

# 2007年度電磁気学講義録

前野昌弘

平成20年2月12日

# 目次

第 0 章	電磁気学の歴史とその意義	1
0.1	電気と磁気はどのように発見されたか	1
0.2	電磁気学の発展	1
0.3	現在における電磁気学と、電磁気以後の物理学	3
0.4	電磁気学の成功の理由	3
第 1 章	真空中の静電気力と電場	5
1.1	クーロンの法則	5
1.1.1	逆自乗則	5
1.1.2	ベクトルで表現するクーロンの法則	7
1.2	重ね合わせの原理	9
1.3	電場と電気力線	10
1.3.1	電場の定義	10
1.3.2	電気力線	11
1.3.3	電気力線の力学的性質	13
1.4	いろんな電荷分布における電場の計算	14
1.4.1	有限の長さの線上に広がった電荷による電場	14
1.4.2	円状の電荷による電場	16
1.5	立体角と電気力線	18
1.6	章末演習問題	20
第 2 章	ガウスの法則と電場の発散	23
2.1	ガウスの法則	23
2.1.1	電気力線の流れ (flux) の保存	23
2.1.2	立体角から考えるガウスの法則	25
2.2	具体的計算でガウスの法則を確認する	25
2.2.1	無限に広い平面を通る電気力線の本数	25
2.2.2	中心からずれた位置に電荷が位置する場合	26
2.3	複数および連続的な電荷が存在する時のガウスの法則	27
2.3.1	面上に広がった電荷による電場	28
2.3.2	一様に帯電した無限に長い棒	29
2.3.3	一様に帯電した球	29
2.3.4	平行平板コンデンサ	29
2.4	電場の発散：ガウスの法則の微分形	30
2.4.1	直交座標系における発散	30
2.4.2	発散のない電場の例	32
2.4.3	極座標での div	33
2.4.4	$\vec{\nabla}$ を使った記法に関する注意	34
2.4.5	極座標の div を使って電場を求める	36
2.5	章末演習問題	37

第 3 章	静電気力の位置エネルギーと電位	39
3.1	力学的エネルギーの復習 (1次元)	39
3.1.1	1次元の静電気力の位置エネルギーと電位	41
3.2	2次元以上の空間で考える電位	42
3.2.1	2次元以上の空間における位置エネルギー	42
3.2.2	電位と電場の関係	43
3.2.3	位置エネルギーが定義できる条件	45
3.3	rot と位置エネルギーの存在	45
3.3.1	仕事が経路に依存しない条件	45
3.3.2	rot のイメージ: ポートの周回	46
3.3.3	grad, rot, div の関係	48
3.4	電位 (静電ポテンシャル)	49
3.4.1	位置エネルギーの微分としてのクーロン力	49
3.4.2	電位の満たすべき方程式	49
3.4.3	ラプラシアンの物理的意味	50
3.5	電位の計算例	52
3.5.1	電位の重ね合わせ	52
3.5.2	一様な帯電球	53
3.5.3	無限に広い板	57
3.5.4	電気双極子	58
3.6	静電場の保つエネルギー	59
3.6.1	位置エネルギーは誰のもの?	59
3.6.2	電場のエネルギー—電荷と電位による表現	60
3.6.3	電場の持つエネルギー—電場による表現	61
3.6.4	平行平板コンデンサの蓄えるエネルギー	62
3.7	電場の応力	63
3.7.1	電気力線は短くなるとうする 電場の張力	63
3.7.2	電気力線は混雑を避ける 電場の圧力	64
3.7.3	応力から考える静電気力	64
3.7.4	応力テンソル	65
3.8	章末演習問題	66
第 4 章	導体と誘電体	69
4.1	導体と電場・電位	69
4.1.1	導体表面の電場	70
4.2	導体付近の電場	71
4.2.1	点電荷と平板導体	71
4.2.2	平行電場内に置かれた導体球	72
4.3	誘電体と分極	73
4.3.1	分極	73
4.3.2	分極と電気双極子モーメント	74
4.4	誘電体中の電束密度	75
4.5	強誘電体と自発分極	77
4.6	誘電体中の静電場の持つエネルギー	78
4.7	章末演習問題	79
第 5 章	静電場から静磁場へ	81
5.1	電磁気学 I の復習	81
5.2	磁場とは何か	82
5.2.1	磁石の作る磁場	82

5.2.2	電流の作る磁場	82
5.2.3	磁場中の電流の受ける力	84
5.2.4	磁極の正体	85
<b>第 6 章</b>	<b>静磁場の法則その 1—アンペールの法則</b>	<b>87</b>
6.1	無限に長い直線電流による磁場	87
6.2	アンペールの法則	89
6.3	磁位	91
6.4	アンペールの法則の応用例	91
6.4.1	ソレノイド内部の磁場	91
6.4.2	平板を流れる電流	92
6.5	章末演習問題	92
<b>第 7 章</b>	<b>静磁場の法則その 2—ビオ・サバールの法則</b>	<b>95</b>
7.1	ビオ・サバールの法則	95
7.1.1	ビオ・サバールの法則のもう一つの導出	98
7.2	ビオ・サバールの法則の応用	99
7.2.1	円電流の軸上の磁場	99
7.2.2	円電流の軸上以外での磁場	100
7.2.3	ソレノイドコイル	103
7.3	アンペールの法則との関係	105
7.4	章末演習問題	106
<b>第 8 章</b>	<b>静磁場の法則その 3—電流・電荷間に働く力とポテンシャル</b>	<b>107</b>
8.1	電流素辺の間に働く力	107
8.2	導線の受ける力と動く電荷の受ける力	109
8.2.1	ローレンツ力	109
8.2.2	ローレンツ力を受けた荷電粒子の運動	110
8.2.3	ホール効果	110
8.3	ベクトルポテンシャル	111
8.3.1	数学的な定義	112
8.3.2	物理的意味	113
8.3.3	ベクトルポテンシャルが一意でないこと	115
8.3.4	ベクトルポテンシャルの計算	116
8.4	章末演習問題	117
<b>第 9 章</b>	<b>磁性体中の磁場</b>	<b>119</b>
9.1	磁性	119
9.2	反磁性	120
9.3	常磁性体	122
9.4	強磁性体	123
9.5	磁場の表現—磁束密度 $\vec{B}$ と磁場 $\vec{H}$	125
9.5.1	$\vec{E}$ と $\vec{D}$	125
9.5.2	$\vec{B}$ と $\vec{H}$	126
9.5.3	透磁率	129
9.6	例題：一様に磁化した円筒形強磁性体	129
9.7	媒質が変わる場合の境界条件	130
9.8	章末演習問題	131

<b>第 10 章 電磁誘導</b>	<b>133</b>
10.1 ファラデーの電磁誘導の法則	133
10.2 導線が動く時の電磁誘導のローレンツ力による解釈	136
10.2.1 仕事をするのはいったい誰か?	138
10.3 磁束密度の時間変化と電場	138
10.3.1 単極誘導	139
10.3.2 時間変動する電磁場の場合の電位	140
10.4 自己誘導・相互誘導	141
10.4.1 自己インダクタンスと相互インダクタンス	141
10.4.2 同軸ケーブルの自己インダクタンス	142
10.5 コイルの蓄えるエネルギー	143
<b>第 11 章 マックスウェル方程式</b>	<b>145</b>
11.1 変位電流	145
11.1.1 マックスウェルによる導入	145
11.1.2 変位電流は磁場を作るか?	148
11.2 電磁波	149
11.2.1 電磁波の方程式	150
11.3 章末演習問題	152

## 第0章 電磁気学の歴史とその意義

### 0.1 電気と磁気はどのように発見されたか

人類が最初に電磁気現象を発見したのはいつなのか、定かではないが、磁気現象については、2世紀の中国ですでに磁石が南北を指すことが知られていた。紀元前6世紀頃には小アジアのマグネシア地方で磁石が見つけたという話がある（magnet という言葉は、このマグネシア地方から来ている<sup>1</sup>）。当時の哲学者タレスは、磁石で鉄をなでると鉄も磁石になるという現象を発見している。タレスはまた、琥珀をこすると物を引きつける性質を持つことも見つけている。これは静電気の発見である。

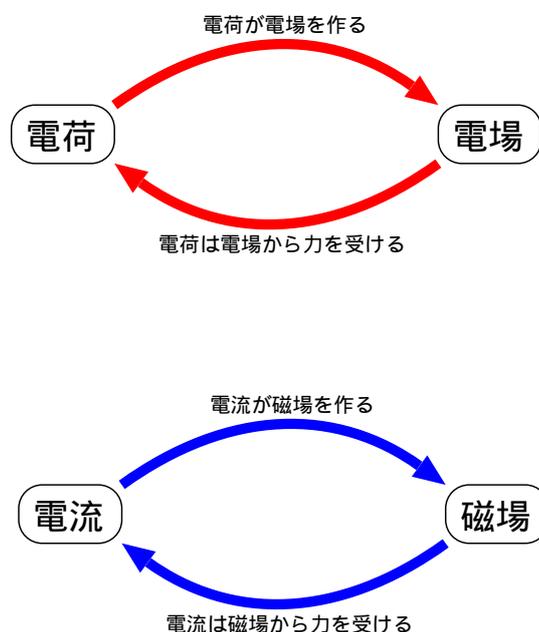
磁石はのちに羅針盤の発明を生み、大航海時代を支えることになる。1600年、ギルバート<sup>2</sup>は「磁石論」という本を書き、その中で地球が大きな磁石であることなどを示したが、同時に琥珀の力と磁石の力は別物であることも述べている（それ以前はこの2種類の力に、明確な区別はされてなかった）。ギルバートは琥珀などに生じる静電気を、琥珀を表すギリシャ語（elektron）から electric と名付けた。これが静電気学の始まりだと言える。

### 0.2 電磁気学の発展

電磁気学の歴史的発展の様子は次のページに示した通りである。この表からわかるように、18世紀後半から19世紀に電磁気は爆発的に発展している。これはいわゆる「古典物理学」が完成する時期だといってもいい<sup>3</sup>。

電気と磁気の間に働く力がクーロンの法則という形でまとめられ（1700年代後半）、電気と磁気が互いに相互作用していくことがアンペール、ファラデーらによって発見されて法則化され（1800年代前半）、ファラデーがその現象を「電場」と「磁場」という「場」の考え方で統一的に理解しようとする。それらをマクスウェルが数式を使って見事に定式化<sup>4</sup>し、1865年のマクスウェル方程式という形で結実したものが現在の電磁気学である。

電気と磁気が相互作用するということは、たとえば電磁石（電流磁場）や電磁誘導（磁場の変化 起電力）に現れているわけである。1800年代は現象としてこのようなことが発見されていき、それを元に電気と磁気の対応が考えられていったわけであるが、現在完成された電磁気学の立場から振り返れば、右の図のような対応があることがわかる<sup>5</sup>。電荷が動くことが「電流」なのであるから、電場と磁場が深く関係するのは当然である。



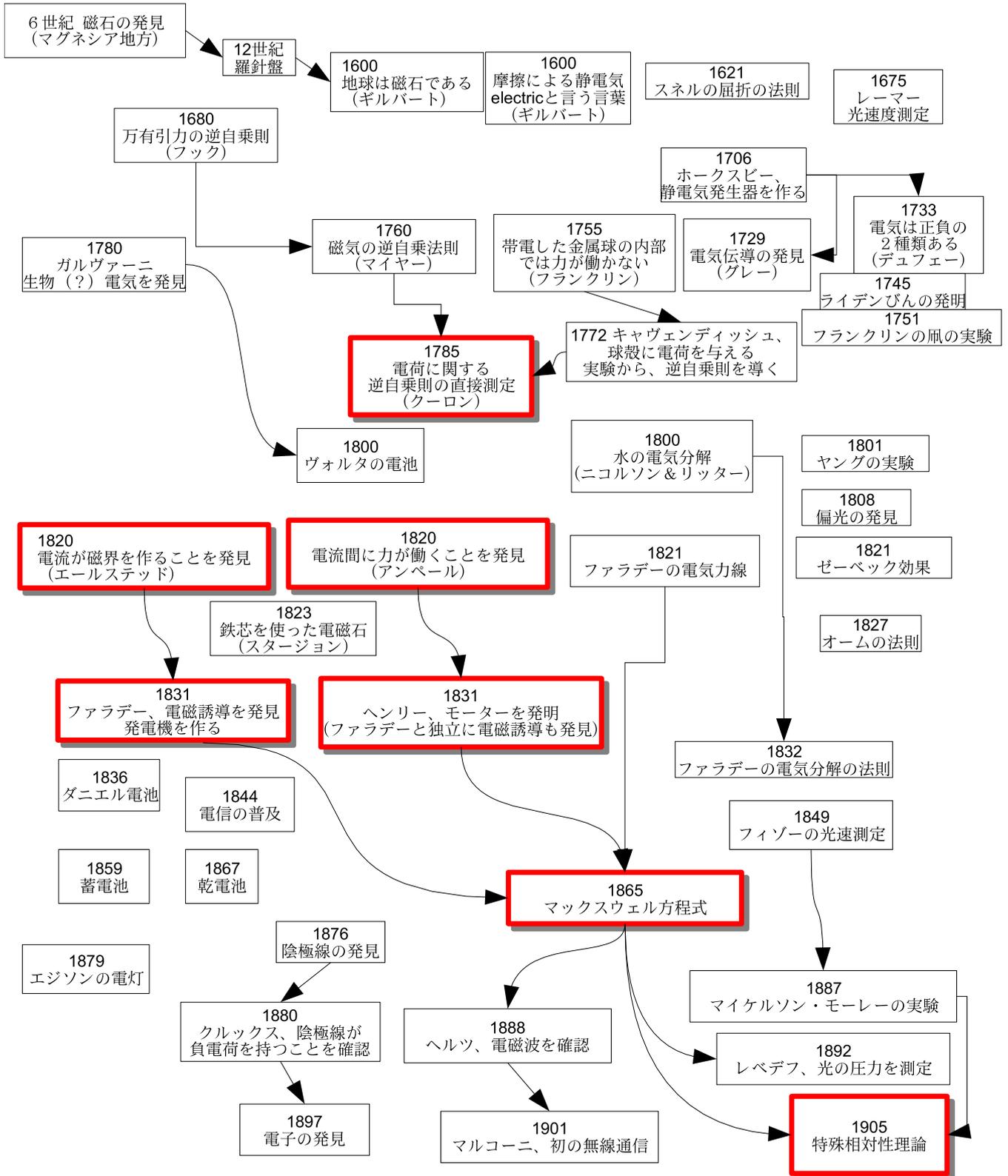
<sup>1</sup> ついでながら、マグネシア地方はマグネシウムがよく出土する地方でもある。磁石にならないマグネシウムに、磁石と関係ありそうな名前がついてしまったのはそういう理由。

<sup>2</sup> ギルバートは cgs 単位系の磁位の単位 Gb（ギルバート）にその名を残しているのだが、残念なことには cgs 単位系も、磁位という概念も現在ではあまり使われていない。

<sup>3</sup> 物理において「古典 (classical)」とは「量子 (quantum)」力学以前だということ。ゆめゆめ「古典は古いから勉強しなくていいだろう」などとは思わないこと！

<sup>4</sup> ファラデーは物理学者としては珍しく数学が全くできなかった。彼のアイデアをマクスウェルが数式で表現した、とも言える。ファラデーが数学ができなかったのは高等教育を受けることができなかったからだが、「生まれ変わったら今度は数学を勉強したい」と言っていたと言う。

<sup>5</sup> 電場は電荷が、磁場は磁荷が作っていると考え方もあった。実際には、「磁荷」は存在しない。少なくとも、（発見しようという努力は精力的に行われたにもかかわらず）実験的には発見されていない。



つまり、「電場が動けば磁場ができる(あるいはこの逆も)」という現象が起こるわけだが、これが「同じ物理現象を、運動しながら観測すると違う現象のように見える(しかし、物理的内容は変わらない!)」という認識を生み、ついにはそれがアインシュタインの特殊相対性理論に発展する。20世紀が始まった直後の1905年に発表された特殊相対論は(古典)電磁気学の最後の one piece となり、これで古典的電磁気学は完結すると言っていいだろう<sup>6</sup>。

<sup>6</sup>相対論に関係する部分は、3年前期の「相対論」の授業で話そう。

## 0.3 現在における電磁気学と、電磁気以後の物理学

掃除機・冷蔵庫・テレビ・携帯電話と、現在の我々の生活を支える電器製品はすべて、電磁気学の成果を使って作られている。掃除機などに使われるモータは「磁場中の電流は力を受ける」という法則に基づいて作られたものだし、テレビや携帯電話は、マクスウェル方程式を解いた結果として出てきた電場と磁場の波である「電磁波」を使って遠いところとコミュニケーションすることができる。また、どのような電子機械にもトランジスタやICなどを使った電子回路が組み込まれているが、これらもまた電磁気学なしに製作することはできない。このように現在の生活の基盤に密着した技術の基礎となるのが電磁気学である。

電磁気学が重要である理由はこれだけではない。電磁気の基本方程式であるマクスウェル方程式が相対性理論を生み出すことはすでに説明したが、それ以外にももちろん、電磁気学はたくさんの物理を生み出している。20世紀前半までの常識ではこの世にある「力」は電磁氣的な力と万有引力だと思われていた。現在ではその他に「弱い力」と「強い力」が存在していることがわかっている<sup>7</sup>。そしてこれら4つの力は全て、現代物理にとって非常に重要な「ゲージ理論」と呼ばれる種類の理論で記述できることがわかっている。ゲージ理論を拡張することによって、重力・電磁力・弱い力・強い力を統一的に記述できるような理論ができあがるかもしれない。電磁気学はそのような「統一理論」へと続くゲージ理論の中でもっとも最初にできあがったものであると言える。つまり、この世の全ての力を記述するための基盤は、電磁気学にある。

## 0.4 電磁気学の成功の理由

なぜ電磁気学はこうも現代物理のキーポイントに成り得たのか？—電磁気の特徴のうち、現代物理を作っていく上で重要なものになっている点を述べよう。

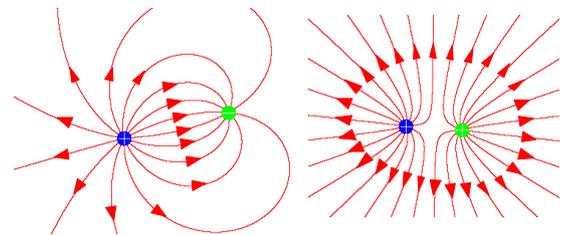
[実験的成功] まず何より指摘しなくてはいけないのは、電磁気学は非常にうまくこの現実を記述していることである。技術的、工学的応用もすばらしい成功を収めている。テレビが映るのも、携帯電話で話せるのもすべて電磁気学のおかげである。この講義の範囲からは外れるが、電磁気学を量子力学的に考えた「量子電磁力学」も非常によい精度で実験と一致する結果を出している。

[近接作用論]

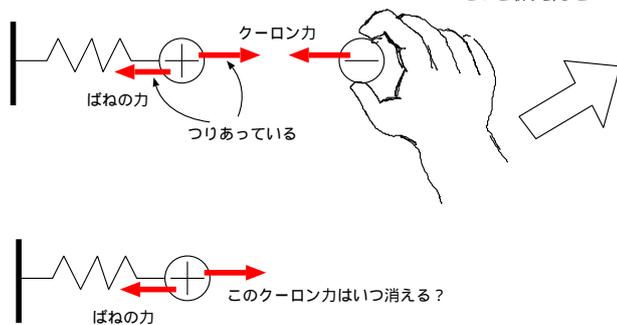
ファラデー以後の電磁気学の重要な概念が「場」である。

ファラデーは、電氣的な力が働く時、電荷と電荷の間に直接力が働くのではなく、そこに「電場」という媒介物が（目には見えないけど、空間に！）存在していると考えた<sup>8</sup>。つまり、二つの物体に力が働く時、それは直接に「力」が伝わっているのではなく、それぞれの物体が「場」を作り（電荷は電場を作る、電流は磁場を作る）、その「場」の中にある物体が力を受ける（電場は電荷に力を与え、磁場は電流に力を与える）と考える。これを「場の相互作用 (interaction)」という呼び方をする。

大事なことは、電荷が場を作るのも、電場が電荷に力を与えるのも、その場所各点各点で起こる現象であり、遠い向こうの状態が今この場所に直接影響を及ぼしたりはしないということである（媒介する場なしに直接力が及ぶとする立場は「遠隔作用論」と言う）。



さっと取り去ると??



