

2024 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門（物理）

2024 年 2 月 15 日(木)

注意事項

1. 全ての解答用紙（B4 用紙）の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 全ての解答用紙の口（左上）に大問番号（Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ）を記入すること。
3. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙は片面のみを使用し，縦置き横書きで解答すること。
5. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
6. 問題冊子は，各自持ち帰ること。

- I 図1のように、半径 a 、質量 M の一様な円盤が粗い水平面上をすべらずに運動している場合を考える。円盤の重心の水平方向の速度を v 、静止摩擦力を F とし、円盤の回転を速くするため、円盤の回転中心より r だけ離れた2点に偶力 f を与える。以下の各問に答えよ。(100 点)

問1 円盤の回転軸周りの慣性モーメント I が

$$I = \frac{1}{2}Ma^2$$

となることを示せ。

問2 「偶力があると円盤が加速して運動する」理由について文章で説明せよ。その際、「静止摩擦力」「作用」「反作用」「偶力」などの言葉を適切に用いなさい。

問3 円盤の重心の水平方向の運動方程式を書け。

問4 円盤の回転の運動方程式を書け。

問5 偶力 f の大きさを、 F 、 M 、 r 、 a 、 I を用いて表せ。

問6 円盤の重心の最大加速度を求めよ。ただし、円盤と地面との間の静止摩擦係数を μ 、重力加速度の大きさを g とする。

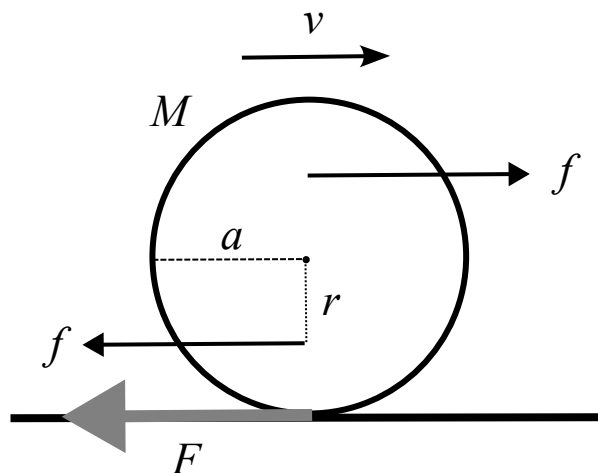


図1

II 以下の各問に答えよ。

(100 点)

問 1 真空中のマクスウェル方程式は、

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1a)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1b)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1c)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1d)$$

という 4 つの式からなる。ただし、 $\mathbf{E}$ は電場、 $\mathbf{B}$ は磁束密度、 ρ は電荷密度、 $\mathbf{j}$ は電流密度、 ε_0 および μ_0 はそれぞれ真空の誘電率および透磁率である。

(1) 4 つの方程式から 2 つを選び、それらがどのような電磁気現象を表すか説明せよ。

(2) マクスウェル方程式から

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$$

を導け。ただし、任意のベクトル場 $\mathbf{X}$ について $\text{div}(\text{rot } \mathbf{X}) = 0$ が恒等的に成り立つことは証明せずに用いてよい。さらに、この式がどのような性質を表すか説明せよ。

問 2 (1) 導体とはどのような物体であるか述べよ。

(2) 静電場中に置かれた平衡状態にある導体の内部に電場が存在しない理由を述べよ。

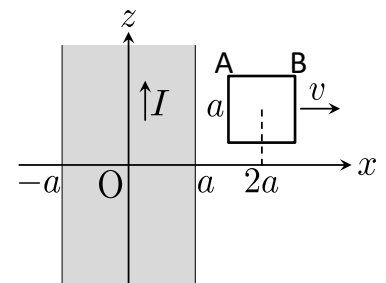
(3) 前問の性質を用いて、導体内のすべての点で電位が一定であることを示せ。

問 3 z 軸を軸とする半径 a の無限に長い円柱形の領域があり、円柱内を z 軸の正の向きに一様な電流密度で定常電流 I が流れている。円柱の内外の空間の透磁率はいずれも μ_0 であるものとする。

(1) 円柱内の電流密度の大きさ j を求めよ。

(2) 円柱の中心軸からの距離が r である点における磁束密度の大きさ $B(r)$ を求め、 r の関数として $B(r)$ のグラフの概形を図示せよ。

(3) 1 辺の長さ a の正方形の回路が xz 平面内を x 軸の正の向きに一定の速さ v で並進運動している。右図に示すように、回路の辺 AB は x 軸と平行であるとする ($-a \leq x \leq a$ の灰色の領域は円柱の断面を表す)。回路の抵抗が R であるとき、回路の中心が $x = 2a$ の位置を通過する瞬間に回路を流れる電流 J を求めよ。また、この電流の向きは図の “A $\rightarrow$ B” または “B $\rightarrow$ A” のどちらであるか答えよ。



III 以下の各問に答えよ。

(100 点)

問1 ラザフォードの原子模型では、水素原子は陽子・電子1つずつからなり、陽子は電子よりもはるかに重いので、電子が、静止した陽子を中心とする半径 r の円周を速さ v で等速円運動すると考えた。ボーアは、水素原子の発光スペクトルが、連続的ではなく不連続・離散的な系列をなしていることをもとに、角運動量も離散化(量子化)されなければならないとして、角運動量が、

$$n\hbar \quad (\text{ただし, } n=1, 2, 3, \dots)$$

であるべきと提案した。電子の質量を m , 単位電荷を e , 真空の誘電率を ϵ_0 とする。

- (1) 「速さ v , 半径 r の等速円運動をする質量 m の電子の角運動量が、上記の離散化された角運動量に等しい」という式を表せ。
- (2) (1)の結果と、等速円運動の遠心力が静電気力とつり合うことを用いて、半径 r を ϵ_0 , $\hbar$, m , e , n を用いて表せ。

