2025 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門(物理)

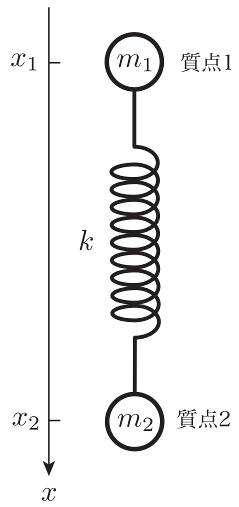
2024 年 8 月 28 日(水)

注意事項

1. 全ての解答用紙(B4用紙)の受験番号欄に受験番号を記入すること.
2. 全ての解答用紙の□(左上)に大問番号(Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ)を記入すること.
3. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること.
4. 解答用紙は片面のみを使用し, 縦置き横書きで解答すること.
5. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること.
6. 問題冊子は, 各自持ち帰ること.

I

質量 m_1 の質点 1 と質量 m_2 の質点 2 を，質量の無視できる自然長 l，バネ定数 k のバネの両端に取り付けた．質点 1 を持って吊り下げ，そのときの質点 1 の位置を原点とする。十分時間が経過した後に，静かに手を離した．図のように，ある時刻の質点 1 と 質点 2 の位置がそれぞれ x_1, x_2 であったとき，下の各問に答えよ．ただし，これらの質点とバネからなるこの系は x 軸上のみで運動し，図の下向きを x 軸の正の向きとする．また，重力加速度の大きさを g とし，空気抵抗は無視する．　(100 点)



問 1　バネの自然長からの変位 x_D と，重心座標 x_G を示せ.

問 2　この系のラグランジュの関数 L を示せ.

問 3　ラグランジュの運動方程式により，質点 1，質点 2 についての運動方程式を示せ.

問 4　x_G を用いて重心運動の運動方程式，x_D を用いて相対運動の運動方程式をそれぞれ示せ.

問 5　重心運動，相対運動がどのような運動になるか，運動方程式を基に議論せよ.

問 6　相対運動の周期 T を示せ.

Ⅱ 以下の各問に答えよ．真空中の誘電率と透磁率をそれぞれ ε_0 と μ_0 とする． (100 点)

問 1 図 1 で示すように，真空中に置かれた内径 R_1，外径 R_2 の導体球殻に電荷 $+Q$ が与えられ，球殻の中心には点電荷 $-q$ が設置されている．また，球殻の中心からの距離を r とする．

(1) 導体球殻の内側表面と外側表面の電荷面密度 σ_1，σ_2 をそれぞれ求めよ．

(2) 領域 1 $(0 < r < R_1)$, 領域 2 $(R_1 < r < R_2)$, 領域 3 $(R_2 < r)$ でのそれぞれの電場の大きさ E を r の関数として示せ．

(3) この導体球殻を接地 (アース) したところ，導体球殻内の電荷量が変化した．接地後，十分に時間が経過した状態での導体球殻の総電荷量 Q' を電位を求めることで答えよ．

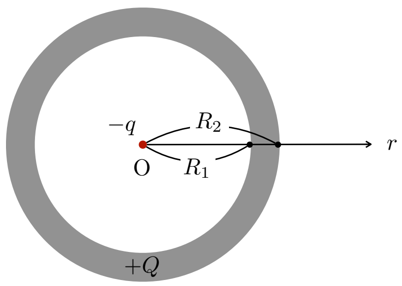


図 1

問 2　図 2(a) で示すように，真空中に設置された一辺 a の正六角形回路に図の矢印の向きに電流 I が流れている．この回路が作る磁束密度の大きさ B について考える．