近接作用と遠隔作用の差を知るために、こんな思考実験を考えよう。

いま、ある正電荷と負電荷が引き合っており、つながれたばねによる引っ張り力とつりあって静止しているとします。この状態で、さっと負電荷の方を取り除いたとします。その時正電荷はどうなるか。もしこの正電荷と負電荷の間に働いていた力がクーロンの法則に完全に従うものであったならば、即座に正電荷のつりあいは崩れるであろう。しかし力が「電場」によって媒介されて伝わっているものならば、正電荷のつりあいが崩れるのは電場の変化が正電荷周辺に伝わってから、ということになる。

<sup>7</sup>この「弱い力」「強い力」は固有名詞である。つまり、そういう名前の（電磁力や万有引力とは全く別種の）力が存在しているのである。

<sup>8</sup>ファラデーはもちろん、単なる思いつきで「場」の存在を主張したわけではない。電荷と電荷の間に絶縁体や導体を置くと電荷の間に働く力が変化するという実験事実を踏まえて「空間に何かが伝わっているから力が働くのではないのか？」と考えたのである。

実験的には(この通りの実験が行われているわけではないが)、後者が確認されている。つまり、「電場」の変化が伝わって始めて電荷の間に力が変化する。ちなみに、電場の変化が伝わる速度は光速である<sup>9</sup>。光速は秒速約30万キロと、日常の感覚からすれば充分速いので、通常はこれを実感できない。

このように近接作用で物理が表現できる場合、それを表現する方程式は微分方程式となる。微分方程式は、「ある場所の物理量」と「ある場所の物理量の変化の様子(微分)」の関係を表現する式である。つまり、「この場所の電場」と「この場所の電場の変化の様子(微分)」の関係が、ある方程式によって決定される。遠隔作用を考えている場合、「この場所の情報」だけでは現象が記述できない(遠くにある電荷による力を考えなくては現象が予言できない)ので、微分方程式では法則を書き表すことができない。遠くにある物体の状態を知らないところで起こる現象が予言できないような場合、理論は「non-local(非局所的)」であると言う。現在知られている物理法則はみな微分方程式の形で書ける。つまり、non-localな物理理論はない<sup>10</sup>。

[ローレンツ不変性] 電磁気学に出てくる電場、磁場の持つ対称性として大事なのがローレンツ不変性である。ローレンツ不変性とは、「ローレンツ変換」と呼ばれる、時空間の対称性に対する不変性である。詳しい話は3年前期の「相対論」の授業で行うが、特殊相対論によって、時間と空間は別々のものではないことがわかる。空間というのは4次元時空間というものを適当な断面で切った切り口(3次元物体を切ると2次元の平面ができるように、4次元時空間を切ると3次元空間ができる)にあたるのがわかる。電磁気学は実はこのローレンツ変換(ひいては相対論)と深く結びついている。相対論以前の電磁気学の勉強の中でも「静止した電荷は電場を作り、動く電荷(電流)は磁場を作る」という形でローレンツ対称性が見えてくる。ローレンツ対称性は特殊相対論につながるだけでなく、その後に続く量子場の理論、素粒子論、宇宙論などの現代物理の柱となっている。

以上のように、電磁気学は現代物理の骨格となる部分を作り出した母体であり、そして今なお現代物理の中心課題を占めている。電磁気を征服することなく現代物理を理解することはできない。電磁気は現代物理の基礎的な考え方が詰まった宝石箱である。この1年の授業の中で、電磁気学の神髄をつかんでいただきたい。それが現代物理への扉を開くことになる。

<sup>9</sup>これが光速と同じなのはもちろん偶然などではなく、ちゃんと意味のあることだ。詳細はずっと後で述べよう。

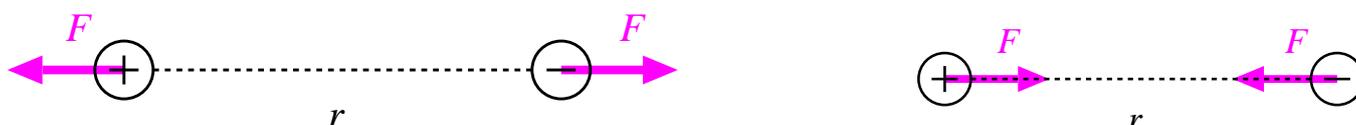
<sup>10</sup>例外と言えるのは量子力学における波束の収縮やEPR相関などだろうか。しかしこれはもちろん電磁気学の範囲を外れる。

# 第1章 真空中の静電気力と電場

この章からしばらくの間は、「真空中」で、かつ「どの電荷も運動していない」という特別な場合について考える。非常に限定された状況での考察をしていることになるが、まずはこの簡単な場合から電磁気学を始めよう。ただ、電磁場に対する空気の影響はさほど大きくないので、空気中の話をしていると考えてもそんなに大きく外れたことにはならない<sup>1</sup>。

## 1.1 クーロンの法則

### 1.1.1 逆自乗則



真空中に、距離  $r$  だけ離れた置かれた電荷  $Q$  と電荷  $q$  の間には、

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.1)$$

で表される斥力 ( $Qq > 0$  の場合) が働くというのがクーロンの法則である。

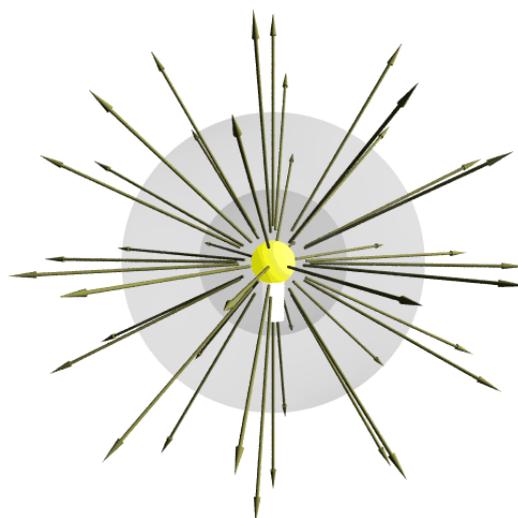
$Qq < 0$  の場合、すなわち異符号の電荷の場合は、この力は引力となる。この法則は1769年にロビソンが、1785年にクーロン<sup>2</sup>がみつけているため、「クーロンの法則」と呼ばれている<sup>3</sup>。

式(1.1)はSI単位系と呼ばれる現在広く使われている単位系を使った場合で、電荷  $q, Q$  はクーロン(記号はC)で表す。 $\epsilon_0$  は「真空の誘電率」と呼ばれる量で、SI単位系における具体的な値は  $8.854187817 \dots \times 10^{-12} \text{F}\cdot\text{m}^{-1}$  である<sup>4</sup>。

クーロンの法則は「逆自乗則」とも呼ばれる力の一種である。「逆自乗則」とは名前の通り、距離の自乗に反比例するような力であり、万有引力、それから磁力も逆自乗則に従う。

逆自乗則が物理の世界に何度も現れることは偶然ではない。これは空間が3次元であることと密接に結びついていることなのである。クーロン力よりも直観的にわかりやすい「逆自乗則」の例として、点光源による光の明るさを考えよう。我々の目が感知する「明るさ」というのは結局、目に飛び込んでくる光のエネルギーに関係している。

原点に100Wの電球があるとすると、(100Wとは1秒間に100Jのエネルギーを消費するという事なので、)1秒あたりに100Jのエネルギーを持つ光が空間に放出されていることになる<sup>5</sup>。この1秒間に100Jのエネルギーが空間にまんべんなく広がっていくとするならば、 $t$ 秒のちには半径  $ct$  ( $c$ は光速。約秒速30万



<sup>1</sup> 当たり前だが、最初に電磁気学の実験が行われた時、実験は空気中で行われている。空気中の電磁気が真空中とは全く違ったものであったら、きっと電磁気学は歴史とは全く違ったものになったであろう。

<sup>2</sup> クーロンは物理学者というよりは土木技術者で、いろんなものを測る技術にたけていたそうである。

<sup>3</sup> 「磁極に対するクーロンの法則」というものもある。後で出てくるが、式としては全く同じ形をしていて、1760年にマイヤーが見つけた(ただし発表は1801年)、1789年にクーロンが再実験している。

<sup>4</sup> ここにF(ファラッド)という単位が登場するが、この単位の意味するところは先にいかないとわからない。組み立て方から考えると、 $\epsilon_0 = \frac{Qq}{4\pi r^2 F}$  であるから、 $\epsilon_0$ の単位は  $[\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2]$  ということになる。Fは  $\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}$  に等しい。

<sup>5</sup> 実際の電球では、熱など光以外のものにもエネルギーを消費するので、100Wの電球と言っても1秒で出てくる光のエネルギーは100Jよりは小さい。

口)の球面の上に広がることになる。したがって、距離  $r$  だけ光源から離れた場所を考えると、面積  $4\pi r^2$  の面を1秒に100Jのエネルギーが通過していくことになる。当然、距離が広がれば(抜けていくエネルギー自体は変わらないが、断面積が増えるので)エネルギーの密度は  $4\pi r^2$  に反比例する形で減っていくことになる。これが逆自乗則が現れる理由である。もしこの世が2次元(平面)なら、光は球面ではなく円周の形で広がるので、エネルギー密度は  $2\pi r$  に反比例するだろう。

クーロン力は電球から出た光の場合のような「流れ」ではないので、厳密にはこの比喩は正しくはないが、ある一点を源とし、何か(電球の場合はエネルギー)を保存するように広がっていく時には、逆自乗則が現れると思ってよい。

【補足】この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでください。

単位系について、少し補足しておく。クーロンの法則の前に係数  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  がついているのはうっとおしい限りであり、これが1になるように電荷の定義をやり直せばよいではないかと思うかもしれない。実際一部の教科書ではこの係数が1になるようにしたガウス単位系という単位系も使われている。また、「 $\frac{1}{4\pi}$  がつくのはすでに述べた逆自乗則の成り立ちから当然としても、 $\epsilon_0$  が1になるように定義してもいいじゃないか」と思うかもしれない(こういう単位系の例としてはヘヴィサイド有理単位系というのがある)。

しかし、現在広く使われているSI単位系では  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  が必要である。これはSI単位系では、電流をまず定義して、1アンペアの電流が1秒間に運んでくる電気量をもって1クーロンを定義するという方法を使っているためである。一部の教科書では  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k$  と書いて省力化を図っている。 $k = 8.987551787 \times 10^9 [\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2]$  である<sup>6</sup>。

電磁気の単位系は昔からいろいろなものが使われていて注意が必要であるが、現在はSI単位系を使うのが時代の流れというものなので、このテキストでは全てSI単位系で記述することにします。

【補足終わり】

実は距離の逆自乗になるということ自体は、「電荷が帯電した金属の殻の内側のどこにいても、電気力は働かない」という実験結果から理論的にキャヴェンディッシュが導いている(1772年のこと)。こうなるためには殻の上の一方の側にいる電荷による力と逆側にいる電荷による力がうまく消し合わなくてはいいけないが、そうなるのは逆自乗の力が働く場合だけである(このことは後で具体的に計算しよう)。それゆえ、クーロンが実験的に直接確認するより前に、この法則は「たぶん成立しているだろう」という予想がされていた<sup>7</sup>。

1Cの正電荷二つが1mの距離にある時、働く力は、 $8.9875518 \times 10^9 \text{N}$  となる。ざっと10億キログラム重であるから、かなり大きい。ゆえに、日常では1Cの電荷が孤立している状況に出会うことはまずない。というのは、普段我々が眼にする物質は原子でできており、原子は正電荷を持った原子核と、ちょうどそれにつりあうだけの負電荷を持った電子が集まってできている<sup>8</sup>。この正電荷と負電荷の和がほとんど0なのである。

ここで人間の身体の中にどれだけの電荷があるかを概算してみよう。体重100kgの人間を考える。人間の質量のほとんどは原子核の中身である陽子と中性子でできていて、陽子の質量はだいたい  $1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$ 、中性子はこれよりちょっと重い程度であるから、人間の身体には  $\frac{100}{1.67 \times 10^{-27}} = 5.99 \times 10^{28}$  個の陽子または中性子がある。人間の身体を作っている原子のうち、炭素や酸素などではだいたい陽子と中性子が同じ数だから、この半分が陽子とすると、 $2.99 \times 10^{28}$  個の陽子があることになる。陽子一個の持つ電荷は素電荷 ( $1.60217733 \times 10^{-19} \text{C}$ ) であるから、これだけの数の陽子の持つ電荷は  $2.99 \times 10^{28} \times 1.60 \times 10^{-19} = 4.79 \times 10^9$  クーロンである。

もし人間の身体に他に電気がなければ、1メートル離れた二人の人間の間には、

$$\frac{8.99 \times 10^9 \times (4.79 \times 10^9)^2}{1^2} = 2.06 \times 10^{29} [\text{N}] \quad (1.2)$$

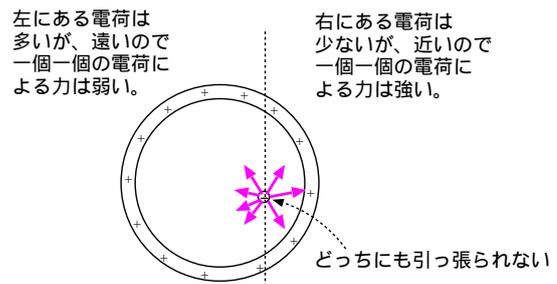
という莫大な力が働くことになる。

しかし、実際には人間の身体は電気的にはほぼ中性であり、ほぼ同数の電子がこの電気を打ち消している。マイナス電気による力がプラス電気による力を打ち消していると考えればよい(すぐ後で述べる重ね合わせの原理のおかげである)。

<sup>6</sup>この  $k$  の値は、実は「光速 ( $299792458 \text{m/s}$ ) の自乗  $\times 10^{-7}$ 」と表現できる。 $10^{-7}$  が入るのは単位の定義の問題であり、光速の自乗が入るのは光も電磁気現象の一つであるからである。これについてはずっと後で明らかになる。

<sup>7</sup>もう一つ、クーロンの法則が「たぶん成立しているだろう」と思われていた理由は、この法則が万有引力の法則とよく似ていることである。

<sup>8</sup>原子がこのような構造を持つということは、1911年のラザフォードの実験で明らかになった。ラザフォードは薄い金属箔にアルファ線(正電荷を持つ粒子)をあててみたところ、非常に大きな角度で跳ね返されることがあることを見つけた。正電荷を強く跳ね返すということは、原子の中に正電荷の集中した「芯」があるということを示していた。これが原子核である。



もし、人間の持つ電気が完全に打ち消し合わずに1%ほど残っていたとしても、その時に働く力は

$$\frac{8.99 \times 10^9 \times (4.79 \times 10^7)^2}{1^2} = 2.06 \times 10^{25} N \quad (1.3)$$

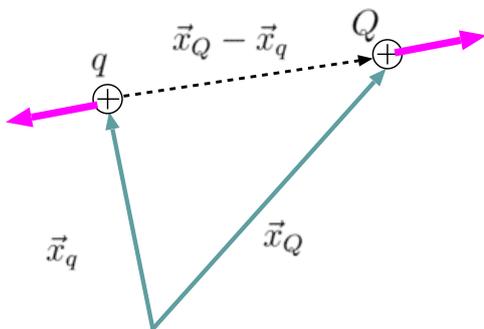
である。これでも十分大きい力である<sup>9</sup>。冬などに静電気がたまることがあるが、その時にたまっている静電気というのは、人間の体にある莫大な正電荷と負電荷のバランスがほんの少し狂ったことによって生まれる。

