

2026 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門(物理)

2025 年 8 月 27 日(水)

注意事項

1. 全ての解答用紙(B4 用紙)の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 全ての解答用紙の口(左上)に大問番号(I, II, III, IV)を記入すること。
3. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
4. 解答用紙は片面のみを使用し、縦置き横書きで解答すること。
5. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
6. 問題冊子は、各自持ち帰ること。

I

以下の各問に答えよ。

(100 点)

問 1

図 1 のように、三つの自然長 l_0 でばね定数 k の重さが無視できるばねの間に、質量 m で大きさの無視できる二つの質点 A と B を取り付け、両端のばねの外側を間隔 L の壁に固定した。 x 軸の原点を左の壁の位置に取り、紙面右側を正とする。質点は x 軸方向にのみ運動し、摩擦および空気抵抗は無視する。

- (1) 質点 A, B に加わる力 F_A, F_B を質点の座標 x_A, x_B および上記で定義された値を用いて表せ。
- (2) 質点 A, B のつり合いの位置 x_{A0}, x_{B0} を求めよ。
- (3) つり合いの位置 x_{A0}, x_{B0} からの変位をそれぞれ $u_A = x_A - x_{A0}, u_B = x_B - x_{B0}$ とする。質点のポテンシャルエネルギーの合計 U を変位 u_A, u_B を用いて表せ。
- (4) 重心変位 $u_G = (u_B + u_A)/2$ と相対変位の半分 $u_R = (u_B - u_A)/2$ を一般化座標としたラグランジアン L を求めよ。
- (5) ラグランジアン L を用いて、重心運動と相対運動の角振動数(それぞれ ω_G と ω_R とする)を求めよ。

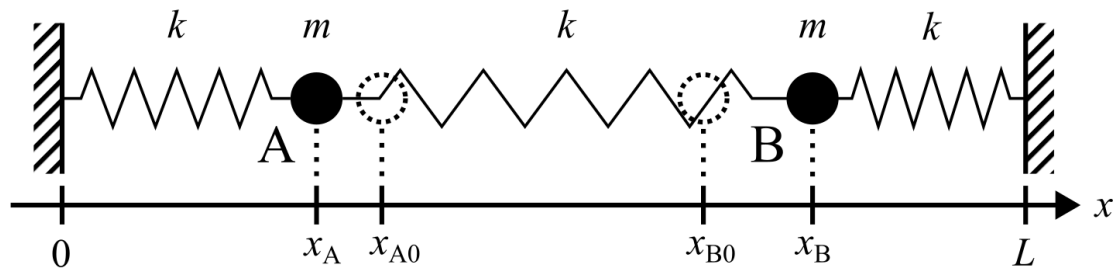


図 1

問2

図2-1のように、一様な傾き θ で傾斜した斜面の上に半径 a で質量 m の円柱を置いた場合の運動を考える．斜面と円柱の間には静止摩擦力が働き、互いに滑ることはない．重力加速度を g とする．

- (1) 円柱の中心軸周りの慣性モーメントは $I = \frac{1}{2}ma^2$ と与えられる．積分を用いてこの値を導出せよ．
- (2) 図2-2の様に、円柱の重心の高さに力 f を水平方向に加えたところ、円柱は静止した状態を保った．力 f 、円柱が斜面から受ける垂直抗力 N 、静止摩擦力 F の大きさを求めよ．
- (3) 円柱の重心速度 v と角速度 ω の間の関係式を示せ．
- (4) 円柱を斜面の上に置き静止した状態からそっと手を離した．円柱が距離 s だけ転がった時点での重心速度 v 、角速度 ω を距離 s の関数として求めよ．
- (5) 円柱が転がるときに円柱が斜面から受ける静止摩擦力 F を求めよ．

