点 P につくる電位 $\Delta\phi$ が

$$\Delta\phi = \frac{\lambda\Delta s}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{s^2 + x^2}}$$

で与えられることを示せ.

- (2) 導線上の全ての電荷によってつくられる点 P の電位 ϕ を求めよ. ただし, $t = s + \sqrt{s^2 + x^2}$ において計算せよ.

- (3) 点 P での電場の大きさ E を求めよ. また, その方向を示せ.

- (4) 導線が無限の長さであるとき, 点 P での電場の大きさ E_∞ を求めよ.

問2 図2のように, 同じ中心 O をもつ内半径 a と外半径 b の導体球殻があり, その球殻の間には電気伝導率 σ (抵抗率 $\rho = 1/\sigma$) の媒質が詰まっている. この同心導体球殻と電池, スイッチから成る回路を作りスイッチを閉じると, 回路に電流 I が流れた.

- (1) 導体球殻の中心 O から距離 r ($a < r < b$) の点での電流密度 $i(r)$ を求めよ.
- (2) 導体球殻間の電気抵抗 R を求めよ. ただし, 球殻間の媒質中ではオームの法則 ($i = \sigma E$) が成り立つものとする.

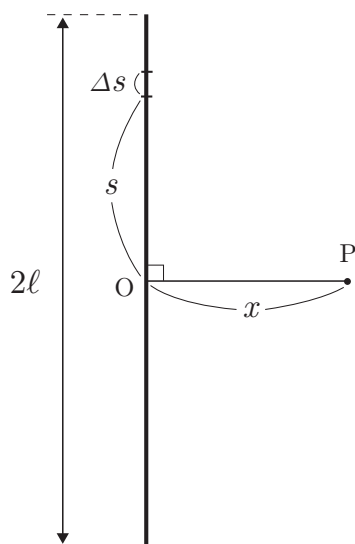


図1

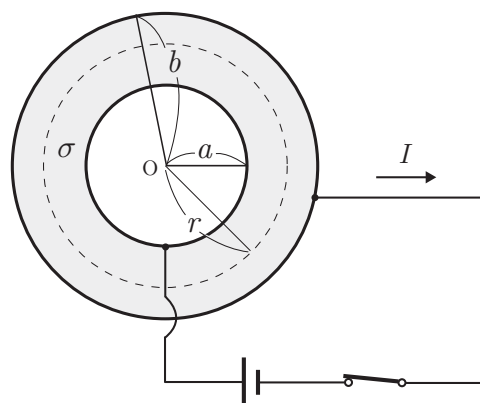


図2

問3 図3のように，半径 a の薄い導体円板の中心 O を貫いて，長さ 2ℓ ，磁荷 $+q_m$ と $-q_m$ から成る磁気モーメント M の細い棒磁石が，円板に垂直にかつ上下対称に立てられている．

(1) 中心 O から距離 x 離れた円板上の点 P の磁束密度 $B(x)$ が

$$B(x) = \frac{M}{4\pi(\ell^2 + x^2)^{3/2}}$$

になることを示せ．また，その方向を示せ．

次に，棒磁石を回転軸にして，上からみて反時計回りに円板を一定の角速度 ω で回転させた．

(2) 点 P に生じる電場の大きさ $E(x)$ を求めよ．

(3) 点 P において， x の微小距離 Δx が Δt 時間に横切る磁束 $\Delta\Phi$ を求めよ．

(4) 円板の中心と端との間に生じる起電力 V を求めよ．また，電位の高い方はどちらか，理由と共に示せ．

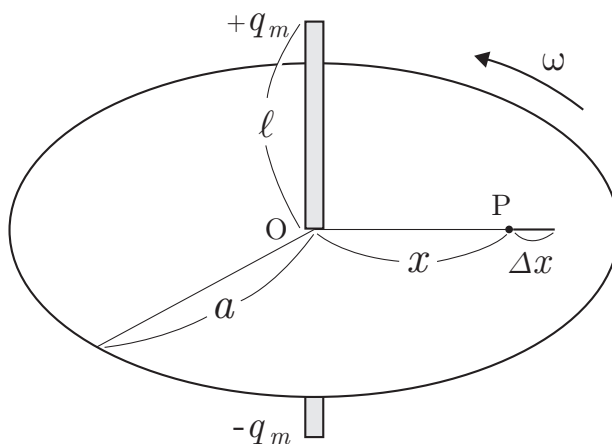


図3

III 質量 m , 角振動数 ω の 1 次元調和振動を考える. この系のハミルトニアン H は

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (1)$$

によって与えられる. 但し, 座標 x と運動量 p は演算子で, 正準交換関係 $[p, x] = -i\hbar$ を満足する. 次の各問に答えなさい.

