

2012 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
専門(物理)

2012 年 2 月 14 日

注意事項

1. すべての解答用紙 (B4 白紙) の左上に受験番号を記入すること。
2. 大問ごとに別々の解答用紙を使用すること。
3. 解答用紙は片面のみ使用し、縦置き横書きで解答すること。
4. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
5. 問題冊子は、各自持ち帰ること。

I

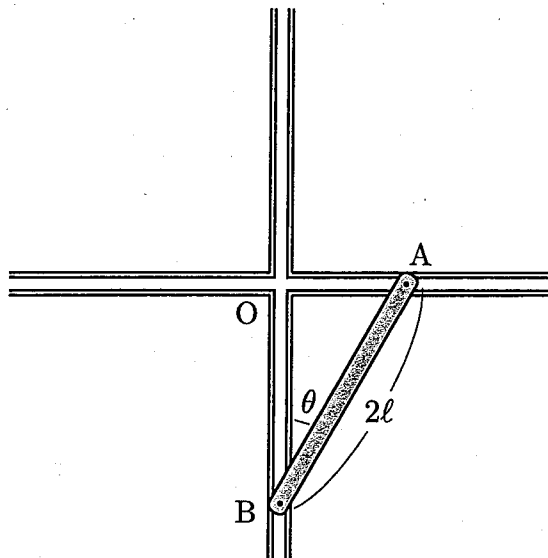
下図のように2つの直交するレールがあり、そのレールは鉛直軸、水平軸にそれぞれ平行に配置してある。その上を長さ 2ℓ 、質量 M の一樣な棒の両端(A点、B点)が自由に摩擦なく動けるとする。このときA点は、水平方向のレール、B点は鉛直方向のレール上のみを動けるとする。棒と鉛直軸に平行なレールとのなす角を θ として、以下の各問に答えよ。

(100点)

- 問1 棒の重心まわりの慣性モーメントを求めよ。
- 問2 棒の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーをそれぞれ θ の関数として表せ。
- 問3 ラグランジュの方法により、運動方程式を求めよ。
- 問4 力学的エネルギーが保存することを示せ。

$t = 0$ のとき、 $\theta = 0$ とし、 θ が増える方向へ水平軸に平行に初速度 v_0 を与えたとする。

- 問5 棒が $\theta = \pi$ だけ回転した場合の初速度 v_0 の大きさを求めよ。
- 問6 棒がレールの交点Oを中心に微小振動($\theta \ll 1$)したとすると、その周期を求めよ。ただし、 $\theta \ll 1$ のとき、 $\sin \theta = \theta$ とする。



- Ⅱ 発電所では燃料を燃やして水を蒸気に変え、それをタービンに吹きつけて発電機を回す。図1は磁石を回転させてコイルに起電力を発生させる発電機の模式図を示している。 (100点)

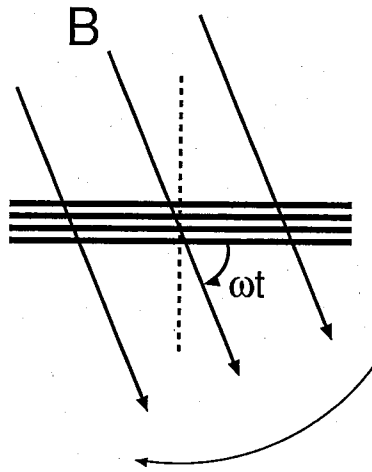


図 1: 発電機の模式図

- 問 1 磁束密度 B の一様な磁場が図のように角速度 ω で回転し、時刻 t で N 巻きコイルの作る面と角度 ωt をなしているとする。このとき、起電力 $V(t)$ は

$$V = V_0 \cos \omega t \quad (1)$$

で与えられる。

- (1) コイルが囲む面積を S とするとき、 V_0 を N, B, S, ω で表わせ。
 - (2) 発電機のコイルに発生する交流電流は位相の遅れの角を ϕ として $I = I_0 \cos(\omega t - \phi)$ で与えられるとする。コイルの抵抗を R 、インダクタンスを L とするとき、電流の最大値 I_0 を V_0, R, L, ω を用いて表わせ。また、力率 $\cos \phi$ を求めよ。
 - (3) タービンにより発電機が起電力 $V = V_0 \cos \omega t$ 、電流 $I = I_0 \cos(\omega t - \phi)$ の交流発電を行っているとき、発電に必要な熱は平均として毎秒どれだけになるか？ V_0, I_0, ϕ 、およびタービンの熱効率 η を用いて表わせ。ただし、タービン以外での熱の損失はないものとする。
- 問 2 発電された電気は変圧器を用いて一度 50 万ボルト程度の超高電圧交流に変電され、一次変電所、二次変電所、柱上変圧器を経て、100 V の交流電圧として一般家庭に送られる。