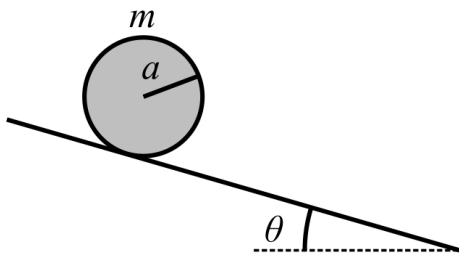


図2-1

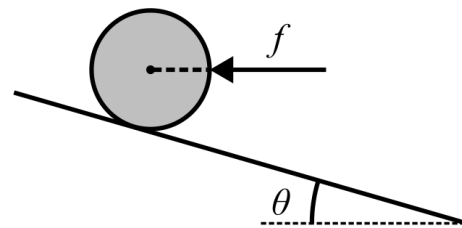


図2-2

II

以下の各問に答えよ．真空中の誘電率を ε_0 ，透磁率を μ_0 とする． (100 点)

問 1 図 1 に示すように，真空中に置かれた中心位置を同一とする半径 a の導体球 A と半径 $2a$ の導体球殻 B を考える．ここで，導体球殻 B の厚みは無視できるものとする．導体球 A には電荷 $+Q$ ，導体球殻 B には電荷 $-Q$ を与える．

(1) 空間を以下の 3 つの領域に分ける．各領域での電場の大きさを求めよ．

- (i) A の内部 : $r < a$
- (ii) A と B の間 : $a < r < 2a$
- (iii) B の外部 : $r > 2a$

(2) 導体球 A と導体球殻 B の電位を求めよ．ここで，無限遠を電位の基準とする．

(3) この系全体の静電エネルギーを求めよ．

問 2 図 2 に示すように，真空中に太さの無視できる半径 a ，抵抗 R の円形導線を xy 平面内に配置し，一様な磁場を z 軸方向にかける．ここで，円形導線は固定されており動くことはなく，磁束密度の大きさは $B(t) = B_0 \sin(\omega t)$ のように時間変化する．また，円形導線の自己インダクタンスは無視する．

(1) 円形導線を貫く磁束 $\Phi(t)$ を求めよ．

(2) 円形導線に生じる誘導起電力 $V(t)$ を求めよ．

(3) 誘導電流により 1 周期で円形導線に生じるジュール熱 Q を求めよ．

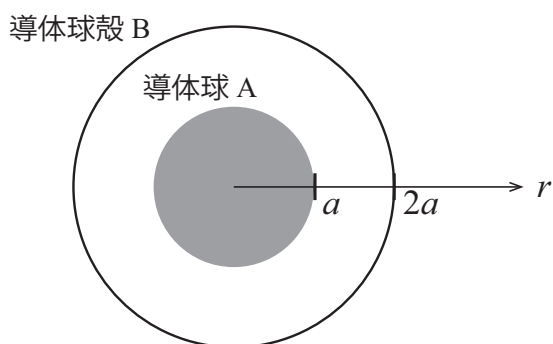


図 1

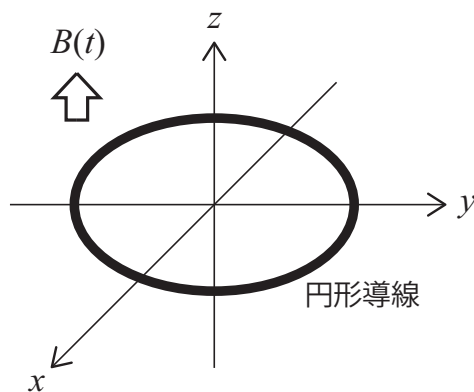


図 2

問3 図3に示すように、真空中に置かれた半径 R で無限長の円柱導体に電流密度 J の一様な電流を流す。

- (1) 導体内部 ($r < R$) と外部 ($r > R$) での磁束密度 B を求めよ。
- (2) 導体の中心軸からの距離 r に対する磁束密度 B のグラフを描け。
- (3) 電流密度 J が周期的に時間変化する場合、円柱導体から電磁波が放射される。電磁波の発生について、必要なマクスウェル方程式を用いながらその原理を文章で説明せよ。

