

2024 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

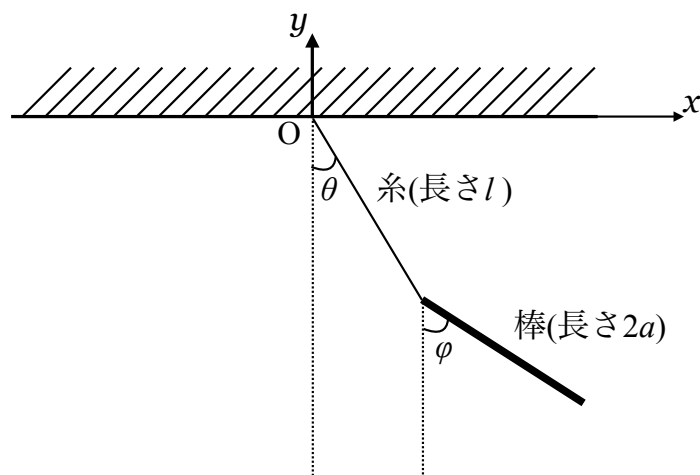
入学試験問題
専門(物理)

2023 年 8 月 23 日(水)

注意事項

1. 全ての解答用紙(B4用紙)の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 全ての解答用紙の□(左上)に大問番号(I, II, III, IV)を記入すること。
3. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙は片面のみを使用し、縦置き横書きで解答すること。
5. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
6. 問題冊子は、各自持ち帰ること。

Ⅰ 図のように、質量と伸縮を無視できる長さ l の糸が天井からつるされ、糸の他端には長さ $2a$ 、質量 M の一様な細い棒が接続されている。糸がたるまないようにしながら棒を持ち上げ、手を離したところ、糸と棒は運動を始めた。天井と糸の接点を原点 O として、右向きに x 軸をとり、鉛直上向きに y 軸をとるとき、糸と棒は xy 平面内でのみ運動できるものとする。糸と棒が、鉛直線となす角をそれぞれ θ, φ とし、重力加速度の大きさを g とする。また、糸は運動中にたるまないものとする。以下の各問に答えよ。 (100点)



- 問1 棒の重心座標と重心速度の x, y 成分をそれぞれ求めよ。
- 問2 棒のポテンシャルエネルギー U を求めよ。
- 問3 慣性モーメントの物理的意味を簡潔に説明せよ。
- 問4 棒の重心を通り、 xy 平面に垂直な回転軸を考える。その軸のまわりにおける、棒の慣性モーメント I を求めよ。
- 問5 棒の運動エネルギー T が

$$T = \frac{1}{2} M \left\{ l^2 \dot{\theta}^2 + 2al\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) + \frac{4}{3} a^2 \dot{\varphi}^2 \right\}$$

となることを示せ。ここで、 $\dot{\theta}$ と $\dot{\varphi}$ はそれぞれ θ と φ の時間微分を表す。計算の過程で $\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi$ を用いて良い。

- 問6 棒のラグランジアン L から、 θ と φ に関する運動方程式をそれぞれ導け。(問5が解けなかったとしても、問5で示された T を用いて解答して良い。)

II

以下の各問に答えよ。

(100 点)

問 1 電磁場の基礎方程式であるマクスウェル方程式を記述し、各々の方程式の物理的意味を述べよ。なお、必要な物理量は定義して用いてよい。

問 2 図 1 のように、導体板を xy 平面上に置いて、電流を x 軸に沿って流す。

- (1) 導体内の電子が、速さ v で x 軸の正の方向に運動している場合を考える。導体板の y 軸方向の長さを d とする。磁束密度 $\mathbf{B}$ の一様な磁場を z 軸方向にかけたとき、図の端子 ab 間に発生する電位差を求めよ。また、電位差が生じる理由についても説明せよ。
- (2) 次に、正に帯電した粒子が x 軸の負の方向に運動している場合はどうなるか、説明せよ。

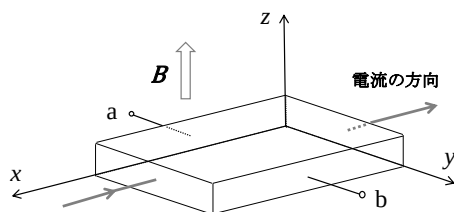


図 1

問 3 真空中で、半径 a の球内に電荷が一様な電荷密度で分布している。ここでは、全電荷量を q ($q > 0$) とし、球の中心からの距離を r とする。

- (1) 球内外の電場の強さ E を求めよ。
- (2) 球内外の電位 V を求めよ。ただし、無限遠における電位をゼロとする。
- (3) 電場 E と電位 V を、距離 r の関数として各々グラフに示せ。
- (4) 静電エネルギー U を求めよ。

問 4 図 2 のように、インダクタンス L のコイルと抵抗 R を直列にして電池につなぎ、スイッチ S を a 側に入れて強さ I の定常電流を流す。ある瞬間、スイッチ S を b 側に切り換えて、コイルと抵抗だけの閉じた回路にした。

- (1) スイッチを切り換えてから後の、コイルに流れる電流の時間変化を求めよ。
- (2) コイルに流れる電流が消えるまでの間に抵抗に発生するジュール熱を求め、それがコイルに蓄えられていた磁場のエネルギー $\frac{1}{2}LI^2$ に等しいことを示せ。

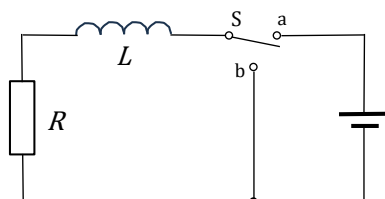


図 2

III

質量 m の粒子が 1 次元シュレーディンガー方程式,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \hat{H} \Psi(x, t),$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x),$$