(1)　図 2(b) のように，直線 AB に流れる電流 I が直線 AB から垂直に l 離れた位置にある点 Q に作る磁束密度の大きさが，

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}\cos\theta_0, \tag{1}$$

になることを，ビオ・サバールの法則を用いて示せ．ただし，$\angle$QAB$=\angle$QBA$=\theta_0$ とする．

(2)　図 2(a) で示す正六角形回路が中心 O に作る磁束密度の大きさ B を式 (1) を用いて求めよ．

(3)　図 2(c) で示すように正六角形回路の中心 O から回路面に垂直に x の距離の点 P の磁束密度の大きさ B を求めよ．

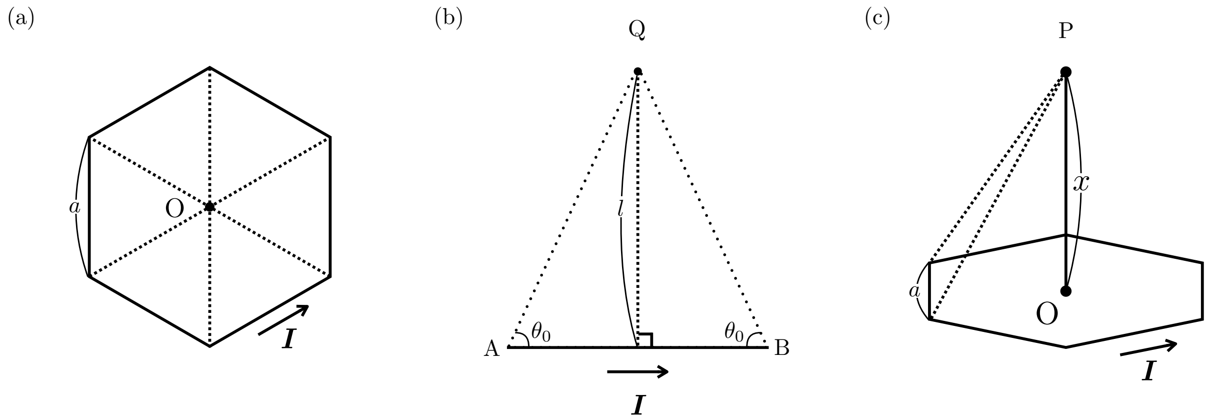


図 2

問 3　マクスウェル方程式から波動方程式を導出し，それに従う電磁波の速さが光速と一致することを以下の手順で示す．ただし，時間を t とする．

(1)　真空中において，電荷も電流も存在しない場合のマクスウェル方程式を電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を用いて表せ．

(2)　電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ がそれぞれ三次元の波動方程式 $\left(\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{u} = 0$ と同じ形になることを (1) の結果を用いて示せ．ここで，$\boldsymbol{u}$ は時間 t における各位置の振動の変位を表す関数であり，v は波動の速度の大きさを表している．

(3)　(2) で求めた波動方程式に従う電磁波の速さを求め，それが光速と一致することを示せ．

III　以下の各問に答えよ．$\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割った定数である．(100 点)

問１　規格化された任意の波動関数 ψ に対して，1 次元の位置座標 x の演算子 $\hat{x}$ と運動量 p の演算子 $\hat{p} = -i\hbar(\partial/\partial x)$ の測定値の標準偏差が

$$\Delta x = \sqrt{\langle\ (\Delta\hat{x})^2\ \rangle}\ , \qquad \Delta p = \sqrt{\langle\ (\Delta\hat{p})^2\ \rangle}$$

と書けたとする．ただし，$\Delta\hat{x} = \hat{x} - \langle x\rangle$ と $\Delta\hat{p} = \hat{p} - \langle p\rangle$ は期待値からのずれを表す演算子であり，$\langle x\rangle$ と $\langle p\rangle$ は，それぞれ位置と運動量の観測の期待値を表す．このとき，

$$\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

が成り立つことを，以下の手順で示す．

(1)　ある演算子 $\hat{A}$ がエルミート演算子であるとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{A}\psi dx = \int_{-\infty}^{\infty}(\hat{A}\psi)^*\psi dx$$

が成り立つ．演算子 $\Delta\hat{x}$ と $\Delta\hat{p}$ がエルミート演算子であることを示せ．ただし，$\psi^*\psi$ は遠方で十分に速くゼロに近づくと仮定する．

(2)　$\Delta\hat{x}$ と $\Delta\hat{p}$ の間に

$$[\Delta\hat{x},\ \Delta\hat{p}] = i\hbar$$

の交換関係が成り立つことを示せ．

(3)　a を実数としたとき，$(\Delta\hat{x} + ia\Delta\hat{p})\psi$ の自分自身との内積は

$$(\ (\Delta\hat{x} + ia\Delta\hat{p})\psi,\ (\Delta\hat{x} + ia\Delta\hat{p})\psi\ ) \geq 0$$