なお、電荷の量は現在知られているいかなる物理現象（化学反応、核反応、素粒子相互作用の全て）の前後で変化することはない。例えば

$$\text{中性子（電荷 } 0 \text{）} \rightarrow \text{陽子（電荷 } e \text{）} + \text{電子（電荷 } -e \text{）} + \text{反電子ニュートリノ（電荷 } 0 \text{）} \quad (1.4)$$

という反応（崩壊と呼ばれる）がある。この反応の前後では粒子の種類が変化しているものの、電荷の総量は変化していない。これを「電荷の保存則」と言う。これもまた、実験的に強く支持されている物理法則である。

### 1.1.2 ベクトルで表現するクーロンの法則



さて、(1.1) は力の大きさの式になっている。向きも含めてちゃんと表すにはベクトルで表現する。たとえば電荷  $Q$  が位置ベクトル  $\vec{x}_Q$  の場所に、電荷  $q$  が位置ベクトル  $\vec{x}_q$  の場所にあるならば、 $q$  のある位置から  $Q$  のある位置へと向かうベクトルは  $\vec{x}_Q - \vec{x}_q$  と書ける<sup>10</sup>。 $Q$  に働く力はこのベクトルの方向を向いている。そこで、この力を、

$$\vec{F}_{q \rightarrow Q} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_Q - \vec{x}_q|^3} (\vec{x}_Q - \vec{x}_q) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_Q - \vec{x}_q|^2} \vec{e}_{q \rightarrow Q} \quad (1.5)$$

と書くことができる。この式の真ん中の表現では、分母が「距離」<sup>3</sup> となっていて「おや？」と思うかもしれないが、後ろにかかっている  $\vec{x}_Q - \vec{x}_q$  が距離に比例する量なので、力が「距離」<sup>2</sup> に反比例するという関係は同じである。

ある。

ベクトルの長さがわかりやすくなるように、この式を（ベクトルの長さ）×（単位ベクトル）という形に書き直そう。

単位ベクトルとは「長さが1のベクトル」のことである。今の場合、 $\vec{x}_Q - \vec{x}_q$  の方向を向く単位ベクトルは

$$\vec{e}_{q \rightarrow Q} = \frac{1}{|\vec{x}_Q - \vec{x}_q|} (\vec{x}_Q - \vec{x}_q) \quad (1.6)$$

である。 $\vec{x}_Q - \vec{x}_q$  をその長さ  $|\vec{x}_Q - \vec{x}_q|$  で割っているのだから長さ1となる。このテキストでは  $\vec{e}_{\text{なんとか}}$  という記号で、「なんとか」に記された方向を向いた、長さ1のベクトルを表現することにする<sup>11</sup>。

この記号を使えば

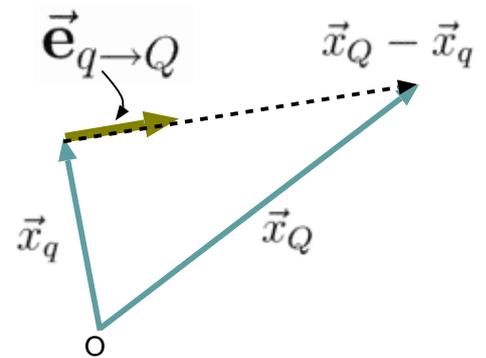
$$\vec{F}_{q \rightarrow Q} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_Q - \vec{x}_q|^3} (\vec{x}_Q - \vec{x}_q) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_Q - \vec{x}_q|^2} \vec{e}_{q \rightarrow Q} \quad (1.7)$$

である。

$\vec{F}_{q \rightarrow Q}$  は「電荷  $q$  が電荷  $Q$  に及ぼす力」である。逆に「電荷  $Q$  が電荷  $q$  に及ぼす力」 $\vec{F}_{Q \rightarrow q}$  は、

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_q - \vec{x}_Q|^3} (\vec{x}_q - \vec{x}_Q) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_q - \vec{x}_Q|^2} \vec{e}_{Q \rightarrow q} \quad (1.8)$$

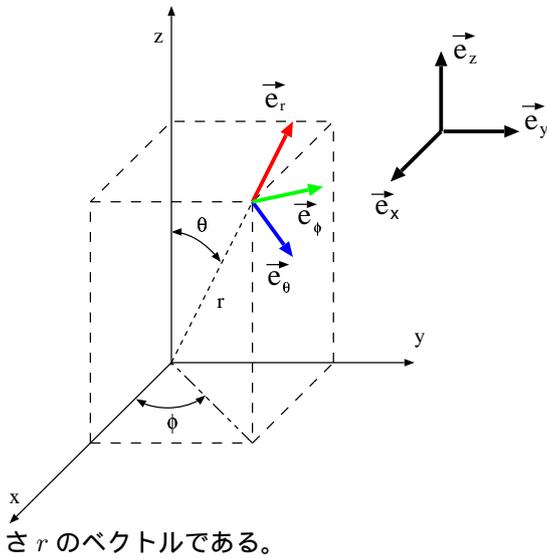
のように、 $Q$  と  $q$  の立場を入れ替えたものになる。



<sup>9</sup>ちなみに地球の質量は  $5.974 \times 10^{24} \text{ kg}$  である。この力で、地球を  $3.45 \text{ m/s}^2$  で加速することができる。

<sup>10</sup>逆に、 $\vec{x}_q$  には  $\vec{x}_Q - \vec{x}_q$  を足せば  $\vec{x}_Q$  になると考えればわかりやすい。

<sup>11</sup>以後、 $\vec{e}$  と表現されるベクトルは全て長さ1と思って欲しい。わかりやすいようにボールド体で表示する。



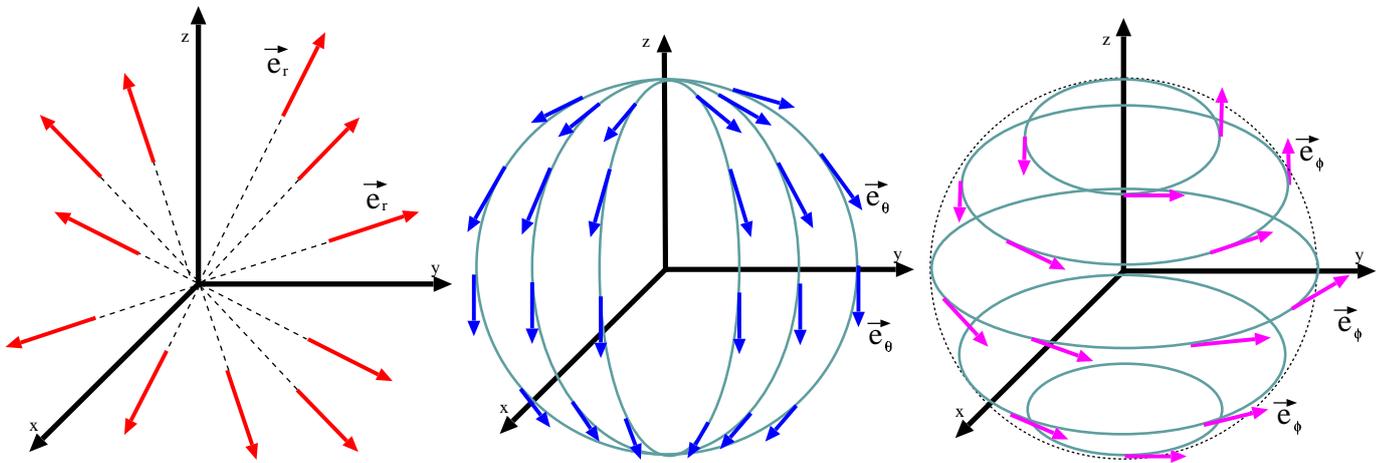
ちょうど  $\vec{F}_{q \rightarrow Q} = -\vec{F}_{Q \rightarrow q}$  である。すなわち、クーロンの法則はニュートン力学の作用反作用の法則にのっとっている<sup>12</sup>。ベクトルで表現するとこのようなこともわかりやすい。

ここで、 $q$  を原点に置く（つまり  $\vec{x}_q = \vec{0}$ ）。そして  $Q$  のいる場所を極座標  $(r, \theta, \phi)$  で表すことにすると、

$$\vec{x}_Q - \vec{x}_q = r\vec{e}_r \quad (1.9)$$

と書き直せる。ただし、 $\vec{e}_r$  は、場所  $(r, \theta, \phi)$  で、原点から離れる方向（ $r$  方向）を向いている単位ベクトルである<sup>13</sup>。同様に、 $\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$  も、それぞれ  $\theta$  方向、 $\phi$  方向を向いた単位ベクトルとして定義されている（下の図を参照）。

このような極座標における座標方向の単位ベクトルは、電磁気に限らず極座標を使う時には有用なので、覚えておくとよい<sup>14</sup>。 $r\vec{e}_r$  は、長さ  $r$  のベクトルである。

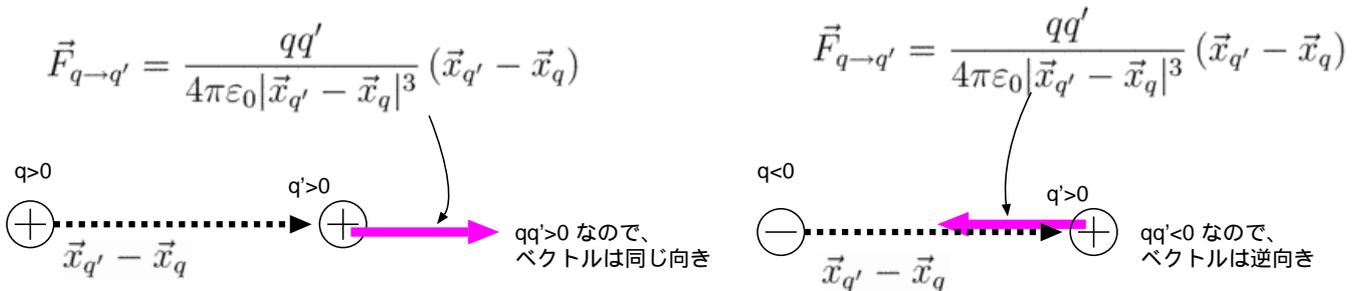


この場合ならば、 $|\vec{x}_Q - \vec{x}_q| = r$  なので、

$$\vec{F}_{\text{原点にいる } q \rightarrow Q} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^3} r\vec{e}_r = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (1.10)$$

と書けることになる。

右の図に書いたように、ベクトルで書いた式では、同符号 ( $Qq > 0$ ) なら斥力、異符号 ( $Qq < 0$ ) なら引力ということもちゃんと表現された式になっている。一方の電荷を原点とした時位置ベクトルと力のベクトルが同じ方向を向く時が斥力、逆を向く時が引力である。

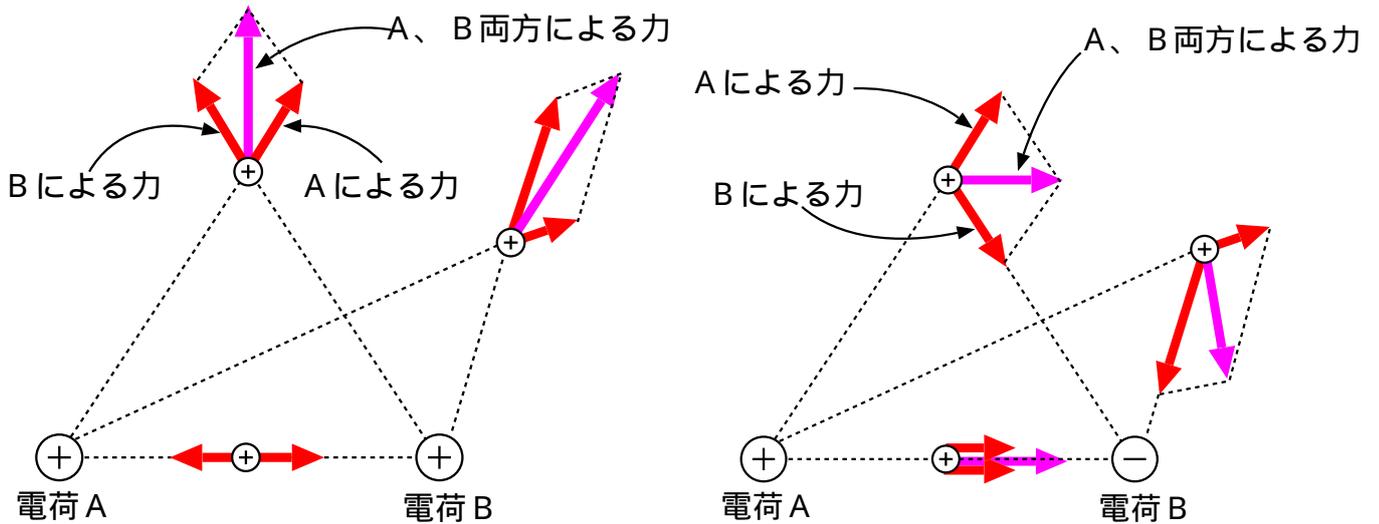


<sup>12</sup>実は単純に「クーロン力に関して作用・反作用の法則が成立する」と言っているのは静電場の時だけである。変動する電磁場を考えている時は、電磁場の変動が伝わるのに時間を要するため、ある時刻のクーロン力を見ると作用・反作用の関係が成立していない場合がある。

<sup>13</sup> $x$  軸方向を向く単位ベクトル、すなわち「 $x$  が増加する方向を向いて長さが 1 のベクトル」を  $\vec{e}_x$  と書くのと同様、「 $r$  が増加する方向を向いて長さが 1 のベクトル」が  $\vec{e}_r$ 。場所によって向いている方向が違うという点が  $\vec{e}_x$  とは大きく異なる点であることに注意しよう。

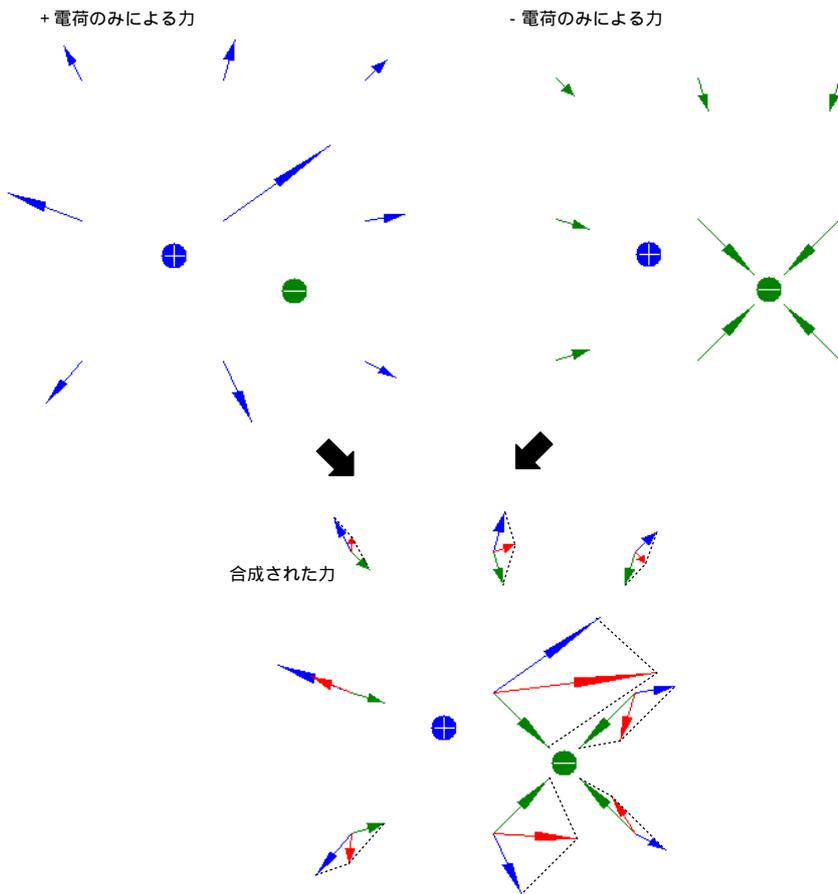
<sup>14</sup>同様に、円筒座標では  $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$  が定義される。

## 1.2 重ね合わせの原理



前の小節の「クーロンの法則」は実験的に得られた式として認めよう。もう一つ、実験的に得られている関係として認めねばならないのは重ね合わせの原理である。すなわち、複数個の電荷  $Q_i (i = 1, 2, \dots, N)$  が存在する時、もう一個の別の電荷  $q$  に働く力は、各々の  $Q_i$  によって及ぼされる力のベクトル和となる。

これを「二つの力が合成されているのだから当たり前ではないか」と考えてはいけない。上の図に書かれた「Aによる力」は、「Bが存在しなかったとした時、Aから働く力」であり、「Bによる力」は「Aが存在しなかったとした時、Bから働く力」である。この重ね合わせの原理は、二つの電荷AとBが両方存在していたとしても、それぞれによるクーロン力が互いとは独立な形で作用することを示している（これは実験なしに認めていいほど「あたりまえ」のことではないのだ）。



つまり、Aによるクーロン力は、Bが存在していることによって乱されることもなく、Aのみがあった時と同じだけの力を及ぼすということである<sup>15</sup>。AとBの両方が存在する時に働く力が、この二つの単純なベクトル和になるということは、そんなに自明なことではないのである。なお、物理のいろんなところでこの重ね合わせの原理は顔を出す、それはそのよう

な現象の基礎となる方程式が線型であること（つまり、1次式で書かれていること）に由来している。物理の多くの方程式は幸いなことに線型である。方程式の線型性と重ね合わせの原理の関係については、後で「電場を決定する方程式」を出した時にもう一度確認しよう。