(100 点)

問 1 交換関係 $[x, p]$ を求めなさい.

問 2 交換関係 $[p^2, x]$ を求めなさい.

問 3 互いにエルミート共役な消滅演算子 a と生成演算子 $a^\dagger$ を

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{i}{m\omega} p \right)$$

と定義するとき, 交換関係 $[a, a^\dagger]$ を求めなさい.

問 4 数演算子 $N = a^\dagger a$ を導入する. (1) のハミルトニアンは

$$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right)$$

と書けることを証明しなさい.

問 5 次の 2 つの交換関係

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger$$

を証明しなさい.

問 6 数演算子 N の固有値方程式

$$N|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

を考える. 固有値 λ はゼロ以上の実数になることを証明しなさい.

問 7 この系の基底状態, すなわち「真空」を $|0\rangle$ と書くと, 真空は $a|0\rangle = 0$ によって定義される. 規格化された固有状態 $|n\rangle$ は, 真空 $|0\rangle$ を用いると

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle$$

と書ける. そのとき, 以下の問に答えなさい.

(1) $N|n\rangle = n|n\rangle$ が成り立つことを証明しなさい.

(2) 状態 $|n\rangle$ は正規直交関係 $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ を満足することを証明しなさい.

IV 以下の各問に答えよ.

(100 点)

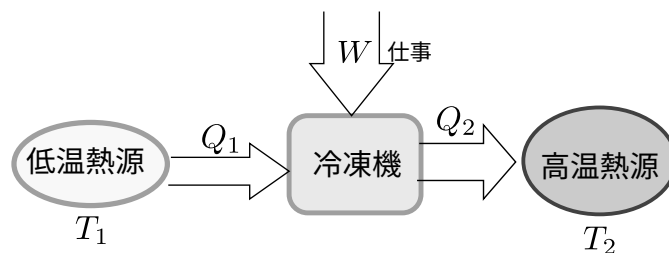
問1 熱力学・統計力学では、以下のような物理量が登場する.

F (ヘルムホルツ自由エネルギー)	G (ギブス自由エネルギー)	H (エンタルピー)
μ (化学ポテンシャル)	N (物質数)	P (圧力)
Q (熱)	S (エントロピー)	T (温度)
U (内部エネルギー)	V (体積)	W (仕事)

これらの量に関して、以下の問いに答えよ. すべての問いは複数解答可であるが、あてはまるものがない場合は「無し」と答えよ.

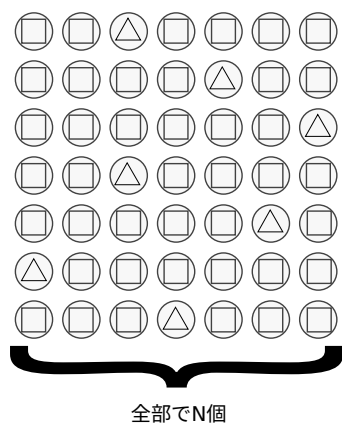
- (1) どのような物質に対しても成り立つ、上の量の間関係式の一つ挙げよ.
- (2) 示強変数はどれか.
- (3) エネルギーの次元を持つものはどれか.
- (4) 二つの量の積がエネルギーの次元を持つ例を三つ挙げよ.
- (5) 状態量でないものはどれか.
- (6) 孤立系の断熱操作もしくは自発変化によって減少することが決していない量はどれか.

問2 一つのサイクルの間に、外部から仕事 W をしてもらいながら温度 T_1 の低温熱源から Q_1 の熱を吸収し、温度 T_2 ($T_1 < T_2$) の高温熱源に Q_2 の熱を放出する冷凍機がある. サイクルを一周すると冷凍機の状態は完全にもとに戻り、かつ二つの熱源以外の場所に熱が逃げたりしないものとする.