- (1) 送電の途中で高電圧交流に変電する理由を物理的に説明せよ。

- (2) 図2は巻数 n_1 の一次コイルの端子電圧 V_1 と巻数 n_2 の二次コイルの端子電圧 V_2 からなる変圧器の模式図を表している。

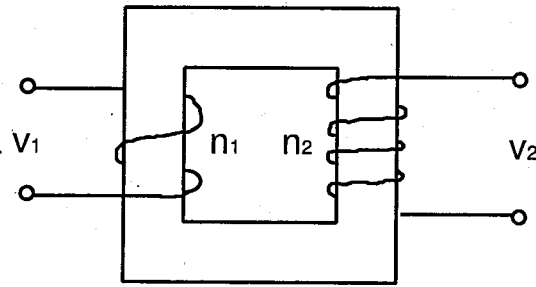


図 2: 変圧器

コイル電流により発生した磁束 $\Phi(t)$ が鉄心内に閉じ込められるとすると、電圧 V_1 、 V_2 を磁束 $\Phi(t)$ を用いて表わせ。また、それらの比が

$$\frac{V_2(t)}{V_1(t)} = \frac{n_2}{n_1} \quad (2)$$

で与えられることを示せ。

- (3) 変圧器内の電力損失がないとしたとき、二次電流 $I_2(t)$ と一次電流 $I_1(t)$ の比は

$$\frac{I_2(t)}{I_1(t)} = \frac{n_1}{n_2} \quad (3)$$

で与えられることを説明せよ。

- (4) 図3のように、発電機で発生した一定の実効電圧 V と実効電流 I を図の左側の変圧器1で高電圧にして送電し、図の右側の変圧器2で家庭用実効電圧 V_2 に変圧したとする。図のように送電線の抵抗を r 、家庭用電線の負荷抵抗を R_2 とすると、与えられた家庭用電圧 V_2 を得るためには変圧器2の巻数比 n_2/n_1' をどのように選ばれば良いか？ 変圧器1の巻数比 n_1/n 、発電機の電圧 V 、電流 I 、抵抗 r 、および V_2 を用いて表わせ。

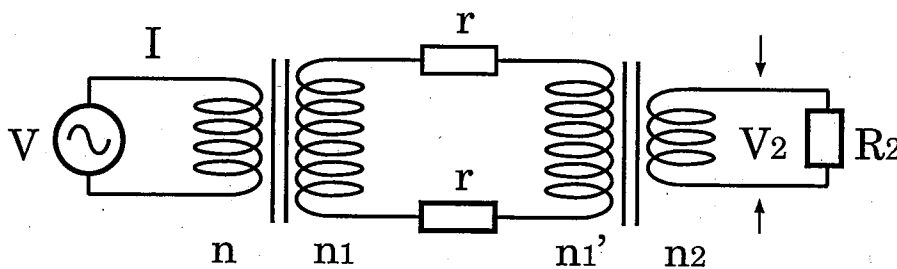


図 3: 交流送電

III 以下の各問に答えよ.

(100点)

固定軸 (これを z 軸とする) のまわりを回転する慣性能率 I をもつ剛体のシュレディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2I} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$$

で与えられる. 但し, θ は z 軸のまわりの回転角で, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ をとり, また慣性能率 I は定数とする. 波動関数 ψ は, 時間 t と回転角 θ の関数とすると, $\psi = \psi(t, \theta)$ となる.

問1 波動関数 ψ が一価でなければならないことを要請するとき, $\psi(t, 0)$ と $\psi(t, 2\pi)$ が満たすべき境界条件を書きなさい.

問2 波動関数を $\psi = f(\theta) \exp(-\frac{iEt}{\hbar})$ と変数分離型に置いたとき, f に対するシュレディンガー方程式は

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} = -\frac{2IE}{\hbar^2} f$$

と書けることを示しなさい.