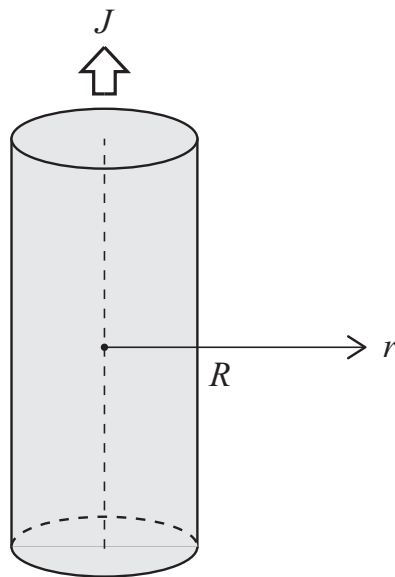


図3

III

以下の各問に答えよ． $\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割った定数である．

(100 点)

問 1

(1) 一次元の自由な空間で，

$$\psi(x) = (\pi\sigma^2)^{-1/4} \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} + ik_0 x \right]$$

で与えられる波動関数がある． σ, k_0 は定数である．この規格化された波動関数について，以下の三つのエルミート演算子

$$x, x^2, p = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

の期待値をそれぞれ計算せよ．ただし，演算子 $\hat{O}$ に関する期待値は

$$\langle \hat{O} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{O} \psi(x) dx$$

と定義される．必要に応じ，以下の公式を使ってもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} e^{-a^2 x^2} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{a^{4n+2}}}$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1, \quad (-1)!! = 1$$

(2) エルミート演算子 A, B が，交換関係 $AB - BA = ic$ (c : 定数) を満たすならば，

$$\sqrt{\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} |c|$$

という不確定性原理が成り立つことが知られている．これを利用し， p と x に関する不確定性原理を導け．

問 2

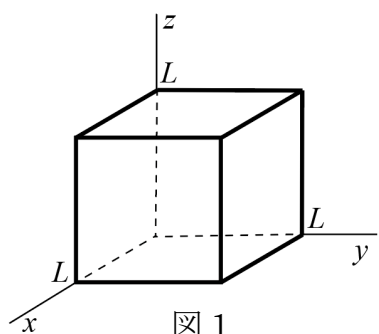


図 1

一辺の長さ L の立方体の箱 (図 1) の中に閉じ込められた自由粒子を考える. 箱の中ではポテンシャルは 0 と考えてよく, シュレーディンガー方程式は,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z)$$

となる. 箱の外では $\psi = 0$ であり, 波動関数の連続性から, 箱の表面で $\psi = 0$ という境界条件を満たさなければならない.

- (1) 箱の表面で $\psi = 0$ という境界条件から,

$$\psi(0, y, z) = 0, \psi(x, 0, z) = 0, \psi(x, y, 0) = 0$$

という三つの関係が得られる. $\psi(x, y, z)$ の境界条件を表す他の三つの関係を, 立方体の一辺の長さ L を使って表せ.

- (2) $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ という形に変数分離することで, 上のシュレーディンガー方程式は以下の方程式に書き換えられることを説明せよ.

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_x X = 0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_y Y = 0, \quad \frac{d^2Z}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_z Z = 0, \quad E = E_x + E_y + E_z$$

- (3) (2) から X について, $E_x > 0$ として $2mE_x/\hbar^2 = k_x^2$ と置くと, X の一般解は,

$$X = A \cos k_x x + B \sin k_x x \quad (A, B: \text{定数})$$

となることを説明せよ.

- (4) X の微分方程式を $X(0) = X(L) = 0$ の境界条件のもとで解くことにより,

$$k_x = \frac{\pi}{L} n_x \quad (n_x = 1, 2, 3, \dots)$$

となることを示せ. また, 波動関数の規格化条件

$$\int_0^L |X(x)|^2 dx = 1$$

から, $X(x)$ を求めよ.