である．(1) と (2) の結果とこの式を利用し，

$$a^2(\psi,\ (\Delta\hat{p})^2\psi) - a\hbar + (\psi,\ (\Delta\hat{x})^2\psi) \geq 0 \qquad - \quad (*)$$

のように書き直せることを示せ．ただし，$a \neq 0$ である．また，任意の波動関数 ϕ，χ に対して，内積 $(\phi,\ \chi)$ は

$$(\phi,\ \chi) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi^*\chi dx$$

の演算を表すものとする．

(4)　(3) の $(*)$ 式の左辺が，a の 2 次関数として非負であるという事実を使い，

$$\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

が成り立つことを示せ．

問2　時間に依存しないハミルトニアンを $\hat{H}$，各時刻 t における状態ベクトルを $|\psi(t)\rangle$ とする．状態ベクトルが，時間発展演算子 $\hat{U}(t,t_0)=\exp\Bigl(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}(t-t_0)\Bigr)$ を用いて

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)\ |\psi(t_0)\rangle$$

と書けたとする．ただし，$|\psi(t_0)\rangle$ は時間の初期値 $t=t_0$ における状態ベクトルである．また，時間発展演算子の初期値は，恒等演算子を I として $\hat{U}(t_0,t_0)=I$ と書くことができる．

(1)　シュレーディンガー方程式より，時間発展演算子の微分方程式が

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{U}=\hat{H}\hat{U}$$

と書ける．このことを用いて $\hat{U}$ がユニタリー演算子であることを示せ．

(2)　ある物理量を表す時間に依存しない演算子を $\hat{O}$ としたとき，時間に依存する演算子 $\hat{O}_{\mathrm{H}}$ を $\hat{U}$ を用いて

$$\hat{O}_{\mathrm{H}}=\hat{U}^{\dagger}\hat{O}\hat{U}$$

と表す．このとき

$$\frac{d}{dt}\hat{O}_{\mathrm{H}}=-\frac{i}{\hbar}[\hat{O}_{\mathrm{H}},\ \hat{H}]$$

と書くことができることを示せ．

問3　波動関数 $\psi(x)$ は，時間に依存しない1次元のシュレーディンガー方程式

$$\Bigl[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\Bigr]\psi(x)=E\psi(x)$$

を満たす．$S(x)$ を関数とし，この波動関数を

$$\psi(x)=\exp\Bigl(\frac{i}{\hbar}S(x)\Bigr)$$

とおく．ただし，x は1次元空間の座標を表す．

(1)　$\hbar$ が小さいとみなし，関数 S を

$$S=S_0(x)+\frac{\hbar}{i}S_1(x)+\Bigl(\frac{\hbar}{i}\Bigr)^2S_2(x)+\cdots$$

のように $\hbar$ についてべき展開する．このとき，$\hbar$ の0次と1次の式が，それぞれ

$$0\,次\ :\ \Bigl(\frac{dS_0}{dx}\Bigr)^2=2m[E-V(x)],\qquad 1\,次\ :\ 2\frac{dS_0}{dx}\frac{dS_1}{dx}=-\frac{d^2S_0}{dx^2}$$

になることを示せ．

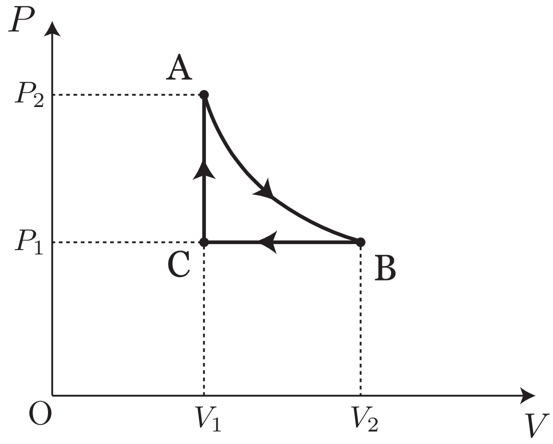
(2)　$E>V(x)$ である領域について (1) の二つの方程式を解き，波動関数が

$$\psi(x)=\frac{C_+}{\sqrt{p}}\exp\Bigl[\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx\Bigr]+\frac{C_-}{\sqrt{p}}\exp\Bigl[-\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx\Bigr]$$