問2 一般に3次元空間中の粒子(質量 m)の波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ に対して

$$P(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)$$

で確率密度を定義し、確率の流れ密度 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ を

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2im} [\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi]$$

で定義する。

- (1) 次の等式を導け。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) = -\text{div } \mathbf{S}$$

ただし、 $\text{div } \mathbf{S}$ は $\mathbf{S}$ の発散を表す。

ヒント：時間に依存するシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi \quad (U \text{ はポテンシャル})$$

および、その複素共役を取った式を利用すればよい。

次に、一直線(x 軸)上を運動する質量 m の粒子があり、この粒子には図1のようなポテンシャル $U(x)$ が働くとする。以下、ポテンシャルの左側から入射する粒子がポテンシャルの山に当たり、その山を透過する現象を扱う。ポテンシャルの頂上 U_0 から十分離れた領域では、ポテンシャルの影響はないとみなせ、

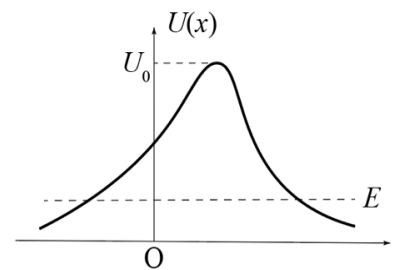


図1

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (x \rightarrow -\infty)$$

$$\psi(x) = Ce^{ikx} \quad (x \rightarrow \infty)$$

とおける。ここで、 $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ で、 E は粒子のエネルギー ($E > 0$), A, B, C はそれぞれ入射波、反射波、透過波の振幅である。以下の R, T をそれぞれ反射率、透過率という。

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}, \quad T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

(2) 一次元座標では、 $\mathbf{S}$ は x 成分のみが現れ、

$$S(x) = \frac{\hbar}{2im} \left[\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \left(\frac{d\psi^*}{dx} \right) \psi \right]$$

となる。次のようになることを示せ。

$$S(x) = \frac{\hbar k}{m} (|A|^2 - |B|^2) \quad (x \rightarrow -\infty), \quad S(x) = \frac{\hbar k}{m} |C|^2 \quad (x \rightarrow \infty)$$

(3) エネルギー E に対する一次元のシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi$$

および、その複素共役をとることによって、 $S(x)$ が x によらず定数であることを示せ。さらに、(2)で示されたことを用いて、一般に $R + T = 1$ の関係が成り立つことを示せ。

(4) (1)から(3)で述べられたことは、粒子に図2のような箱型ポテンシャル (厚さ a) が働くとした際の問題にそのまま適用することができ、その結果、透過率 T は、

$0 < E < U_0$ の場合、

$$T = \frac{4E(U_0 - E)}{U_0^2 (\sinh \beta a)^2 + 4E(U_0 - E)}, \quad \beta = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

と求められる。ただし、 $\sinh \beta a = (e^{\beta a} - e^{-\beta a})/2$ である。 $\beta a \gg 1$ の場合、以下の近似式が成り立つことを示せ。

$$T \cong \frac{16E(U_0 - E)}{U_0^2} e^{-2\beta a}$$

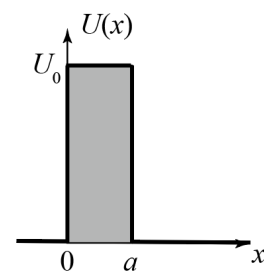


図 2

IV 以下の各問に答えよ。

(100 点)

問1 1モルの単原子分子からなる理想気体が、温度 T_0 、体積 V_0 の状態にある。気体定数を R とする。

- (1) 温度 T_0 を一定に保ちながら、体積を V_0 から V_1 に膨張させた。このとき気体が外部から吸収した熱量を求めよ。
- (2) 続いて、断熱的に気体を圧縮したところ、気体の温度が T_1 (ただし $T_1 > T_0$) となった。この過程で気体が外部からなされた仕事を求めよ。
- (3) さらに、断熱圧縮を体積が V_0 に戻るまで続けた。このときの気体の温度 T_2 を T_0 、 V_0 、 V_1 を用いて表せ。

問2 温度 T 、エントロピー S 、体積 V 、圧力 P 、内部エネルギー E の系がある。

- (1) ヘルムホルツの自由エネルギーが $F = -TS + E$ と与えられることに基づいて、 F の全微分が $dF = -SdT - PdV$ となることを示せ。
- (2) 以下のマクスウェルの関係式が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

- (3) この系において A を定数として状態方程式 $PV = AT$ が成り立つとき、内部エネルギーが体積 V に依存しないことを示せ。

問3 スピン $1/2$ を有する N 個の原子が磁場中に置かれている。各スピンは $\uparrow$ と $\downarrow$ の2状態をとり、それぞれのエネルギーは、磁場の大きさを H として、 $\uparrow$ 状態のとき $-\mu H$ 、 $\downarrow$ 状態のとき μH と与えられる。ただし、 μ はスピン磁気モーメントの大きさを表し、ボルツマン定数を k とする。

- (1) この系の温度が T に保たれているとき、分配関数 Z を求めよ。
- (2) $\uparrow$ 状態の原子数を $N_\uparrow$ とする。温度 T における熱平均値 $\langle N_\uparrow \rangle$ を求めよ。
- (3) 全系の磁化を $M = \mu(\langle N_\uparrow \rangle - \langle N_\downarrow \rangle)$ で定義する。磁化 M を磁場 H の関数として求め、縦軸 M 、横軸 H としてグラフの概形を描け。
- (4) 全系の熱容量 C を温度 T の関数として計算し、縦軸 C 、横軸 T としてグラフの概形を描け。