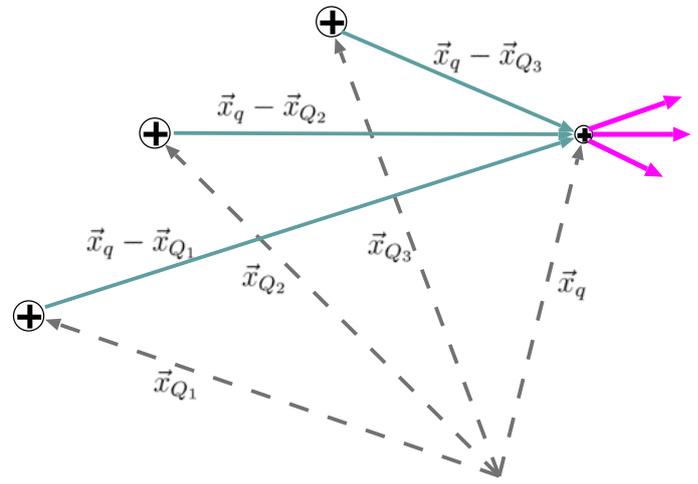
<sup>15</sup>物理現象においてはこういう独立性があることが多いが、人間関係はこうはいかない。Aさんがいる時には言えないことも、Bさんがいる時なら言えたりするし、逆にAさんとBさんがそって初めて何か（喧嘩？）が起こることもある。

より一般的に重ね合わせの原理を表現しておく。今電気量  $q$  の電荷が一つ（位置ベクトル  $\vec{x}_q$  の位置に）あるとする。その回りに、電気量が各々  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  であるような電荷が、各々の位置ベクトルが  $\vec{x}_{Q_1}, \vec{x}_{Q_2}, \dots, \vec{x}_{Q_N}$  である位置に配置されているとする。

この時、電気量  $q$  の電荷が受ける力は、

$$\begin{aligned} \vec{F}_q &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_{Q_i \rightarrow q} = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_q - \vec{x}_{Q_i}|^3} (\vec{x}_q - \vec{x}_{Q_i}) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{Q_i q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_q - \vec{x}_{Q_i}|^2} \vec{e}_{Q_i \rightarrow q} \end{aligned} \tag{1.11}$$

と表すことができる。もちろんこの和はベクトルの和として取られていることに注意。



### 1.3 電場と電気力線

#### 1.3.1 電場の定義

前節では「電荷と電荷の間に働く力」としてクーロン力を説明した。ファラデーは、電気的な力は電荷と電荷の間に直接働く（「遠隔作用」）のではなく、電荷は周囲の空間に電場を作り、その電場によって他の電荷が力を受けるという「近接作用」の考え方を導入した。

電場<sup>16</sup>の強さと向きは以下のように定義する。

【電場の定義】

ある場所に試験電荷  $q$  を置いたと仮定すると、その電荷に力  $\vec{F}$  が働くとする。この時、その場所には  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  の電場が生じている。

別の言い方をすれば、「電場とは、その場所に単位電荷を置いた時にその電荷が受ける力である」としてもよい。実際には、そこに電荷を置くことによって回りの状況は変化する（たとえば置かれた電荷に引かれたり反発したりして他の電荷の位置が変わる）のが普通なので、この単位電荷はあくまで仮想的に置かれるものである。そこで「試験電荷」という言い方をしている。

クーロンの法則によれば、場所  $\vec{x}$  にいる電荷  $q$  が、場所  $\vec{x}'$  にいる電荷  $q'$  に及ぼす力は  $\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}' - \vec{x}|^2} \vec{e}_{x \rightarrow x'}$  であるから、場所  $\vec{x}'$  における電場は（この場合試験電荷にあたるものは  $q'$  であるから）

$$\vec{E}(\vec{x}') = \frac{\vec{F}_{q \rightarrow q'}}{q'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}' - \vec{x}|^2} \vec{e}_{x \rightarrow x'} \tag{1.12}$$

となる。

以上のようにして電場を定義しても、電場を定義せずにクーロンの法則のみを使った場合に比べて、物理的内容には違いがないように思えるかもしれない。電荷と電荷の間に直接力が働いても、電荷が電場をつくり、電場が電荷に力を与えても、結局のところ「電荷と電荷の間に引力や斥力が働く」という点は同じである。しかし、全く同等と思えるのはこれが静電場すなわち時間的に定常な電場を扱っているからであって、変動する電磁場を考えたときとそうはいかなくなる。とにかくこの時点で把握して欲しいのは「電場というものを導入することには、単なる数学的置き換えではない深い意味があるのだ」ということである。また、定常な電場に限り考えた場合でも、電場という概念はとても便利である。それは以降の話で理解して欲しい。

クーロン力に重ね合わせの原理が成立するので、クーロン力を単位電荷あたりに直した電場にも当然、重ね合わせの原理は成立する。

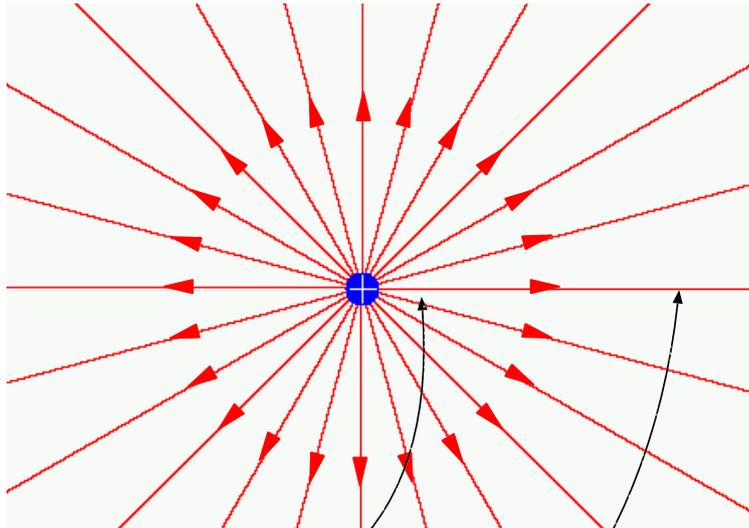
<sup>16</sup> 「電界」と呼ぶ場合もある。英語では electric field である。field はサッカー場などの「フィールド」と同じ言葉で、つまりは野原のこと。地面にあっち向いたりこっち向いたりしながら芝生が生えている様子を思い浮かべると「field」のイメージがわかる。

## 電場の単位

SI 単位系での電場の単位は、 $\vec{F} = q\vec{E}$  からすれば  $\vec{F}$  は [N] (ニュートン)、 $q$  は [C] (クーロン) なのだから、[N/C] (ニュートン毎クーロン) となる。ところが、後で電位  $V$  というものが出てきて、電場はその電位の空間微分で表す ( $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ ) こともできる。電位の単位が [V] (ボルト) で、微分  $\vec{\nabla}$  は [1/m] (メートル分の1) なのだから、電場の単位は [V/m] (ボルト毎メートル) を使うこともある。

## 1.3.2 電気力線

電場というものを視覚的に表す手段として、電気力線というものを定義しよう<sup>17</sup>。



このあたりは電気力線の密度が濃い  
= 電場が強い

このあたりは電気力線の密度が薄い  
= 電場が弱い

電気力線とは「各点各点で電場の方向を向いている線」である。ある点から出発して電場の方向へ方向へと線を伸ばしていくことで、空間を埋め尽くすように電気力線を引くことができる。

この性質からわかるように、電気力線は正電荷からは離れる方向に、負電荷へと向かう方向に伸びていくことになる。ゆえに、電気力線は正電荷で始まり、負電荷で終わる。あるいは、負電荷に出会うことなく無限遠まで伸びていく電気力線もあるし、逆に正電荷から出たわけでもなく無限遠からやってくる電気力線もある。左の図は正電荷が一個ある場合の電気力線で、正電荷から放射状に無限遠に向かって伸びていく<sup>18</sup>。

これで電気力線は電場の方向を示すことができる。では電場の強さはどのようにして表現するかというと、電気力線の密度が電場の強さになる。

たとえば、電気量  $Q$  の正電荷が一個だけある時、距離  $r$  離れたところでは電場の強さは  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  であるから、この場所には  $1\text{m}^2$  あたりに、 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  本の電気力線を引くことになる。電荷から距離  $r$  離れた

所、と言う条件を満たす場所は半径  $r$  の球の表面であるから、面積は  $4\pi r^2$  である。

ゆえに、引くべき電気力線の本数は  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$  となる<sup>19</sup>。

この電気力線の総本数が距離  $r$  によらないことに注意しよう。図に描いているように、電気力線は途中で増えたり減ったりせずに伸び続けていくことになるわけである。

以上から、電気力線は  $Q[\text{C}]$  の電荷から  $\frac{Q}{\epsilon_0}$  本出ることになる。ちなみに、 $\frac{1}{\epsilon_0} \simeq 1.13 \times 10^{11}$  であるから、1C からは約 1130 億本出ることになる。実際に図に描くときには見やすい程度に適当に本数を調節して描くことになる。なお、「本」という単位を使って計算しているからと言って、電場が「1本、2本」と数えることができるような不連続なものだというわけではない。

【FAQ】「電気力線と電気力線の間には電場はないんですか？」

電気力線は電場を表現するための描画方法なのであって、実際に線があるわけではない。実際の電場はもちろん隙間無く存在するが、隙間無く存在するからと言ってすべての場所に線を引いてしまったら、真っ黒になってしまって図を

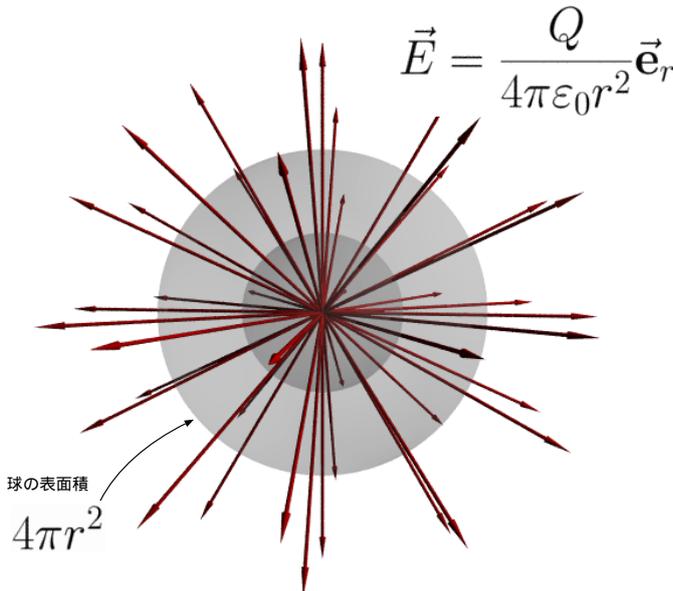
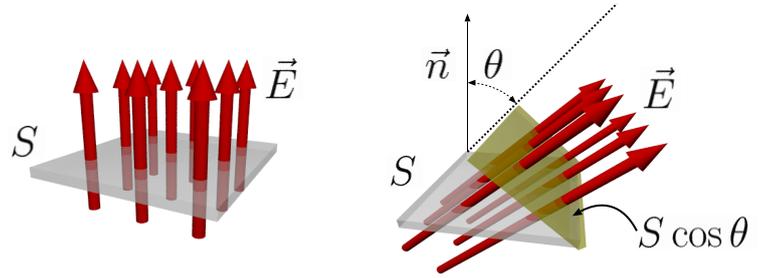
<sup>17</sup>あくまで視覚的に表現するための手段である！ つまり本当にそういう線が存在しているわけではない。

<sup>18</sup>この節にあげた電気力線の図は、全て3次元的な広がりを見捨て、2次元的に描かれている。実際はもちろん、紙面から飛び出す方向にも電気力線は伸びている。

<sup>19</sup>ここで  $4\pi$  が消えることが SI 単位系を採用して簡単になった点。ガウス単位系では電荷  $Q$  から  $4\pi Q$  本出る。

描く意味がなくなってしまう。「電気力線の本数」には（人間が図を描く時の都合はあれど）物理的意味はない。「電気力線と電気力線の隙間」にも物理的意味はない。ただ、図の上で電気力線と電気力線の間が広く開いているならば、その場所は電場が弱いのだ、と判断できるだけのことである。

「電気力線の密度が電場の強さ」という点をより正確に述べておく。電気力線に対して垂直な仮想的な面を考える。この面を貫いていく電気力線の本数を数え、この面の面積で割る。すると電場の強さとなる。単純に「本数÷面積」とやったのでは電場とは一致しない。逆に電気力線の本数は「電場の強さ×面積」で計算できることになるが、右の図のように、電気力線に対して斜めになっているような面積を考えた時、電気力線の本数は「電場の強さ×面積×cosθ」となる。θは面の法線ベクトル（図の  $\vec{n}$ ）と電場  $\vec{E}$  のなす角である。あるいは、「電気力線の本数は  $\vec{E} \cdot \vec{n}S$  である」と、内積を使って表現することもできる。さらには、 $\vec{n}S$  をまとめて  $\vec{S}$  という「面積ベクトル」として書いて、 $\vec{E} \cdot \vec{S}$  とする場合もある。面積ベクトルはその大きさが考えている面積であり、向きはその面積の法線方向となる<sup>20</sup>。



点荷のつくる電場が  $\frac{1}{r^2}$  に比例していたことは大きな意味がある。こうでなくては、「電気力線は枝分かれも合流もしない」という法則が成立しない。左の図を見るとわかるように、電気力線の本数を数えると、どんな半径  $r$  の場所で考えたとしても、トータルの電気力線の本数は  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$  となる。ここで、球面の上では常に球面の法線ベクトルと電場が平行であることに注意しよう。だから上で考えた  $\cos\theta$  は必要ない。答えは場所によらない。つまり、トータルの電気力線の本数はどこで計算しても同じ。

すなわち電気力線が途中で枝分かれして増えたり、合流して減ってしまったり、ということはありません。

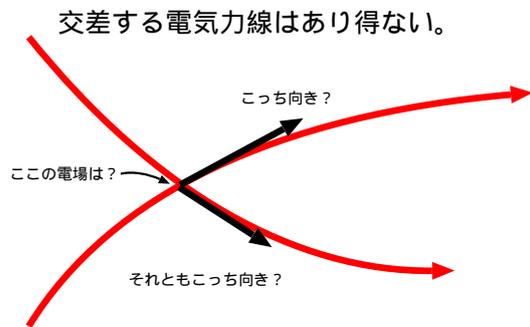
さらにもう一つ大事な法則として「電気力線は交差しない」ということもある。もし交差していたら、その場所には二つの電場があることになり、

定義に矛盾する。

以上から、電気力線の定義ならびに性質を以下のようにまとめることができる。

【電気力線の定義と性質】

- (1) その場所の電場の方向に伸びる。
- (2) 単位面積あたりの本数が電場の強さに等しい。
- (3) 正電荷で始まり、負電荷で終わる。あるいは無限遠からやってくるか、無限遠まで伸びる。途中で途切れることはない。
- (4) 途中で分裂したり、合流したりすることはない。
- (5) 交差することはない。
- (6) 正電荷  $Q[C]$  から  $\frac{Q}{\epsilon_0}$  だけ出る（負電荷  $-Q$  には  $\frac{Q}{\epsilon_0}$  だけ入る）。



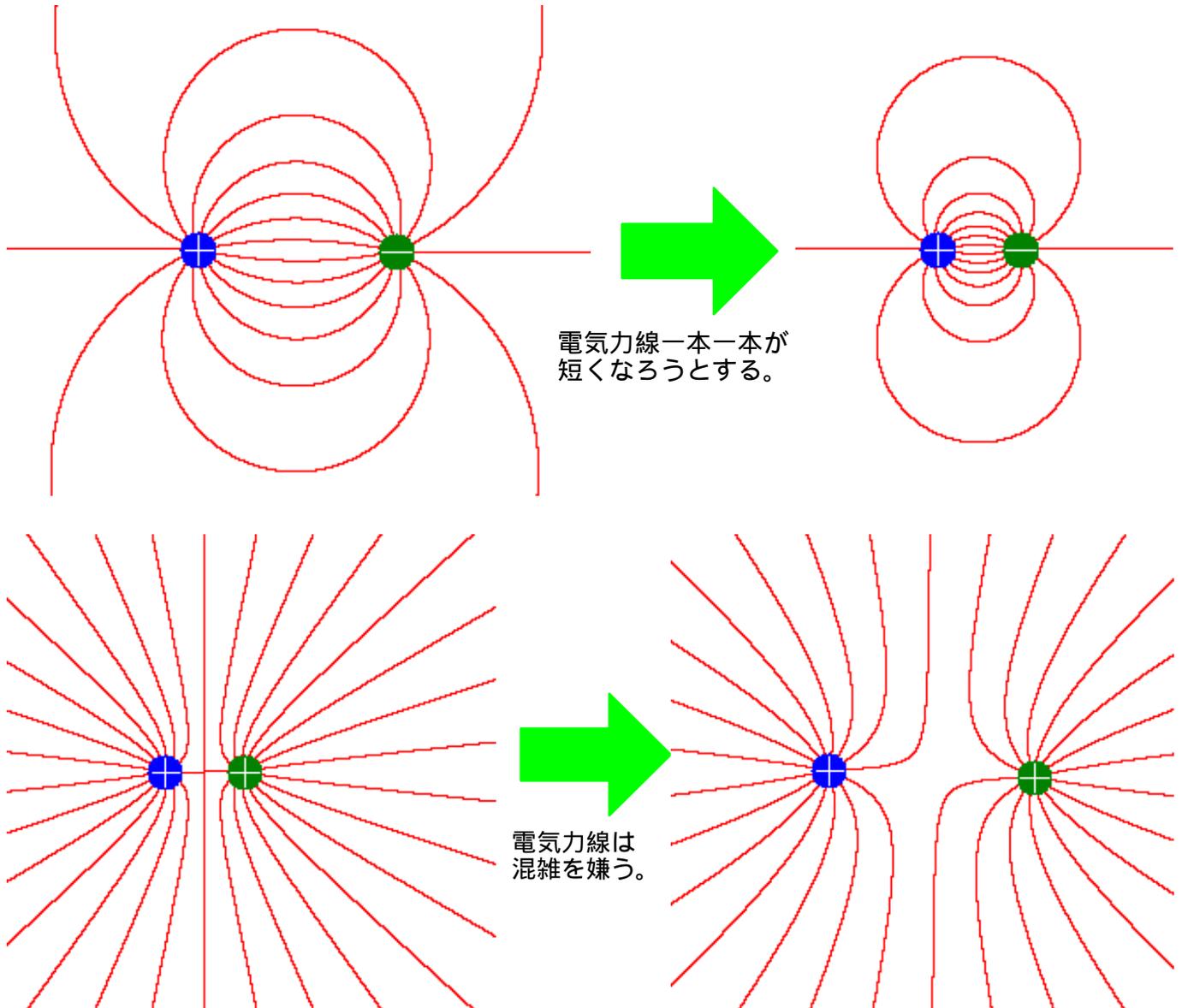
なお、電気力線は矢印で表現されるものの、何かが物理的に移動している跡を示すものではないので、「正電荷はずっ