になることを示せ．ただし，$p(x)=\sqrt{2m[E-V(x)]}$ で，C_+ と C_- は未定定数である．

IV 以下の各問に答えよ． (100 点)

問 1 1 モルの理想気体が図の道筋 A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A を 1 サイクルとする準静的な変化をする．ここで，P は圧力，V は体積である．図の A $\rightarrow$ B は等温変化，B $\rightarrow$ C は定圧変化，C $\rightarrow$ A は定積変化である．点 B と C における温度をそれぞれ T_0 と T_1 とする．定積モル比熱 C_V と定圧モル比熱 C_P は温度によらず一定であり，気体定数を R とする．



(1) 1 サイクルで気体がする仕事を求めよ．

(2) B $\rightarrow$ C において気体が吸収する熱量 Q_{BC} と，C $\rightarrow$ A において気体が吸収する熱量 Q_{CA} を，C_V や C_P を用いて表せ．

(3) このサイクルにおいて，$C_P - C_V = R$ の関係が成り立つことを示せ．

(4) 図の A $\rightarrow$ B の変化を準静的な等温変化から断熱自由膨張に変えたサイクルを考えることも可能である．等温変化を断熱自由膨張に変える前と後のサイクルの違いを，外界とのやりとりを考察することにより説明せよ．

問 2 エネルギー等分配の法則を一般化した式

$$\overline{q\frac{\partial E}{\partial q}} = \overline{p\frac{\partial E}{\partial p}} = k_{\mathrm{B}}T$$

が成立する場合を考える．ここで，$\overline{A}$ は A の平均値を表し，q は座標，p は運動量，k_{B} はボルツマン定数，T は温度である．

(1) エネルギーが $E = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$ である振動子のエネルギーの平均値が $k_{\mathrm{B}}T$ になることを説明せよ．ここで，m と ω は定数である．

(2) N 個の 2 原子分子からなる理想気体のエネルギーの平均値が $\frac{5}{2}Nk_{\mathrm{B}}T$ になることを説明せよ．ただし，2 原子間の振動はないものとする．

問 3　N 個の 1 次元調和振動子を考える．量子力学によれば，1 個の調和振動子のエネルギーは，振動数 ν を用いて，$\epsilon_i = h\nu(n_i + \frac{1}{2})$ と書ける．ここで，$n_i = 0, 1, 2, \cdots$，h はプランク定数である．このとき，N 個の系のエネルギーは $E = h\nu(n_1 + n_2 + \cdots + n_N + \frac{N}{2})$ と書ける．

(1)　$\frac{E}{h\nu} - \frac{N}{2} = M$ とすると，N 個の系の状態数は $W = {}_{M+N-1}C_{N-1}$ と書けることを説明せよ．ここで，${}_nC_k$ は n 個から k 個を選ぶ組合せの数を表す．

(2)　N 個の系のエントロピー S を求めることにより，温度 T におけるエネルギー E が

$$E = \frac{Nh\nu}{2} \coth\left(\frac{h\nu}{2k_{\mathrm{B}}T}\right)$$

と表されることを示せ．ここで，k_{B} はボルツマン定数である．N は十分大きく，$N - 1 \simeq N$ とみなせ，また，スターリングの公式 $\ln(N!) = N\ln N - N$ を用いることができるとする．

(3)　縦軸を比熱，横軸を温度にとり，比熱の温度依存性を表す概形を描け．また，$T \to \infty$ の極限での比熱の値も図中に示せ．ここで，$\sinh\left(\frac{A}{T}\right)$ に関する以下の性質を用いてもよい．A は任意の定数である．

$$\sinh\left(\frac{A}{T}\right) \to \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{A}{T}} & (T \to 0 \text{ のとき}) \\ \frac{A}{T} & (T \to \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

(4)　(3) の結果と問 2 (1) の結果を比較することにより，振動子における古典的な取り扱いと量子的な取り扱いの関係性を説明せよ．