- (1) 仕事 W を Q_1, Q_2 で表せ.
- (2) このサイクルが準静的であったとして、低温熱源から冷凍機に流れるエントロピーはどれだけか.
- (3) このサイクルが可逆サイクルであったとすると、 W を T_1, T_2, Q_1 で表し、 W の符号を判定せよ.
- (4) 可逆サイクルでなかったとすると、(3) で求めた式はどのように変わり、 W の符号はどうか.

問3 N 個の原子からなる固体がある．これらの原子はエネルギー 0 を持つある状態（以下， $\square$ で表す）と，エネルギー ε を持つ状態（以下， $\triangle$ で表す）のどちらかのみを取れるものとする．原子が存在できる場所は原子数と同じ N 点あり，固体なので原子が場所を移動することはない．



- (1) ボルツマンの式 $S = k \log W$ (W は配置の場合の数) を使って， $\triangle$ の状態が n 個あるときのエントロピーを計算せよ．スターリングの公式 $N! \simeq N \log N$ を使ってよい．
- (2) 上で求めたエントロピーの式を用いて，原子の持つ全エネルギーが $U = n\varepsilon$ であるときのヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ．
- (3) 熱平衡状態で温度が一定の状況ではヘルムホルツの自由エネルギーは極小値を取り， $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$ が成立する．温度 T のときの平衡状態での n を求めよ．
- (4) 同じ問題をカノニカル分布で考えよう．まず，一個の粒子の分配関数はどうなるか．
- (5) N 個の分子全体についての分配関数を求めよ．
- (6) 分配関数からヘルムホルツ自由エネルギーを求めたのち， $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ を使ってエントロピーを求めて k, N, n で表すと，(1) の結果と一致することを確認せよ．

2023 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2023 年 2 月 16 日(木)

注意事項

1. 全ての解答用紙(B4用紙)の受験番号欄に受験番号を記入すること.
2. 解答用紙は片面のみを使用し, 縦置き横書きで解答すること.
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること.
4. 問題冊子は, 各自持ち帰ること.

以下の I ～ V に答えよ.

(100 点)

I 以下の文章を読み、次の問いに答えよ.

The first image of the supermassive black hole at the center of ¹⁾the Milky Way, ²⁾Sagittarius A*, was just released by astronomers. (a)Technically, black holes are unseeable. They trap all light that falls in. That's why photographing one is sort of a paradox.

This is actually a picture of the black hole's shadow- a dark circular ³⁾silhouette set against the glowing matter surrounding the black hole. The astronomers captured the image using a worldwide network of radio observatories called the Event Horizon Telescope, or the EHT. The EHT uses a method called ⁴⁾Very Long Baseline Interferometry, or VLBI. Basically this means that radio observatories around the world combine into a single virtual Earth-sized telescope. It's literally the highest resolution technique in all of astronomy.

(b)In April 2017, astronomers spent nights pointing these telescopes ⁵⁾in unison at Sagittarius A* and other supermassive black holes in other galaxies. That's when they got the famous picture of the black hole at the center of the galaxy ⁶⁾M87, which they released in 2019. M87 is 55 million light years away from us and contains the mass of six and a half billion suns. That's a lot. Our black hole, Sagittarius A*, is much smaller but much closer. It's the size of ⁷⁾Mercury's orbit around our sun and 26,000 light years from Earth. Because Sagittarius A* is smaller than M87, the shredded matter orbiting it circles it much faster. That means the appearance of the black hole changes constantly. That's also why it's taken years to extract a clear image of Sagittarius A* from the ⁸⁾petabytes of data collected during the 2017 observing run. Think of it like (c)taking a ⁹⁾long exposure photograph of a dancer. Because the black hole changes more quickly, it's more difficult to photograph.

The astronomers say that in the future, as they add more ¹⁰⁾observatories to the EHT, they'll even be able to make movies of Sagittarius A*. What would that look like? Videos of matter circling the drain before falling into the ¹¹⁾abyss.