<sup>20</sup>法線方向というだけでは表から裏が裏か表かは指定されていない。実際に面積ベクトルを定義する時にはそこも厳密に決めてから計算しなくては行けない。

と電気力線を出し続けていますが、いつかなくなってしまうたりしないのですか？」と心配する必要はない<sup>21</sup>。

### 1.3.3 電気力線の力学的性質

正電荷と負電荷が引き合っている時、正電荷と正電荷が反発しあっている時の電気力線の様子を描いて、静電気力を観察すると、電気力線には以下に示すような性質があることがわかる。



電気力線がなるべく短くなろうとする、ということは正電荷と負電荷の引力を考えるとわかりやすい。また、電気力線の混雑を嫌う性質のおかげで正電荷と正電荷、負電荷と負電荷に斥力が働く<sup>22</sup>。

この性質は、磁場のところで出てくる磁力線と共通の性質であるという点でも重要である。N極とS極が互いに引き合うのは、N極とS極へ向かう磁力線の長さを少しでも短くしようとするからであるし、磁石のN極とN極を接触させようとすると、それにあらがう斥力を感じるのは、磁力線の混雑を嫌う性質の顕れなのである。

後で出てくる「静電場の位置エネルギー」を使って考えると、この性質は「自然は位置エネルギーの低い方向へ行く」という一般的な法則による結果であることもわかる。これについては後で述べよう。とにかく、クーロン力という現象は電気力線（すなわち、電場）の性質を考えることで統一的にとらえることができる、ということを理解しておこう。つまり、クーロン力が本質なのではなく、電場が本質なのである。

<sup>21</sup> 同じような心配（杞憂）として「地球は重力を出し続けているので、いつか重力なくなりませんか？」というものもある。静的な「場」というのは、消耗したりはしないものなのである。そもそも、力を出してもエネルギーを消耗しないという状況は他にもいくらでもある。何かエネルギーを消費するのは、他に対して仕事をした時である。

<sup>22</sup> 近接作用の考え方では、力を及ぼす根源は電場、すなわち電気力線なのである。電場という概念を使って考える以上、主役は常に電場でなくてはならない。

## 1.4 いろいろな電荷分布における電場の計算

ここまでは電荷が点状である場合のみを考えてきたが、以下ではいくつかの例を述べて、広がった電荷分布によって作られる電場を計算する方法を示そう。後でもう少し楽に計算できる方法をいくつか示すことになるが、だからこの節は無駄かという、そんなことはない。ここで使われる手法は物理のいろんなところで使われていて、それを知っておく意味は大きい。

ここで、電場に関しても重ね合わせの原理が使えるということに注意しよう。そのおかげで、点状ではなく、広い範囲に分布している電荷によって働く力を計算することができるのである。

### 1.4.1 有限の長さの線上に広がった電荷による電場

例題として、有限の長さの線上に均等に分布した電荷によって、その線から距離  $d$  離れたところにいる電荷  $Q$  に働く力を計算してみよう。

まず問題をちゃんと設定しよう。直交座標系  $(x, y, z)$  を用意し、 $z$  軸に重なるように（半径が無視できるほど細い）円柱状の棒をおく。その棒に単位長さあたり  $\rho$  の電荷を与える<sup>23</sup>。つまり、棒のうち微小長さ  $dz$  の部分が電荷  $\rho dz$  を持つようにする。棒は  $z = -L$  から  $z = L$  まで（つまり長さ  $2L$  の範囲）に分布しているものとする。

$z = 0$  平面上で  $z$  軸から  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  はなれた場所の電場の強さはいくらだろう？—言い換えれば、この場所に試験的に単位電荷を置くと、単位電荷が棒の上の正電荷から受ける力の大きさはどれだけになるだろう??—このような計算を行うには、以下のような物理の常套手段を使う。

#### 【物理の常套手段：細かく区切って考えよう】

- Step 1. 広い範囲に広がっているものを微小な区間に分ける。  
 Step 2. 微小な区間による影響を考える。微小な区間なので、この計算はまるでその微小区間が点であるかのごとく計算してもいい。  
 Step 3. 全微小区間にわたって影響を足し上げる。

このような3つの Step を実行した結果が正しい答えになるためには（つまり微小部分の電荷による電場の足し上げが全電荷による電場になるためには）、重ね合わせの原理が成立しなくてはならないことは言うまでもない。

まずおおざっぱに予想しておく、当然この単位電荷は棒から（ $z$  軸から）離れる方向の力を受けるだろう。

Step 1. すでに述べたように、長さ  $dz$  の微小部分は  $\rho dz$  の電荷を持つ。

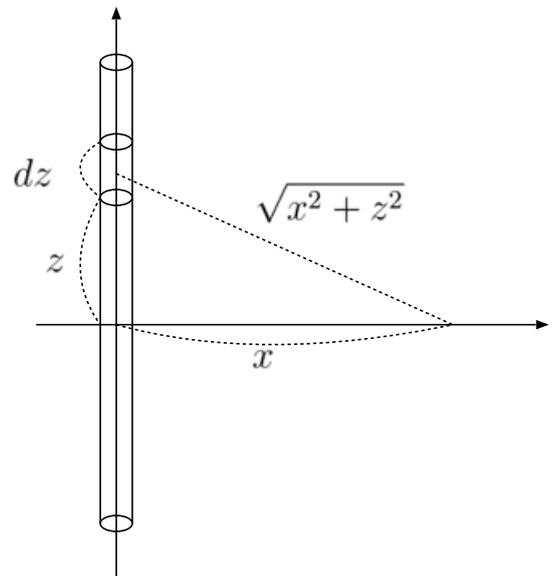
Step 2. 試験電荷のいる位置を  $(x, 0, 0)$  としよう。  $(0, 0, z)$  から  $(0, 0, z + dz)$  までの間にいる電荷  $\rho dz$  が作る電場の大きさは、

$$\frac{\rho dz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + z^2)} \quad (1.13)$$

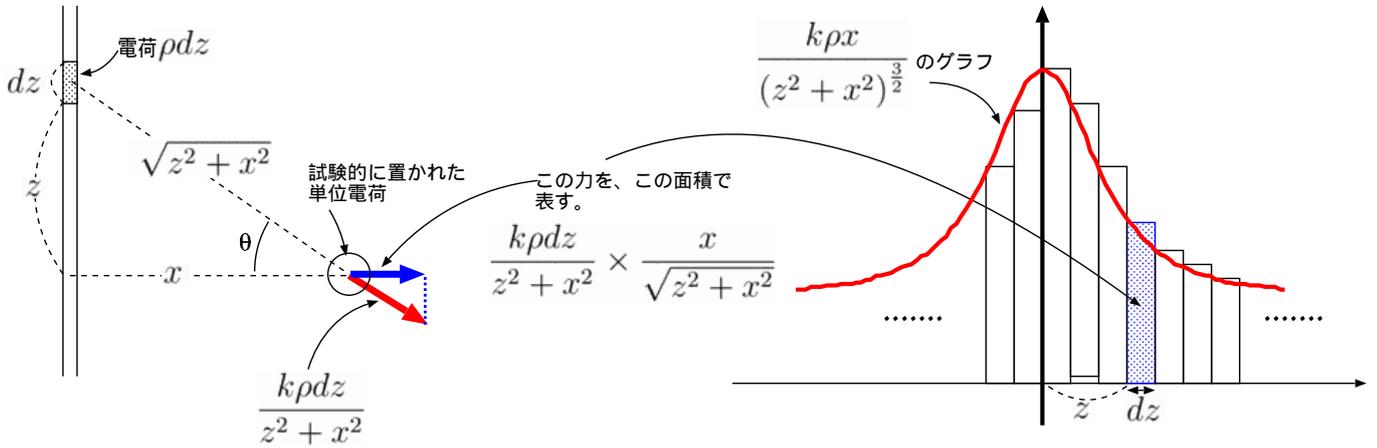
である。ただし、この電場は予想される方向である真横ではなく、斜めを向いている。これはこの力が「微小断片による力」だからで、全ての微小断片による力を足し算すれば、 $z$  方向の成分は消し合ってなくなるはずである。まじめに計算するならばこれを  $z$  方向と  $x$  方向にわけて考えて別個に足し算すべきだが、最初の予想によれば、 $z$  方向は足し算すると0になる。そこで、どうせなくなる部分を計算するのはやめにして、 $x$  方向だけを考えよう。三角形の相似により、

$$\frac{\rho dz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + z^2)} \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{\rho x dz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.14)$$

が断片による電場の  $x$  成分である。



<sup>23</sup>この後「単位長さあたり」とか「単位面積あたり」「単位体積あたり」という言葉を頻繁に使うであろう。意味がつかみにくい、という人はそれぞれ「1mあたり」「1m<sup>2</sup>あたり」「1m<sup>3</sup>あたり」と読み替えて考えればよい。もし長さの単位がmでなくcmだったりヤードだったり尺だったりする時は、もちろんそれに応じて取り替える。



Step 3. 断片による電場を足す。足すと言うことはすなわち、 $z$  に関して  $(-L, L)$  で積分するという。上の図の長方形一個一個の面積が、 $\frac{\rho x dz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$  であり、それを  $z$  を変化させながら足していく。それはすなわち、 $\int_{-L}^L \frac{\rho x dz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$  という積分になる。図では  $dz$  が有限の幅を持っているため、足し算の結果はでこぼこした角柱の足し算になるが、積分においては  $dz$  は微小量であることを考えると、これが正しく今考えている電場のトータルを出してくれることになる。

結局、 $\int_{-L}^L \frac{Q\rho x}{4\pi\epsilon_0(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz$  という積分をしなくてはならないのだが、この積分は  $z = x \tan \theta$  とおくことで簡単に計算できる形になる。 $\theta$  の意味は図にある通りである。図を見るとわかるように、 $\sqrt{x^2 + z^2} = \frac{x}{\cos \theta}$  である<sup>24</sup>。

$z = L$  になる時は  $\tan \theta = \frac{z}{x}$  になる時であるから、そうなる角度を  $\alpha$  とおくと、

$$\begin{aligned} & \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\rho x}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{x}{\cos \theta}\right)^3 \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 x} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 x} [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 x} \sin \alpha \end{aligned} \tag{1.15}$$

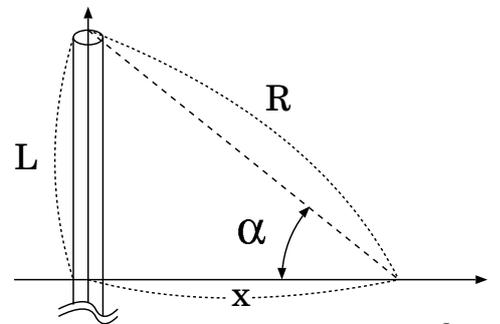
と計算できる。

もし、この直線が無限に長いならば、 $\alpha = \frac{\pi}{2}$  となるので、電場は  $E = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 x}$  となる。実はこの場合には、後で出てくるガウスの法則を使う方が簡単に答が出るのである。この事は後で確認しよう。

なお、この棒に含まれている全電荷量  $Q$  は密度  $\rho$  に長さ  $2L$  をかけたものであるから、この電場は

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x L} \sin \alpha = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \times \frac{x}{L} \sin \alpha \tag{1.16}$$

と書くこともできる。 $\sin \alpha = \frac{L}{R}$  であることを考えると、 $\frac{x}{L} \sin \alpha = \frac{x}{R}$  であり、これは 1 より小さい。つまりこの時の電場は、棒の中心に電荷  $Q$  が全部集まったとした場合の答えである  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$  よりも弱くなる。弱くなってしまったのは、 $z$  成分の電場が消し合ってしまったことと、電荷の大部分が  $x$  より遠い距離にいることが原因だと考えてよい。



**【補足】** この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

せっかくベクトルを使った記法も習ったので、それを使って計算する方法も書いておこう。微小部分  $dz$  のつくる電場はベクトルで書くと、

$$\vec{E} = \frac{\rho dz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + z^2)} (\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z) \tag{1.17}$$

となる。ここで、ベクトル  $\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z$  は、 $x$  軸に対してマイナス方向に角度  $\theta$  だけ傾いている単位ベクトルである。上でやったように変数変換 ( $z = x \tan \theta, dz = \frac{x}{\cos^2 \theta} d\theta$ ) をすると、(この場合、図から  $x^2 + z^2 = \left(\frac{x}{\cos \theta}\right)^2$  となることに注意)

$$\vec{E} = \frac{\rho d\theta}{4\pi\epsilon_0 x} (\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z) \tag{1.18}$$

と書ける。つまり、 $\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z$  のところ以外は  $\theta$  依存性がなくなってしまった。

<sup>24</sup>これは  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  という公式を使っても確認できるが、図で考える方が楽だろう。

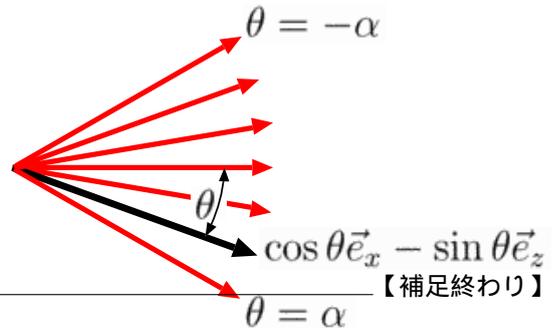
この積分

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z) d\theta \quad (1.19)$$

は、右の図のように単位ベクトルの角度を変化させつつ足していくという計算になる。図でも明らかのように、 $\vec{e}_z$  の方向の成分は奇関数で消え、 $\vec{e}_x$  方向については

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta \vec{e}_x d\theta = [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} \vec{e}_x = 2 \sin \alpha \vec{e}_x \quad (1.20)$$

という結果になる。もちろん最終結果は (1.15) と同じである。



### 1.4.2 円状の電荷による電場

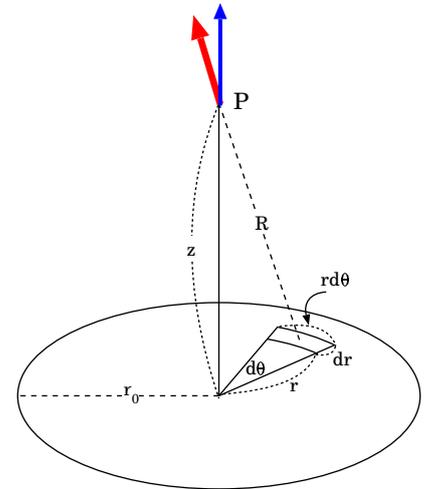
次に、一様に帯電した円盤による電場を考えよう<sup>25</sup>。この円盤には単位面積あたり  $\sigma$  の電荷があるとして考えよう<sup>26</sup>。

円盤を微小にわけるときは、図のように 2 次元平面上に極座標  $(r, \theta)$  を張って<sup>27</sup>、まず  $r \sim r + dr$ 、 $\theta \sim \theta + d\theta$  の範囲に入る部分を「微小面積」として取り出して考える。後で  $r$  を 0 から  $r_0$  (円の半径) まで積分し、 $\theta$  を 0 から  $2\pi$  まで積分すれば (つまり、円全体について足し上げれば)、円盤上の全電荷を考えたことになる。

この微小部分は、 $r$  方向に長さ  $dr$  を持ち、 $\theta$  方向に長さ  $r d\theta$  を持つ (長さ  $d\theta$  ではないことに注意。ラジアン定義を思い出せ) ので、面積は  $r dr d\theta$  となる。よってこの微小部分には、 $\sigma r dr d\theta$  の電荷が入っている。

この微小電荷が円盤の中央上空距離  $z$  の場所 (図の P 点) に作る電場は、 $\frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$  である。しかし、さっき同様、この電場は斜めを向いており、最終結果 (足し算 = 積分が終わった後) に効くのは鉛直上向き成分だけであろう。ゆえに、

$$\frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \frac{z}{R} \quad (1.21)$$



という電場を積分すればよい。ここまで  $R$  と書いてきた量は実際には  $R = \sqrt{z^2 + r^2}$  であるから、それを代入して、

$$\frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.22)$$

という積分を行えばよい (積分と関係ない数は先に外に出した)。

この積分のうち、 $d\theta$  積分はなんなく終わり (被積分関数の中に  $\theta$  がないから) 答は  $2\pi$  である。つまり、後は

$$\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^{r_0} \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.23)$$

をすればよい。この積分も  $r = z \tan \phi$  とすればできる。  $dr = \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi$  と置き直して、

$$\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^{\phi_0} \frac{z \tan \phi}{(z^2 + z^2 \tan^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\phi_0} \frac{\tan \phi}{(1 + \tan^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{\cos^2 \phi} d\phi \quad (1.24)$$

となる。  $1 + \tan^2 \phi = \frac{1}{\cos^2 \phi}$ 、つまり  $\frac{1}{(1 + \tan^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} = \cos^3 \phi$  を使ってさらに簡単にすると、

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\phi_0} \sin \phi d\phi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [-\cos \phi]_0^{\phi_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [-\cos \phi_0 + \cos 0] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \phi_0) \quad (1.25)$$

図から、 $\cos \phi_0 = \frac{z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}}$  である。これで最終結果は

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 (r_0)^2} \times \frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}} \quad (1.26)$$