に従って, x 軸方向に沿った 1 次元運動をしている。ここで, $\Psi(x, t)$ は粒子の波動関数, $\hat{H}$ はハミルトニアン演算子, $\hbar$ はプランク定数である。以下の各問に答えよ。(100 点)

問 1 波動関数 $\Psi(x, t)$ が, $\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t)$ のように変数分離可能であるとき, 分離定数 E を用いると, 関数 $\psi(x)$ は時間に依存しないシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi,$$

を満たし, 関数 $\varphi(t)$ は

$$\varphi(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}Et\right],$$

となることを示せ。関数 $\varphi(t)$ が満たす方程式も書くこと。

この粒子が無限に深い井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{for } x < 0 \text{ or } a < x \end{cases},$$

の中を運動する場合を考える。井戸の外部 ($x < 0$ または $a < x$ の領域) では, 関数 $\psi(x) = 0$ である。すなわち, 境界条件 $\psi(0) = \psi(a) = 0$ を満たしている。

問 2 このとき, $E \geq 0$ となる理由を説明せよ。

問 3 時間に依存しないシュレーディンガー方程式が単振動の方程式と同じ形であることから, その一般解は

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx,$$

となる。このとき, 境界条件を満たすために, E の取りうる値が自然数 n ($= 1, 2, \dots$) に対応して無限個あることを示し, この値 E_n ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ。また, E_n に対応する解 $\psi_n(x)$ を求めよ。ただし,

$$\int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = 1,$$

となるように規格化すること。

ここで求めた $\psi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) はハミルトニアン $\hat{H}$ の固有関数の正規直交完全系となっている。

問 4 このとき、規格化された任意の波動関数 $\psi(x)$ に対するハミルトニアンの期待値 $\langle H \rangle$ は、問 3 で求めた固有状態の中の、基底状態のエネルギー固有値 E_1 より大きくなる、すなわち、

$$\langle H \rangle := \int_0^a \psi(x)^* \hat{H} \psi(x) dx \geq E_1$$

となることを示せ。

このことから、規格化された任意の関数 $\psi(x)$ を用いてハミルトニアンの期待値 $\langle H \rangle$ を計算すると、これは基底状態のエネルギー固有値 E_1 の上限値を与えることになる。このことを利用して、波動関数の形が求まっていない場合でも、適当な関数 $\psi(x)$ の形を仮定して、 $\langle H \rangle$ を計算することで、 E_1 の値を推定することができる。

問 5 波動関数 $\psi(x)$ を

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ A(a-x) & \text{for } \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases},$$

とした場合と、

$$\psi(x) = Bx(x-a),$$

とした場合について、それぞれの波動関数を

$$\int_0^a |\psi(x)|^2 dx = 1,$$

のように規格化した後、それぞれの状態に対するハミルトニアンの期待値 $\langle H \rangle$ を求め、どちらの場合が、基底状態のエネルギー固有値 E_1 により近くなるか求めよ。

IV 以下の各問に答えよ。

(100 点)

問 1 次の状態量を示量変数と示強変数に分けよ。

圧力 (p), 体積 (V), 温度 (T), 内部エネルギー (U), エントロピー (S), ヘルムホルツの自由エネルギー (F), ギブスの自由エネルギー (G)。

問 2 カルノーサイクルの効率 $\eta = (T_2 - T_1)/T_2$ を使って答えよ。

- (1) 高温熱源を 500K としたとき, 低温熱源が 400K, 300K の場合の各々の効率を求めよ。
- (2) カルノーサイクルの効率を良くするためにはどのようにしたらよいか説明せよ。

問 3 圧力 p , 体積 V , 温度 T の状態にある物質に熱量 δQ を与えると, 物質の p , V , T は変化し別の状態に移る。また, それに伴い内部エネルギー U も変化する。なお, ここでいう状態変化は準静的変化を考える。

- (1) 内部エネルギー U を, T と V の関数とみなして全微分 dU を dT , dV と関係させて表せ。
- (2) 熱量の変化量を与える式 $\delta Q = dU + pdV$ から, 定積比熱 C_V と定圧比熱 C_p との間には, 以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$C_p = C_V + \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

- (3) 定圧比熱 C_p が定積比熱 C_V より大きい理由を述べよ。

問 4 温度 T の熱浴と接している N 個の独立で局在した粒子系を考える。各々の粒子は 2 つのエネルギー準位 ε および $-\varepsilon$ を取り得るとする。系の温度が T に保たれている場合, この系をカノニカル分布によって考える。

- (1) 系の分配関数 Z を求めよ。なお, 1 粒子あたりの分配関数 z は,

$$z = \sum_{E_i} e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

と表すことができ, E_i は粒子の i 番目のエネルギー準位である。ただし, k_B はボルツマン定数である。

- (2) 次に, 系におけるヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。
- (3) さらに, 上で求めた F よりエントロピー S を求めよ。
- (4) ここで, 系の内部エネルギー U は次式で表されることを示せ。

$$U = -N\varepsilon \frac{\sinh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{\cosh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}$$

- (5) 内部エネルギー U より比熱 C は次のように求められる。さらに、縦軸を比熱、横軸を温度とするグラフの概形も以下のように描ける。ただし、グラフでは無次元化されている。このように比熱にピークが表れる理由を述べよ。

$$\begin{aligned} C &= -\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \\ &= Nk_B \left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)^2 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)} \end{aligned}$$