- (5) $Y(y), Z(z)$ についても $X(x)$ と同様の結果が得られるから, エネルギー固有値は,

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (n_x, n_y, n_z = 1, 2, \dots)$$

となる. 最も低いエネルギー固有値と, その次に低いエネルギー固有値を, 対応する量子数とともに挙げよ.

IV 以下の各問いに答えよ.

(100 点)

問 1 熱力学で現れる変数に以下のようなものがある.

- | | |
|-------------------------|---------------|
| • Helmholtz 自由エネルギー F | • 圧力 P |
| • Gibbs 自由エネルギー G | • エントロピー S |
| • エンタルピー H | • 温度 T |
| • 物質質量 n | • 体積 V |
| • 化学ポテンシャル μ | • 内部エネルギー U |

これらの間には例えば以下のような式が成り立つ.

$$F = U - TS \quad (\text{a})$$

$$dF = -SdT - PdV + \mu dn \quad (\text{b})$$

- (1) 式 (a) と式 (b) から, dU を求めよ.
- (2) (a) 以外に, 上記の変数の間に成り立つ微分を含まない関係式を二つ書け.
- (3) 式 (b) と (1) の答以外に, 上記の変数の微分の間に成り立つ関係式を二つ書け.

問 2 物質質量 n , 温度 T , 体積 V のある理想気体 (単原子分子とは限らない) の Helmholtz 自由エネルギー F は R を気体定数, α を無次元の定数, s_0 をある定数として

$$F = -nRT (\alpha \log T + \log V - \log n) - nTs_0 \quad (\text{c})$$

と書くことができる.

- (1) 上の式から, この系のエントロピーを求めよ.
- (2) 内部エネルギー U を求めよ.
- (3) 以下, 種類の違う二つの理想気体 A, B を考える. それぞれの物質質量を n_A, n_B とし, Helmholtz 自由エネルギーの式は (c) が使えるとする. α, s_0 は二つの気体で共通とする.

系全体の温度は T で一定

物質質量 n_A	物質質量 n_B
体積 xV	体積 $(1-x)V$

上の図のように箱に仕切りを作って理想気体 A が体積 xV , 理想気体 B が体積 $(1-x)V$ の領域に入っているとする. 全体は一定の温度 T に保たれている. このとき Helmholtz 自由エネルギーの和 $F_{\text{和}}$ を求めよ.

- (4) 仕切りが動くピストンであったとすると、ピストンは移動してどこかで平衡に達する。そのときの x を求めよ。
- (5) 仕切りを取って A, B が完全に混ざってしまうと、Helmholtz 自由エネルギーが $F_{\text{和}} \rightarrow F_{\text{和}} + \Delta F$ と変化した。 ΔF を求めよ。
- (6) このとき、エントロピーも ΔS だけ変化する。 ΔS を求めよ。結果の式を見て、「 ΔS が正か負か 0 か」を判定する根拠を示せ。また、 ΔS の符号の物理的意味を答えよ。

問 3 質量 m の 1 粒子の分配関数は、 h をプランク定数、 k をボルツマン定数として、

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{p} \exp \left[-\frac{1}{kT} \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \right] \quad (\text{d})$$

のように、ボルツマン因子 $\exp \left[-\frac{1}{kT} (\text{エネルギー}) \right]$ を位相空間で積分した結果を使って書くことができる。ここで、積分 $\int d^3\vec{x}$ の結果は体積 V になる。

- (1) 運動量の積分を公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

を使って実行し、 Z_1 を求めよ。

- (2) 粒子が N 個ある場合、分配関数は $\frac{1}{N!} (Z_1)^N$ である。この分配関数から Helmholtz 自由エネルギーを求める過程を示せ。スターリングの公式 $\log N! = N \log N - N$ を使うこと。ただし、 $NkT \times (\text{定数})$ となる部分は無視してよい。
- (3) 前問の結果と問 2 の式 (c) が、任意定数であった α をうまく選べば一致することを示せ。 $NkT \times (\text{定数})$ となる部分は前問でも無視したので比較しなくてよい。