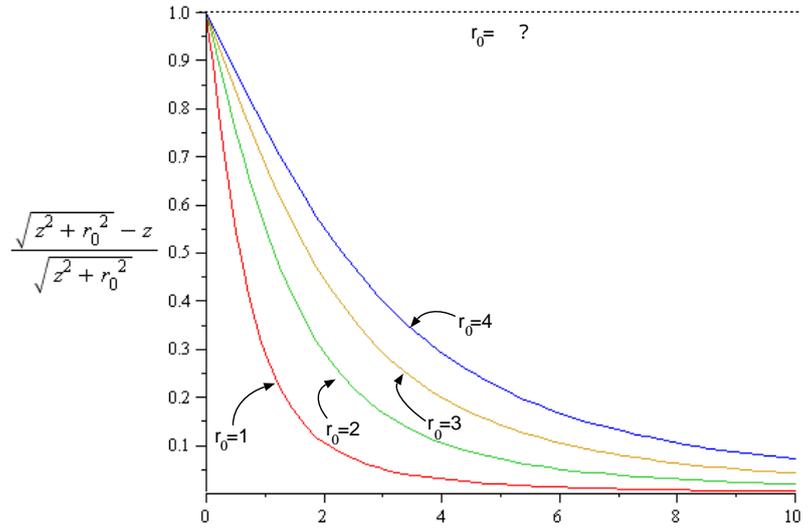
となった。最後の式では、 $Q = \pi (r_0)^2 \sigma$  であることを使って書き直している。

<sup>25</sup>念のために述べておくが、単純に金属の円盤に電荷を与えたとしても、一様には帯電しない。同種電荷は反発するので、外側に偏る。

<sup>26</sup>さっきのは線密度、つまり「単位長さ当たりの電荷」で、今回は面積密度、つまり「単位面積当たりの電荷」である。

<sup>27</sup> $z$  も含めて 3 次元円筒座標  $(r, \theta, z)$  を張ると考えた方がいいかもしれない。

右のグラフは  $r_0$  をいろいろ変化させていった時の関数  $\frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}}$  の様子である。 $z$  が大きくなるとこの関数はどんどん小さくなっていく(減衰していく)。  $r_0$  が大きいほど、減衰の割合は小さくなっていることわかる。



ここで  $r_0 \rightarrow \infty$  の極限を取ってみよう。つまり、無限に広い平面上に電荷がたまっている場合である。この時、 $\cos \phi_0 = 0$  である(図で考えるとわかるように、この極限は  $\phi_0$  が直角になる極限だ)。よって、この時の電場は  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  となってしまう。つまり、場所によらない定数なのである。もし、無限に広い板に一樣に電荷が溜まっていたら、その板の作る電場はどんなに遠くに行っても弱まらないことになる。

現実には無限に広い平面に電荷を一樣に溜めるなどということはできないから、どこまでも弱まらない電場というのはもちろんできない。

なぜこのようになるのかは、ガウスの法則を学ぶと納得できる(さらに、なぜ分母に2があるのかも深く納得できるはずだ)。

$r_0$  が有限で  $z$  が大きいところでのこの減衰の様子は、だいたい  $\frac{(r_0)^2}{2z^2}$  であることを以下で示そう。 $r_0$  に比べて  $z$  が大きいことから、 $\frac{r_0}{z}$  が1より非常に小さい数字である ( $\frac{r_0}{z} \ll 1$ ) というのを使って近似を行う。 $E$  の式のうち、 $\frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}}$  の部分を考えよう。まず分母と分子を  $z$  で割って、

$$\frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (\frac{r_0}{z})^2} - 1}{\sqrt{1 + (\frac{r_0}{z})^2}} \tag{1.27}$$

とする。ここでルートの展開公式  $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x + \dots$  を使うと、

$$\frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}(\frac{r_0}{z})^2 + \dots - 1}{1 + \frac{1}{2}(\frac{r_0}{z})^2 + \dots} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{r_0}{z})^2 + \dots}{1 + \frac{1}{2}(\frac{r_0}{z})^2 + \dots} \tag{1.28}$$

であるから、 $z$  が大きいところでは、

$$\frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{z}\right)^2 \tag{1.29}$$

となる。これを  $E$  の式 (1.26) にいれると、

$$\frac{Q}{2\pi\epsilon_0(r_0)^2} \times \frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}} \simeq \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(r_0)^2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{z}\right)^2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \tag{1.30}$$

となって、普通の逆自乗則が出てくることになる。ただし、 $z$  が有限ならば常に逆自乗則よりも弱くなる。これは直線上に分布した電荷の場合と同じである。

$$Q = \pi(r_0)^2 \rho$$



遠くにある円盤の作る電場は、点電荷による電場と区別がつかない。

【補足】この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

ここでもベクトルを使った記法で計算する方法も書いておこう。この場合で  $z$  方向を向いた単位ベクトルを  $\vec{e}_z$ 、 $r$  方向を向いた単位ベクトルを  $\vec{e}_r$  と書くことにすると、微小電荷  $\sigma r dr d\theta$  から点 P に向かうベクトルは  $z\vec{e}_z - r\vec{e}_r$  と書くことができる。ベクトルで書いた電場の式は、(1.12) を使って  $\vec{E}(\vec{x}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}' - \vec{x}|^3} (\vec{x}' - \vec{x})$  と書ける ( $\vec{x}$  にある電荷  $q$  が  $\vec{x}'$  に作る電場)。この式を使って表現すれば、ここで考えた電場は

$$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{|z\vec{e}_z - r\vec{e}_r|^3} \times (z\vec{e}_z - r\vec{e}_r) \tag{1.31}$$

と書くことができる (この式では電場の全ての成分をいっきに表現している)。まず  $\vec{e}_r$  に関する部分、

$$-\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{|z\vec{e}_z - r\vec{e}_r|^3} r\vec{e}_r \tag{1.32}$$

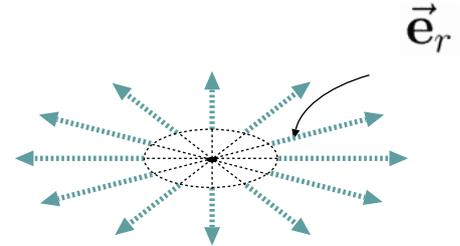
を考えることにしよう (上で考察したように、もちろんこれは 0 になるのである)。ここで、 $\vec{e}_r$  は定ベクトル<sup>28</sup>ではないということに注意しよう。 $\vec{e}_r$  は  $r$  の増える方向を向いたベクトルであり、これは場所によって違う。これを一周積分すると、

$$\int_0^{2\pi} d\theta \vec{e}_r = 0 \tag{1.33}$$

になる。図を見るとわかるように、一周積分の中で必ず逆向きの  $\vec{e}_r$  が現れて消し合うからである。(1.32) をよく見ると、分母が  $|z\vec{e}_z - r\vec{e}_r| = \sqrt{z^2 + r^2}$  であることを考えると、 $\theta$  に依存する部分は  $\vec{e}_r$  しかない。ゆえにこの  $\vec{e}_r$  に比例する部分の積分は (1.33) と同じ形になっていて、0 になる。 $\vec{e}_z$  の部分は、

$$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{|z\vec{e}_z - r\vec{e}_r|^3} z\vec{e}_z \tag{1.34}$$

であるが、この部分の積分は上で書いたのと同じ計算を行えばよい。



【補足終わり】

### 1.5 立体角と電気力線

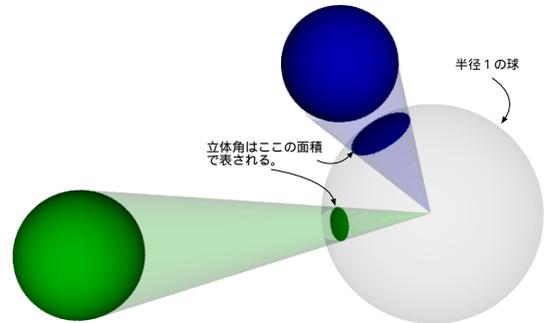
ここで、便利な概念である立体角を紹介しておこう。立体角は、ある場所から他の物体を眺めた時の「見かけの大きさ」を表す量だと思えばよい。同じ大きさのものでも、遠くにあると小さく見える。それは、目から見た時に視野を占める面積が、遠いほど小さくなるからである (右の図参照)。

そこで、物の見かけの大きさを、目から見た時、目の回りに仮想的なおいた単位球 (半径 1 の球) の表面のうちどれくらい面積を占めているかで計算する。これが立体角である。ゆえに立体角は最大でも単位球の表面積  $4\pi$  である (目から、どっちを向いてもその物体が見える場合に対応する)。単位はステラジアン (steradian) を使う。

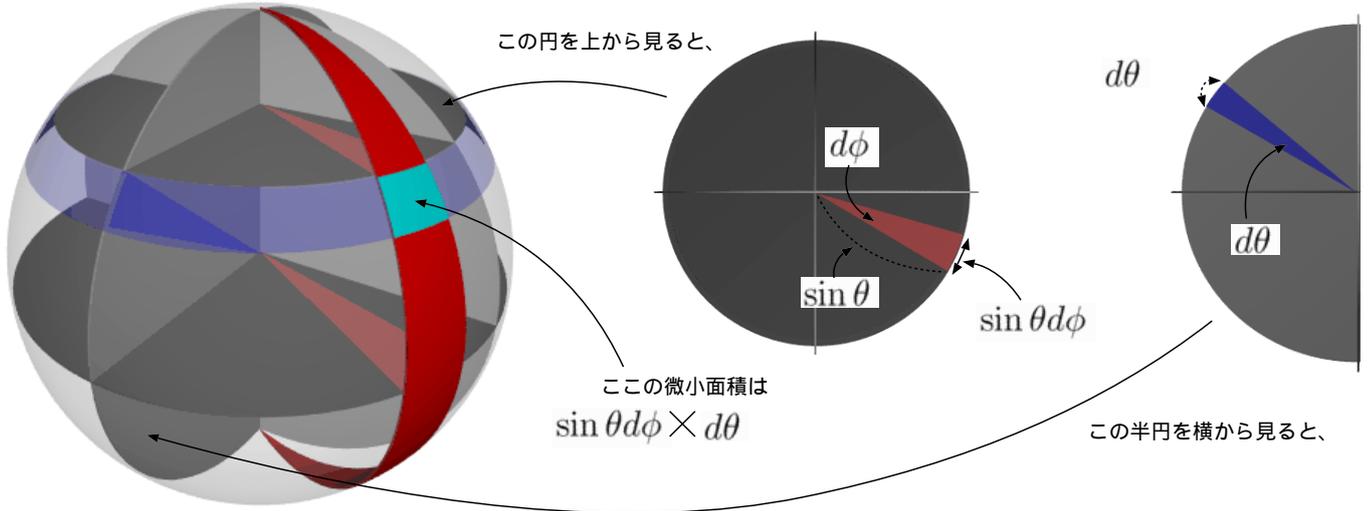
立体角  $\Omega$  を計算するには、単位球の上での面積を計算すればいいので、考えている範囲に関して

$$\Omega = \int d\theta d\phi \sin \theta \tag{1.35}$$

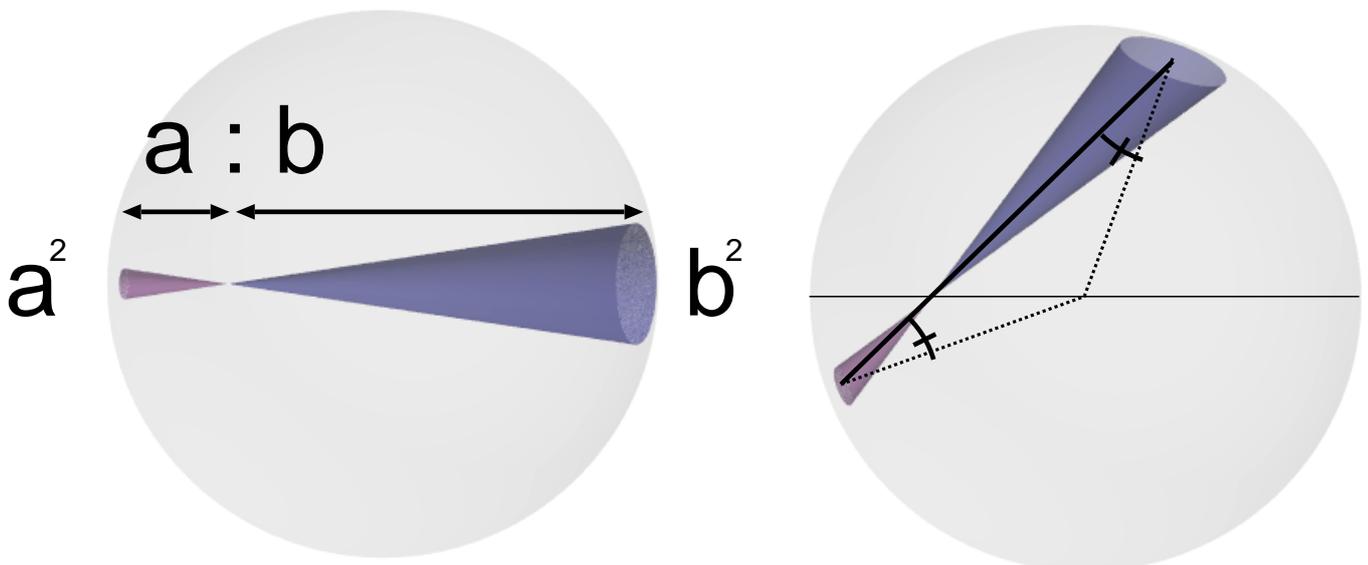
という積分を行えばよい。 $\sin \theta$  が入る理由は、下の図のようにして単位球の表面積を考えるとわかる。単位球の表面上の微小な範囲 ( $\theta \sim \theta + d\theta$ 、 $\phi \sim \phi + d\phi$ ) の面積は、縦が  $d\theta$ 、横が  $\sin \theta d\phi$  の長方形の面積だと考えればよいのである。



<sup>28</sup>「定数」と言ったら「どこでも一定値をとる数」。「定ベクトル」は「どこでも同じ長さ、同じ向きを向くベクトル」。たとえば  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  は定ベクトル。



目に対応する場所に電荷  $Q$  を置いたとする。そこからは電気力線  $\frac{Q}{\epsilon_0}$  本が出ていき、それが全方向（立体角  $4\pi$ ）に広がる。ゆえに、その場所から立体角  $\Omega$  の範囲に広がっている部分には、電気力線  $\frac{Q\Omega}{4\pi\epsilon_0}$  が通る。つまり「電荷から見た立体角が同じなら、通る電気力線の本数も同じになる」ということになる。こうなるのはもちろん、点電荷の作る電場が距離の自乗に反比例するという関係のおかげである。



立体角を使って「一様に帯電した球体の内側では電荷は力を受けない（すなわち、電場は0である）」という関係を図形的に証明しよう。

球体の内部のある点から左右にむいた微小立体角の視野を考える（図の円錐である）。この立体角内に入る電荷の量を考える。球は一様に帯電しているのであるから、この円錐の底面に含まれている電気量は、距離の自乗に比例する。ところが、この電気の作る電場は距離の自乗に反比例して減衰する。よって、この二つの（互いに反対側の立体角に位置している）電気量による電場はちょうど打ち消し合うことになる。

左図のように一直線の場合はそれでいいが、右図のように斜めになっている場合でも大丈夫だろうか？—考えている面が視点から見ると傾いた面になるので、その中に入っている電荷の量が増えそうである。ありがたいことに、図のようにちょうど正反対側の立体角どうしを比べると、傾きは同じになる（図に描いた三角形が二等辺三角形であることに注意！）。同じ立体角でも斜めになっているとその立体角内に入っている電荷の量はその分多くなるのだが、反対側でも同じだけ大きくなるので、「反対側の立体角上に配置された電荷による電場どうしはちょうど消し合う」という関係は保たれる。逆自乗則が成り立っていればこそ、これが成立することに注意しよう。

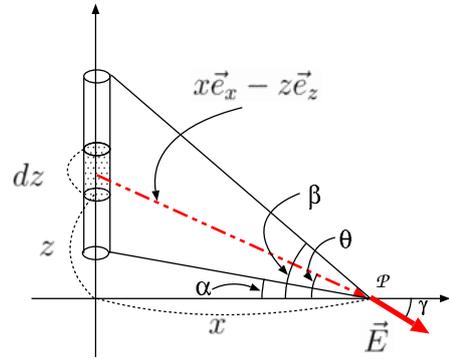
### 1.6 章末演習問題

【演習問題 1-1】(1.35) を球面全体について行えば (すなわち、 $\theta$  を  $[0, \pi]$ 、 $\phi$  を  $[0, 2\pi]$  で積分すれば)、答が単位球の表面積  $4\pi$  になることを示せ。

【演習問題 1-2】 1.4.1 節で有限長さの線に一樣に分布した電荷による電場を計算した。

その時の状態から、棒の位置を  $z$  軸方向に平行移動させた。棒の位置を表すパラメータとして、図のように角度  $\alpha, \beta$  を設定する。全ての電荷による電場の和を考えて (積分して)、この場合の電場を (ベクトル式で) 求めよ。

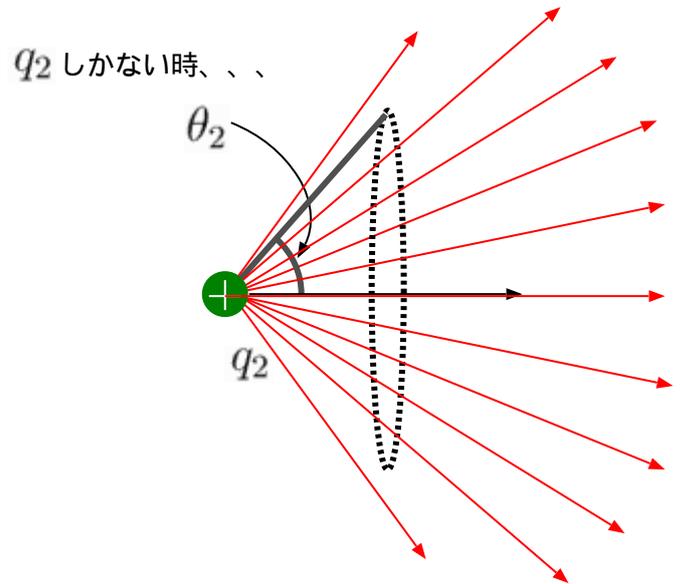
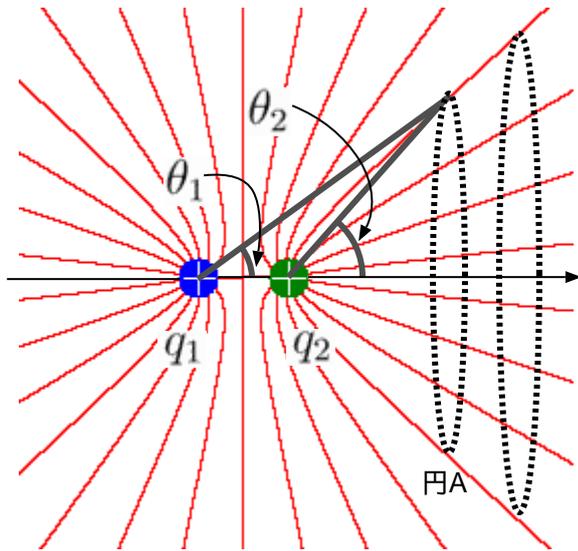
電場が図の水平となす角  $\gamma$  は  $\alpha$  と  $\beta$  のちょうど中間 ( $\frac{\alpha + \beta}{2}$ ) であることを示せ。