(“The Black Hole in the Middle of our Galaxy Looks Like This” by S. Fletcher, J. Drakeford, T. Bose, J. DelViscio, *SCIENTIFIC AMERICAN* より引用)

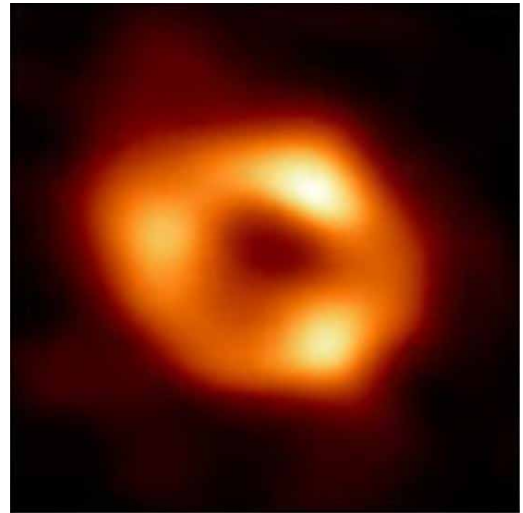


Figure: Image of the black hole at the center of the Milky Way Galaxy.

Hints: ¹⁾the Milky Way 天の川銀河, 銀河系, ²⁾Sagittarius A* いて座 A*, ³⁾silhouette シルエット, 輪郭, ⁴⁾Very Long Baseline Interferometry 超長基線電波干渉法, ⁵⁾in unison 一斉に, ⁶⁾M87 おとめ座方向にある楕円銀河の名称, ⁷⁾Mercury 水星, ⁸⁾petabyte ペタバイト (データ量の大きさを表す単位), ⁹⁾long exposure photograph 長時間露光写真, ¹⁰⁾observatory 観測所, 天文台, ¹¹⁾abyss 奈落, 深淵

問 1 下線部(a)を和訳せよ

問 2 下線部(b)を和訳せよ

問 3 EHT について, その特徴も併せて日本語で説明せよ.

問 4 下線部(c)は何を例えているかを日本語で説明せよ.

II 以下の問いに答えよ

- (1) The special theory of relativity is built from the starting point of satisfying the “¹⁾principle of special relativity” and the “principle of constant light speed”. This theory shows that energy (E) is equal to the product of mass (m) and the square of the speed of light (c). Write the equation for this relationship.
- (2) If the magnetization M is proportional to the magnetic field H , we can write $M = \chi H$ using the ²⁾susceptibility χ . ³⁾Curie’s law is one of the relations of ⁴⁾paramagnetic susceptibility χ , in which the susceptibility is inversely proportional to temperature (T), and its proportionality constant is indicated by the ⁵⁾Curie constant (C). Write an expression for the susceptibility in this case.

Hints: ¹⁾principle 原理, ²⁾susceptibility 磁化率, 感受率, ³⁾Curie’s law キュリー則, ⁴⁾paramagnetic 常磁性, 常磁性の, ⁵⁾Curie constant キュリー定数

III 以下の文章を和訳せよ.

- (1) Energy is important throughout the natural sciences because it obeys conservation laws. Changes in nature occur so that the total amount of energy within a closed system remains constant.
- (2) When ordinary metals are placed in a magnetic field, they exhibit small ¹⁾diamagnetism due to the orbital motion of electrons and weak ²⁾paramagnetism due to spin. On the other hand, ³⁾superconductors try to eliminate the magnetic field from their interior. This is called the ⁴⁾Meissner effect.

Hints: ¹⁾diamagnetism 反磁性, ²⁾paramagnetism 常磁性, ³⁾superconductor 超伝導体, ⁴⁾Meissner effect マイスナー効果

IV 以下の文章を英訳せよ.

- (1) ¹⁾マクスウェルは電磁気学を確立したばかりでなく, ²⁾電磁場という考え方を通して「場」の概念を導入し, ³⁾二十世紀の物理学の進展に大きな影響を与えた.
- (2) 熱力学における状態は, ⁴⁾熱平衡状態に限定される. それらの状態の自由エネルギーが温度や磁場などの外部変数に対して ⁵⁾滑らかな関数となる領域を「相」と呼ぶ. その境界を「相転移点」という.

Hints: ¹⁾マクスウェル Maxwell, ²⁾電磁場 electromagnetic field, ³⁾二十世紀 the 20th century
⁴⁾熱平衡 thermal equilibrium, ⁵⁾滑らかな関数 smooth function

V 大学院に進学する理由を, 100 語程度の英文で記述せよ.