問3 問2の f に対するシュレディンガー方程式を解いて, エネルギー固有値 E_n が

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{2I}$$

と書けることを示しなさい. 但し, n は $n = 0, 1, 2, \dots$ とする.

問4 $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ (但し, $n = 0, 1, 2, \dots$) と置くと,

$$\int_0^{2\pi} dx g_m(x) g_n^*(x) = \delta_{mn}$$

となることを示しなさい. 但し, δ_{mn} はクロネッカーのデルタ ($m = n$ のときは1, $m \neq n$ のときは0) である.

問5 シュレディンガー方程式を解いて, 規格化された波動関数を少なくとも一つ求めなさい.

問6 波動関数が波束の場合, 1次元のシュレディンガー方程式の離散的な固有値には縮退がないことが証明できる. しかし, 問5で求めた波動関数は, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して二重に縮退していることが分かる. この二重の縮退が起こる理由を説明し, さらにどのような物理的な状態を表しているかを答えなさい.

IV

以下の各問に答えよ。

(100点)

問1 ピストンを備えたシリンダーの中に気体を入れる。このシリンダーの外部から熱量 $d'Q$ を与えたところ、内部エネルギー E が dE だけ増加し、外から準静的仕事 $d'W$ がなされた。気体の圧力、体積、温度をそれぞれ p , V , T として、以下の各問に答えよ。

(1) 外部から加えられる熱量 $d'Q$ が系のエントロピー S の変化 dS により $d'Q = TdS$ で与えられるとき、系の内部エネルギーの変化 dE を T , S , p , V で表せ。

(2) 系のヘルムホルツの自由エネルギー F は $F = E - TS$ で与えられる。 F のルジャンドル変換は $dF = -SdT - pdV$ となる。これを、 T と V を独立変数にとったときの F の全微分形式と比較すると、 $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$ を得る。これらの関係を用いて、以下の関係式

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p$$

を導け。

(3) F のルジャンドル変換から、マクスウェルの関係式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

を示せ。

(4) シリンダーの中に入れた気体が1モルの理想気体の場合、内部エネルギー E は体積 V に依存しないことを、前問(2)と(3)の結果とボイル・シャルルの法則を用いて示せ。

問2 エネルギー固有値が $n\hbar\omega$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) で与えられる振動子において、 N 個からなる系を考える。いま、振動子の間には相互作用が無く、系は温度 T の熱浴に接しているとする。ここに、 ω は角振動数であり、 \hbar はプランク定数である。以下の各問に答えよ。

(1) N 個の振動子における系の分配関数 Z を量子論的に計算したところ、

$$Z = \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)\right)^{-N}$$

であった。このとき、系のヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ。ここに、 k_B はボルツマン定数である。

(2) 系の内部エネルギーが $E = k_B T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \log Z\right)$ で表されることを示せ。

(3) 系の定積熱容量 C_V を計算すると、

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = Nk_B \frac{x^2}{\sinh^2 x}, \quad x = \frac{\hbar\omega}{2k_B T}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

となる。このとき、 $T \rightarrow 0$ と $T \rightarrow \infty$ での C_V の値を求めよ。

2012 年度
琉球大学大学院理工学研究科
博士前期課程
物質地球科学専攻・物理系

入学試験問題
英語

2012 年 2 月 14 日

注意事項

1. すべての解答用紙（B4 白紙）の左上に受験番号を記入すること。
2. 解答用紙は片面のみ使用し、縦置き横書きで解答すること。
3. 解答用紙が足りない場合は試験監督者に請求すること。
4. 問題冊子は、各自持ち帰ること。

[1] 次の英文を読んで、各問に答えよ。なお、参考のために文章の最後に単語の意味が説明してある。

A) Superconductivity was discovered by Kamerlingh Onnes in 1911, who found that the electrical resistivity of metals vanished at low temperatures. The temperature below, which this effect occurs, is called the temperature of the transition into the superconducting state (T_c) or the critical or transition temperature. In addition to this, any external magnetic field is completely unable to penetrate into the inside of the superconductor, and if the transition into the superconducting state takes place in a magnetic field, then the field is expelled from the superconductor.

Twenty-seven metals are superconductors; superconductivity also exists in more than a thousand compounds and alloys, where temperatures of transition into the superconducting state range from 0.01 to 21 K. The number of superconducting metals, alloys, and compounds is increasing continuously as research advances.