【演習問題 1-3】 図のように二つの電荷がある。この空間内の一本の電気力線を考えると、その線上では、

$$q_1 \cos \theta_1 + q_2 \cos \theta_2 = \text{一定} \tag{1.36}$$

という式が成立している。ただし、 $\theta_1, \theta_2$  は二つの電荷を結ぶ直線と、電荷から電気力線上の 1 点を結ぶ直線のなす角である。



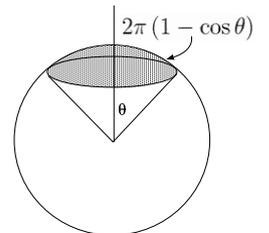
この式を、以下のように考えて導出せよ。

(1) 図の円 A を考える。A を通っている電気力線に沿って、A を二つの電荷から遠ざけていく。電気力線に沿って半径を大きくしながら遠ざけるので、円の中を通っている電気力線の本数は変化しない (「電気力線は交わらない」ことを思い出せ)。

(2) 円 A を通る電気力線の本数を、重ね合わせの原理から求めよう。電荷 1 しかなかったとした時の円 A を通る電気力線の本数と、電荷 2 しかなかったとした時の電気力線の本数をそれぞれ計算し、和をとればよい。

(2') その計算には、右図のように北極から角度  $\theta$  までの範囲は中心から見ると立体角にして  $2\pi(1 - \cos \theta)$  になることを使おう。

(3) 円をいかに動かしても電気力線の本数が一定である、ということから、 $q_1, q_2, \theta_1, \theta_2$  の間にはどんな関係があるか、求めよ。



【演習問題 1-4】 1.4.2 節で計算した円状の電荷による電場の式は  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}(1 - \cos \phi_0)$  であったが、この式は

$$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \times (\text{点 } P \text{ から円盤を見た時の立体角}) \tag{1.37}$$

と表現することができる。なぜこうなるのか?—理由を考察せよ。

ヒント：二つの点を考察しなくてはならない。

- (1) 電場が距離の自乗に反比例すること、一方同じ立体角を占める面積は距離の自乗に比例すること。
- (2) 同じ立体角に含まれている部分でも、視線に対して斜めになっていると中に含まれる電荷量は多くなることと、一方斜め方向にある電荷のつくる電場は  $z$  方向を向かないので、 $z$  方向を計算する時には射影することが必要であること。

この二つの効果をうまく考えれば、ここに立体角が出てくる理由がわかるはず。

【演習問題 1-5】

半径  $r$  の球の表面に、一様な電荷密度  $\sigma$  (単位面積あたり) の電荷が分布している。球の中心から  $z$  離れた場所での電場を求めよ。

結果は、球の中心に全電荷が集中したのと同じ結果になる。そのことを確認せよ。

また、 $z < r$  の場合 (つまり、球の内側) ではどうなるか？

ヒントその 1：この場合、 $z$  方向以外の電場は 0 になるので、 $z$  方向だけを求めればよい。

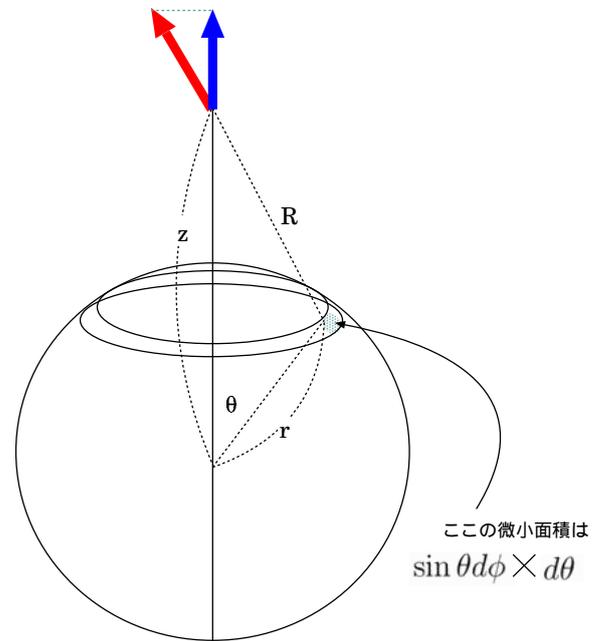
ヒントその 2：図の  $R$  は  $\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}$  である (余弦定理)。

ヒントその 3：微小面積に入っている微小電荷  $\sigma r^2 \sin \theta d\theta d\phi$  が作る電場の  $z$  成分を求めて積分すればよい。

ヒントその 4： $\int_0^\pi F(\cos \theta) \sin \theta d\theta$  という積分が出てきたら、 $\cos \theta = t$  と置くのが定番である。

【演習問題 1-6】前問で、電荷が球面のみではなく、球全体に詰まっている場合はどうなるか？

今度は  $\rho$  を単位体積あたりの電荷密度として計算してみよ。





## 第2章 ガウスの法則と電場の発散

### 2.1 ガウスの法則

前の章では、電場の図的表現として電気力線を導入し、その性質を求めた。これらの性質は非常に有用である。なぜなら、これを使って電荷分布から電場を求めることができるのである。たとえばこの性質だけから逆にクーロンの法則を導き出すことができることは既に示した。もともとクーロンの法則に合うように電気力線の性質を定義したのだから当然といえば当然であるが、ここで大事なことは、この新しい考え方は応用範囲が広いということである。これを使って電場を求めることが比較的簡単にできる。そのためのたいへん便利な法則が「ガウス (Gauss) の法則」である。ガウスの法則の基本的な内容は、実はすでに紹介している。ガウスの法則は数学的に表現されるものであるが、これを図的に表現すれば、「電気力線は途切れない、枝分かれしない」ということに他ならないのである。

#### 2.1.1 電気力線の流れ (flux) の保存

原点にある点電荷  $Q$  の作る電場を  $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$  と書こう。原点を中心とした半径  $R$  の球 (表面積は  $4\pi R^2$ ) を貫く電気力線の本数は、球の半径によらず  $\frac{Q}{\epsilon_0}$  となる。以下ではまず、球面ではない任意の閉曲面<sup>1</sup>に対してこれが成立することを確かめよう。

まず任意の曲面に対して「貫く電気力線の本数」を定義する必要があるが、それは

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \vec{E} \cdot \vec{n} dS \quad (2.1)$$

と考える。積分は、今考えている面全体に対してなされる。 $\vec{n}$  はその面における「外」を向いた規格化された法線ベクトルである。 $\vec{n} dS$  をまとめて  $d\vec{S}$  と書く。たとえば  $\vec{n}$  が  $x$  軸方向を向いているなら、それに垂直な平面は  $yz$  面であるから、その時  $dS = dydz$  となる。同様に  $\vec{n}$  が  $y$  軸向きなら  $dS = dzdx$ 、 $z$  軸向きなら  $dS = dx dy$  である。一般の方向を向いている時は、 $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  とすれば、

$$d\vec{S} = n_x dydz \vec{e}_x + n_y dzdx \vec{e}_y + n_z dx dy \vec{e}_z \quad (2.2)$$

と書かれる。

被積分関数は  $\vec{E}$  と  $d\vec{S}$  の内積になっているので、 $\vec{E}$  と  $\vec{n}$  のなす角を  $\theta$  とすれば、 $|\vec{E}| \cos \theta$  を積分することになる ( $\vec{n}$  の長さは 1 であることに注意)。  $\cos \theta$  がかかる理由は、1.3.2 節ですでに述べた通りである。

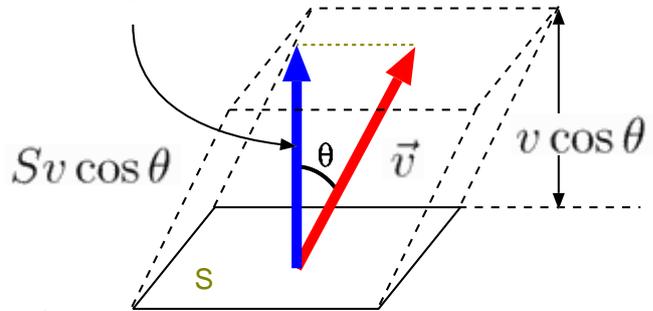
上の式にあるような  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  で計算される量のことを、面を通る「流量 (flux)」と表現する。この計算自体は流体が流れていく時に微小面積を単位時間に通り返けていく流体の量を計算する式

$$\rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (2.3)$$

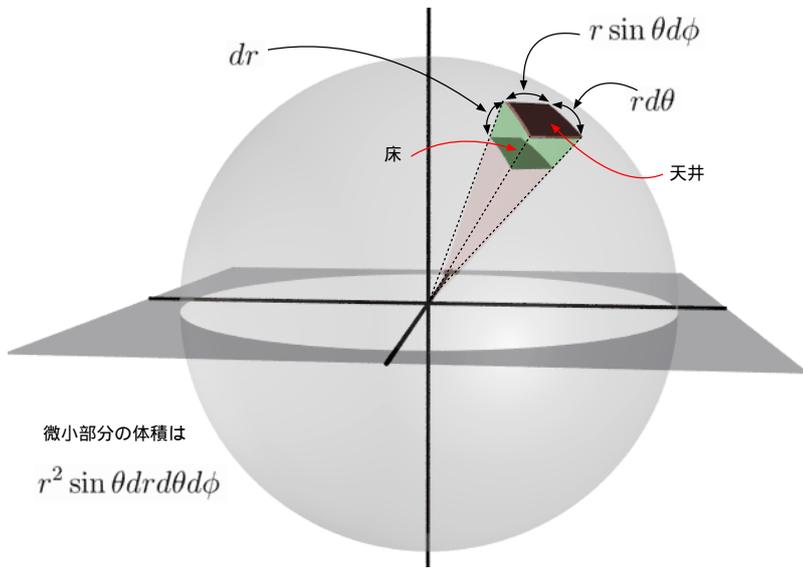
に非常によく似ている。この場合、 $\cos \theta$  がかかる理由は、図の流れベクトルのうち、面に垂直な成分だけが「流れ出す量」に関係するからである (もし流れが面に平行なら、何も流れ出さない)。図に書かれた平行六面体は、単位時間内にこの面積  $S$  を通り抜けた流体を表す。この平行六面体の体積  $Sv \cos \theta$  に流体の密度をかけたものが単位時間の流れ出しである。

電場の場合の flux ( $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ ) はその面を通り抜ける電気力線の本数を意味する。電場自体は何か流れているわけではないが、同様の式が使えるというわけである。

この垂直成分だけが、流量に寄与する。



<sup>1</sup>閉曲面とは、その曲面によって空間が二つに分断されているような曲面のこと。その曲面が壁だと考えた時に「中の物を閉じこめることに成功している曲面」と考えればよい。

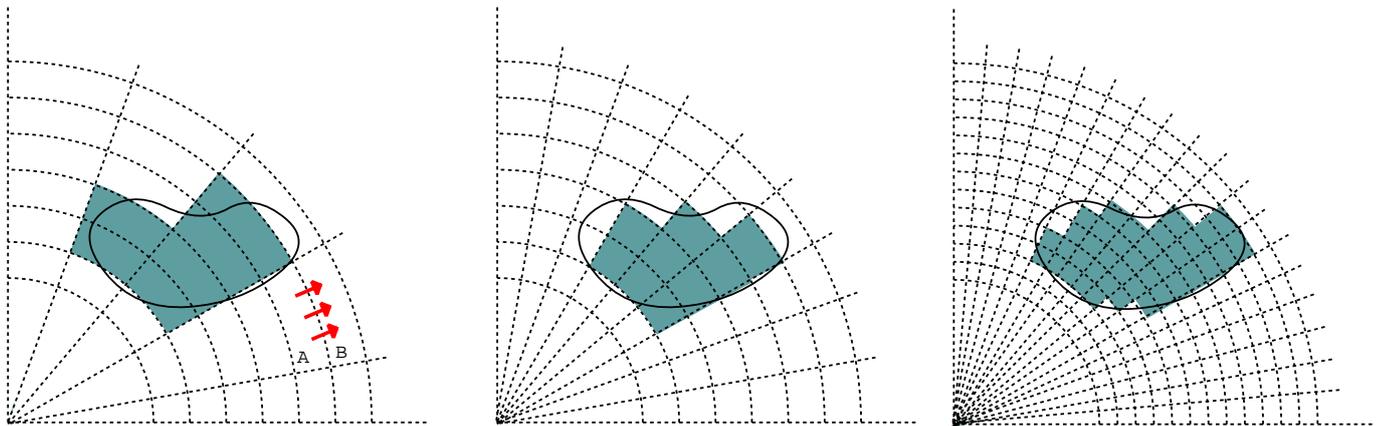


任意の曲面で考えるための準備として、まず左図のような微小部分について考えよう。この微小部分に外から貫く電気力線と、中から貫く電気力線の本数はちょうど同じになる。この微小部分には6つの面があるが、床と天井にあたる場所以外は、電気力線は入ってこないし出ていかない(電場は常に  $r$  方向を向いている)。

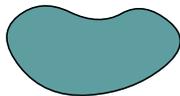
床から入ってくる電気力線の本数は  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times r^2 \sin\theta d\theta d\phi$  であり、天井から抜けていく電気力線の本数は  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r+dr)^2} \times (r+dr)^2 \sin\theta d\theta d\phi$  となる。この二つはちょうど同じなので、結局この微小体積の表面で  $\int \vec{E} \cdot d\vec{S}$  を計算すれば0になるということになる。

これから、任意の曲面についても  $\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$  が成立していることが言える。なぜなら、

この微小体積を「ブロック」としてくみ上げていけば、任意の形の曲面に囲まれた図形を作ることができるからである。



上の図は、その状況を次元を一つ落として平面図で表したものである。ブロック A から出る電気力線(図では3本の矢印で書いてある)は同時に、ブロック B に入る電気力線でもある。よって、今ここで定義したように、「考えている範囲から出る電気力線の正味の本数 = 考えている範囲から出る電気力線の本数 - 考えている範囲に入る電気力線の本数」<sup>2</sup>を計算して足し算していくと、結局今考えている部分の外側での電気力線だけが計算結果として残ることになる。今本



当に計算したいのは から出る電気力線の flux であるが、それは小さいブロックから出る正味の電気力線を次々計算して足していったものと同じになる(もちろん、ブロックをどんどん小さくしていった極限でのことである)。ところが小さいブロックを通る電気力線の本数は0なのだから、全体を通る正味の電気力線の本数も結局0となる。

つまり、ブロックのくみ上げを行う時に、内部に電荷を含まないように組み立てることにすれば、ブロックから出る電気力線の総量は0になる(入ったものは必ずどこから出る)ので、 $\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$  となる。

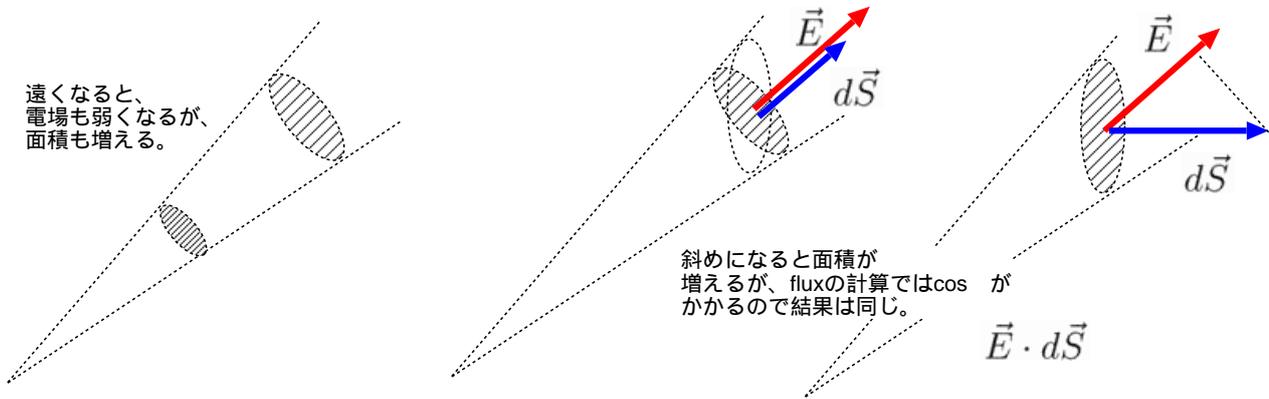
内部に電荷を含むブロックについてだけは出る電気力線の正味の本数0ではなく  $\frac{Q}{\epsilon_0}$  であるから、 $\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$  となる。これは任意の形の面について正しい。

<sup>2</sup>このようにして、出る量から入る量を引いたものを「正味の量」という言い方をする。「正味の」とつく、「出たり入ったりするけど、入る量はマイナスにして足すという約束だからね」ということを意味する。

### 2.1.2 立体角から考えるガウスの法則

先に説明した立体角の考え方からガウスの法則が成立することを説明することができる。今度は電荷を原点に置いて、原点を囲むように任意の閉曲面を設定する。この閉曲面の上で  $\int \vec{E} \cdot d\vec{S}$  を計算してみるわけだが、点電荷が原点にのみあるとすると、原点から見て同じ立体角を占める部分を通る電気力線の本数は、形によらず一定である。これは電気力線の flux が保存するという性質からももちろんわかるし、