B) Immediately after the discovery of superconductivity, its possible use in creating very strong magnetic fields was investigated. The first research into the properties of superconductors was encouraging (because of the comparatively high critical currents); however it was subsequently found that a magnetic field of a few hundred oersteds destroyed the superconductivity of mercury, tin, and lead. Although it was later (1930) found that a lead-bismuth alloy remained superconducting in moderate fields, and the possibility of making superconducting magnets with a strength of 20 kOe was proposed, this idea was eventually rejected. Thus, further research into superconducting materials was delayed until 1961, when it was found that the compound Nb_3Sn had high critical currents in magnetic fields up to 70 kOe. This discovery stimulated research into the development of new, hard superconducting materials and the technology of making and processing these. It was in this period that the new branch of science known as "the metal science of superconductors" started developing. All this taken together evoked the vigorous development of cryogenic technology and other branches of science associated with the use of superconductivity.

The microscopic theory of superconductivity appeared early in the 1950s. C) The effect of the isotopic composition of a metal on its critical temperature was discovered in 1950. On the basis of this discovery, a theory of the special attractive forces acting between electrons was constructed. In 1956 Cooper showed that the electrons in certain metals existed not as individual particles but as coupled pairs. Bardeen, Cooper, and Schrieffer in the United States and Bogolyubov in the Soviet Union in turn, using the earlier work as a basis, constructed a microscopic theory of superconductivity providing a reasonable explanation for this phenomenon.

(*"Superconducting Materials"*, By E. M. Savitskii et al., Plenum Press 1973 より抜粋 (一部改変).)

Hints: superconductivity 超伝導, transition 転移, critical 臨界の, expel 追い出す, 排除する, encouraging 奨励 (激励) の, oersted (Oe) エルステッド (磁場の単位), evoke 引き起こす, vigorous 活発な, cryogenic 低温の, isotopic 同位体の, Bardeen, Cooper, Schrieffer, Bogolyubov ^{バーディーン クーパー シュリーファー ボゴリューボフ} 理論物理学者, Soviet Union ソビエト連邦

問1 下線部 A) の文章の中で、超伝導の特徴を示す二つの現象が記述されている。これら二つの

chlorine (normal boiling point of 239 K). Over the next several decades nearly all of the gases were liquefied at the ice point under sufficient pressure. Ethylene, with a critical temperature of 282 K and a normal boiling point temperature of 169 K, yielded the lowest achievable temperature with this technique. Those known gases such as methane, carbon monoxide, oxygen, nitrogen, and hydrogen that could not be liquefied by this technique, even with pressures up to 40 MPa, were called D) "permanent" gases.

(“*Cryogenic Engineering: Fifty years of Progress*”, By K. D. Timmerhaus and R. P. Reed (Eds), Springer 2006 より抜粋.)

Hints: harness 利用する, mankind 人類, prehistoric times 先史時代, forge 作り出す, 鍛造する, crude pottery 粗陶器, china 磁器, clay 粘土, usher in ~の到来を告げる, lag 遅れる, inflammation 炎症, BC 紀元前, reciprocating compressor 往復圧縮機, put forward 提唱する, liquefaction 液化, chlorine 塩素, liquefy 液化する, Ethylene エチレン

問1 下線部 A) を和訳せよ.

問2 1700 年代までの自然の氷の利用方法について述べよ.

問3 下線部 B) を和訳せよ.

問4 下線部 C) に関して, this one-shot process の内容について述べよ.

問5 下線部 D) に関して, "permanent" gas とはどのようなものかを説明せよ.

[3] 大学院進学後にどのような研究を希望するのか, 150 語程度の英文で表現せよ.

[4] つぎの文章を英訳せよ.

電子レンジは, マイクロ波と呼ばれる周波数の高い電磁波を利用した加熱器である. 使用されるマイクロ波の周波数は 2450 メガヘルツで, 金属に当たると反射し, プラスチック・セラミックスなどは透過する. しかし, 水などに当たると吸収されるという性質を持つ. これらの性質により, 使用する容器はマイクロ波をよく透過するものを使用しなければならない.

Hints: 電子レンジ microwave oven, 周波数 frequency, 透過する penetrate, プラスチック plastics, セラミックス ceramics