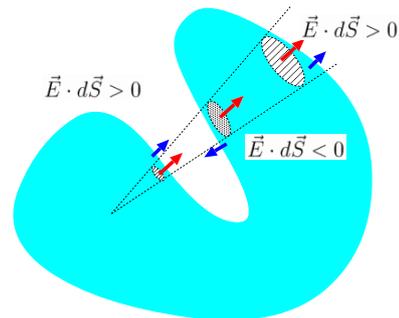
- ・ 電場は距離の自乗に反比例して減少し、同じ立体角に含まれる面積は距離の自乗に比例して増大する。
- ・ 電場と考えている面積要素の法線ベクトルが傾いていると、同じ立体角に含まれる面積は増える。しかし電気力線の本数を計算する時には、その傾き角度を  $\theta$  とした時の  $\cos \theta$  がかけられる。



という二つの事情を考えると、原点に電荷がある時に原点から見て同じ立体角の方向にある場所からに抜け出していく電気力線の本数は等しくなる。

考えている閉曲面が複雑で、同じ電気力線が何度も出たり入ったりするような場合もありえる（右の図を参照）。

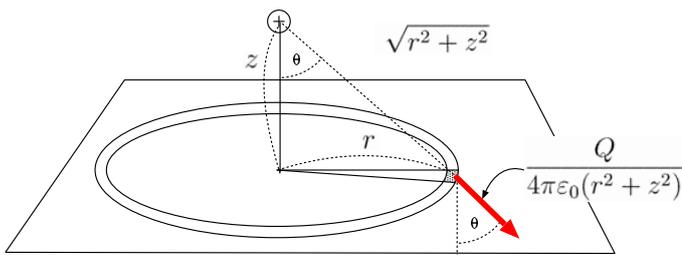
右の図の場合だと、上の計算で「同じ立体角に含まれる面積」とした場所が3カ所現れることになりそうである。しかし、flux の定義に現れた  $d\vec{S}$  は閉曲面図形で必ず「外」（もしくは、「裏から表」）を向いている。そのため、3カ所のうち一カ所に関しては  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  が負になって、3つあるが正味の量は1個分、ということになる。よって複雑な面であっても、ガウスの法則が成立すると結論できる。



## 2.2 具体的計算でガウスの法則を確認する

念のために、実際に積分計算をしてもガウスの法則が成立していることを確認しておこう。もちろん先の証明が信用できないというわけではなく、あくまでも「念のために」である（計算の練習にもなる）。

### 2.2.1 無限に広い平面を通る電気力線の本数



無限に広い仮想的平面を考え、そこから距離  $z$  離れたところにある電荷  $Q$  を出た電気力線（全部で  $\frac{Q}{\epsilon_0}$ ）のうちどれだけがこの平面を通るかを考えよう。もちろん答は  $\frac{Q}{2\epsilon_0}$  となる（半分が通る）。

これを積分で考えるために、図の微小面積  $rdrd\phi$  を貫く電気力線を考える。電場は  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(r^2+z^2)}$  の強さであるが、向きは面に垂直ではなく、図で示した角度  $\theta$  だけ傾いている。ゆえにこの微小面を貫く電気力線の本数は

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(r^2+z^2)} \times r dr d\phi \times \cos \theta \tag{2.4}$$

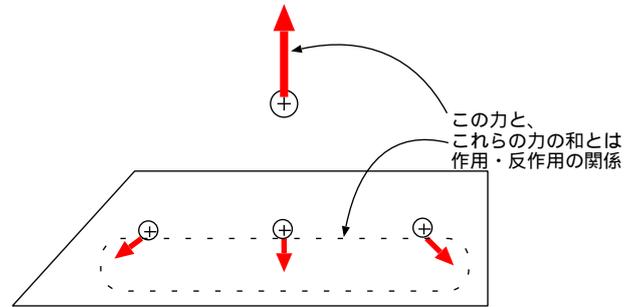
となる。これを積分していくわけであるが、この場合  $\theta$  が  $r$  の関数なので、 $r$  を  $\theta$  で表して  $r = 0$  から  $r = \infty$  まで積分するか、 $r$  を  $\theta$  で表して  $\theta = 0$  から  $\theta = \frac{\pi}{2}$  まで積分するか、どっちかにしなくてはならない。 $r = z \tan \theta$  であることがわかるので、 $dr = z \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$  として

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cos^2 \theta \times \tan \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} d\phi \times \cos \theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\phi d\theta \sin \theta \tag{2.5}$$

となつて、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta = 1$  と  $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$  より、 $E = \frac{Q}{2\epsilon_0}$  という、予想どおりの結果を得る。

ところで、ここの計算をよく見ると、1.4.2 節で円盤の上にならば分布した電荷が作る電場を考えた時と全く同じ計算をしていることに気づく。

一方は面上の電荷が点電荷に及ぼす力（実際に計算したのは電場であるが、つまりは単位電荷に働く力である）を計算し、もう一方は点電荷が面上の電荷に及ぼす力を計算している（こちらは実際に計算したのは電気力線の総本数であるが、それは電場の垂直成分を足しているのと同じ）。クーロン力に関して作用・反作用の法則が成立するので、実はこの二つは互いに作用・反作用を計算しているのだと考えてよい。似たような計算になるのはある意味当然なのである。



【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでください。

なお、静電場においては作用・反作用の法則が成立するが、静電場でない場合は必ずしもそうではない。作用・反作用の法則は運動量保存則と結びついている。実は電場や磁場にも運動量がある。静電場の場合、電場の持つ運動量が変化しないので、安心して電荷など電場以外の物体について運動量保存則が使える（ということは、作用・反作用の法則が使えるということ）。しかし、電場や磁場が時間変動する場合、電場の持つ運動量が時間変動するので、電荷だけを見ても運動量が保存しないのである<sup>3</sup>。ゆえにこの時は作用・反作用の法則が成立してないように見える。

【補足終わり】

### 2.2.2 中心からずれた位置に電荷が位置する場合

仮想的球の中心に電荷  $Q$  がある場合については計算したが、中心からずれた場所にある場合はどうだろうか？

図のように定ベクトル  $\vec{a}$  だけ電荷の位置が中心よりずれているとする。この時、電荷から図の微小面積へと向かうベクトルは  $r\vec{e}_r - \vec{a}$  である（ $\vec{e}_r$  は、今考えている場所において  $r$  が増加する方向を向いている単位ベクトル）。また、この場所の  $d\vec{S}$  は  $r^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{e}_r$  と書ける（法線の向きは  $r$  の増加する方向である）。

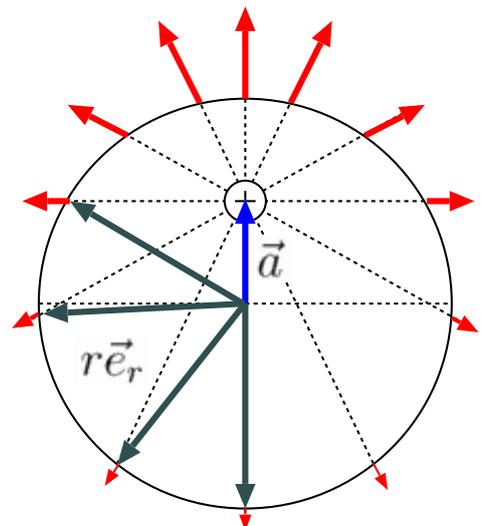
よってこの微小面積  $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$  をつらぬく電気力線は

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |r\vec{e}_r - \vec{a}|^3} \times (r\vec{e}_r - \vec{a}) \cdot \vec{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi \tag{2.6}$$

となる。 $\vec{e}_r \cdot \vec{a} = a \cos \theta$  ( $a$  は  $\vec{a}$  の長さ) であることに注意して、

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \times (r - a \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \tag{2.7}$$

と書き換えてから積分をしよう。こういう時の定番として、 $\cos \theta = t$  とおくと、 $-\sin \theta d\theta = dt$  となる。 $\theta$  の積分範囲が  $(0, \pi)$  だったので、 $t$  の積分範囲は  $(-1, 1)$  である。積分範囲をひっくりかえすことで  $-\sin \theta d\theta$



<sup>3</sup>電場や磁場の運動量まで含めて考えれば、どんな場合でもちゃんと保存する。

のマイナス符号をとることにすれば<sup>4</sup>、

$$\frac{Qr^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 dt \int_0^{2\pi} d\phi \frac{r - at}{(r^2 + a^2 - 2art)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.8)$$

という積分をすればよい。φ積分は定数 2π を出すだけで終わる。t積分はもちろんまじめにこつこつやってもできるのだが、

$$\frac{r - at}{(r^2 + a^2 - 2art)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{-1}{(r^2 + a^2 - 2art)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (2.9)$$

と置き換えて計算すると早い<sup>5</sup>。tで積分するのとrで微分するのは順番を変えてよいので、

$$\frac{Qr^2}{2\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_{-1}^1 dt \frac{-1}{(r^2 + a^2 - 2art)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (2.10)$$

とする。積分  $\int_{-1}^1 dt \frac{-1}{(r^2 + a^2 - 2art)^{\frac{1}{2}}}$  は

$$\int_{-1}^1 dt \frac{-1}{(r^2 + a^2 - 2art)^{\frac{1}{2}}} = \left[ \frac{1}{ar} (r^2 + a^2 - 2art)^{\frac{1}{2}} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{ar} \left( \sqrt{(r-a)^2} - \sqrt{(r+a)^2} \right) \quad (2.11)$$

となる。

r, a はどちらも正であるから、 $\sqrt{(r+a)^2}$  は常に r + a となるが、 $\sqrt{(r-a)^2}$  の方は r > a なら r - a となり、r < a なら a - r となる。

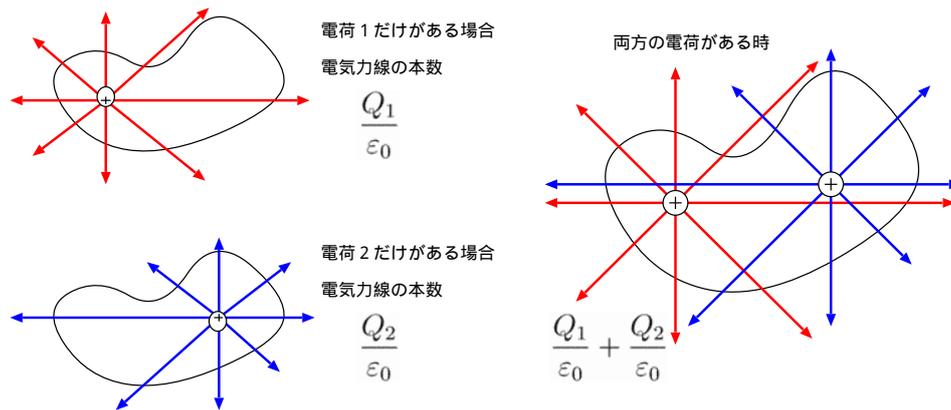
結局この積分の結果は r > a なら  $\frac{1}{ar} (r - a - (r + a)) = \frac{-2}{r}$  となり、r < a なら  $\frac{1}{ar} (a - r - (r + a)) = \frac{-2}{a}$  となる。

(2.10) を見ると、後はこれを r で微分してから、 $\frac{Qr^2}{2\epsilon_0}$  をかければよい。結果は r > a なら  $\frac{Q}{\epsilon_0}$ 、r < a なら 0 となる。つまり、電荷が外にあるなら電気力線の総本数は 0、内にあるなら  $\frac{Q}{\epsilon_0}$  ということが確認できたわけである。

以上、代表的な例についてガウスの法則の成立を確認したが、もちろんガウスの法則はちゃんと成立しているのだから、今後は念のための確認などは不要である。どんどん使っていこう。

以上、代表的な例についてガウスの法則の成立を確認したが、もちろんガウスの法則はちゃんと成立しているのだから、今後は念のための確認などは不要である。どんどん使っていこう。

## 2.3 複数および連続的な電荷が存在する時のガウスの法則



ここまでの説明は一個の点電荷の作る電場に対するものであった。しかし電場には重ね合わせの原理が成立するのだから、複数個の電荷の作る電場であっても、

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{内部}} Q_i \quad (2.12)$$

が成立することが言えるだろう。考える領域は閉曲面に囲まれてさえいればどんな形でもかまわない。

点電荷がぽつぽつとあるのではなく、連続的に電荷が存在してい

る場合は、この式は

ガウスの法則の積分形

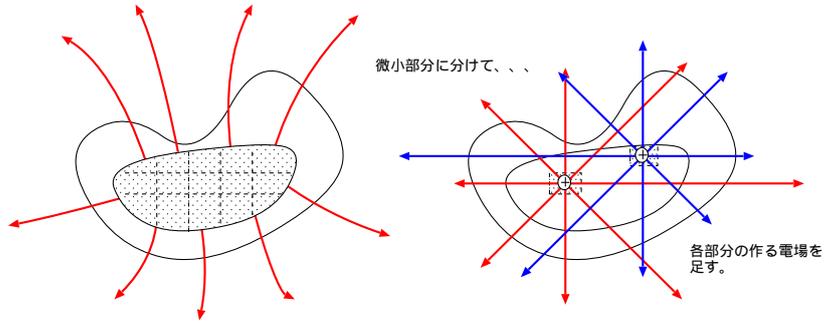
$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (2.13)$$

と修正される。

<sup>4</sup>以上をまとめて、 $\int_0^\pi \sin \theta d\theta \rightarrow \int_{-1}^1 dt$  と覚えておこう。頻繁に使う。

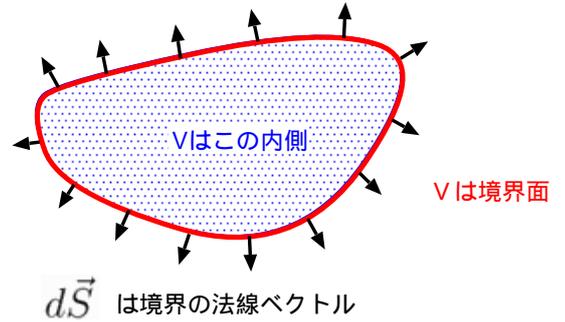
<sup>5</sup>この置き換えにはちゃんと物理的意味がある。

右辺の積分記号の下についている  $V$  は「一つの領域」を示し、 $\partial V$  は「一つの領域の境界となっている閉曲面」を示す。微分記号である  $\partial$  を使うのは、「 $V$  を増加させた時に増える部分」というイメージで理解しよう。領域  $V$  を風船のように考えて、風船に息を吹き込んだ時に膨れていく場所と膨れていく方向を示しているのである。



さらに、その閉曲面の積分においては、 $d\vec{S}$  は領域の外を向くベクトルとして定義する。図のように面から生えるように、外へ外へと向かうベクトルとなる。左辺はこのベクトルと電場の内積をとって、全閉曲面分の和をとる（積分する）。

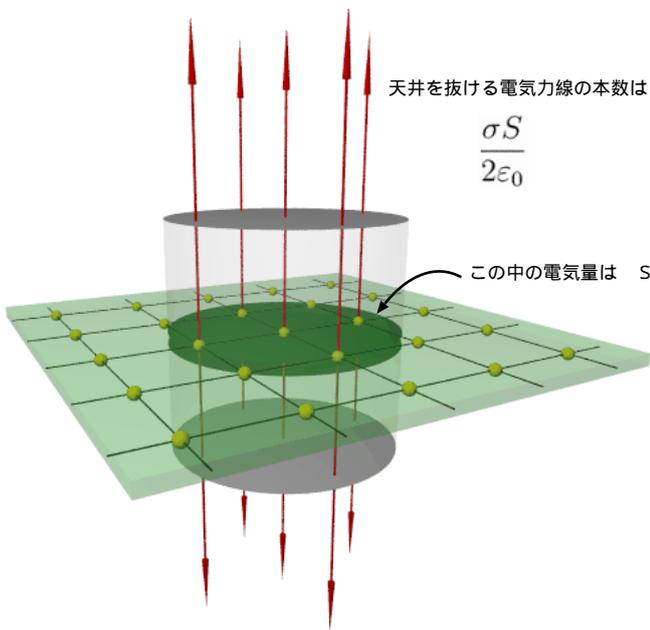
右辺は、一個一個の微小領域に  $\rho dx dy dz$  の電荷が存在していると考えて、その微小領域内の電荷の影響を足し上げていると考えればよい。以下で連続的な分布の場合について練習しよう。



### 2.3.1 面上に広がった電荷による電場

無限に広い平面 ( $z = 0$  で表される  $xy$  平面に一致させよう) の上に電荷が面積密度  $\sigma$  で分布している。つまり、平面上の微小面積  $S$  の上に電荷  $\sigma S$  が存在している。この平面から  $z$  だけ離れた場所（座標で表現すると、 $(0, 0, z)$ ）での電場を計算してみよう。

この場合、無限に広い平面に一樣に電荷が分布しているので、電気力線（あるいは電束）はすべて  $z$  軸に平行な向き（ $xy$  平面に垂直な向き）を向くだろう。逆に  $x$  方向や  $y$  方向の電場があったら対称性を破ることになって変である。電気力線が常に  $z$  方向を向くということは、電場の向きのみならず、強さとも場所によらないということになる。そのことは、図を描いてみると（電気力線は途切れたり増えたり減ったりしないのだから）電気力線密度がどこでも一定であることから納得できるだろう。

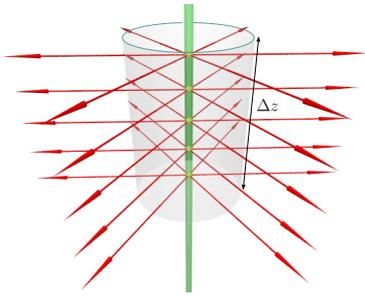


今この無限に広い平面のうち、適当な面積  $S$ （図では円とした）を取り出して考えると、この面積を含む円筒を抜け出す電気力線の本数は全部で  $\frac{\sigma S}{\epsilon_0}$  である。これが上と下（天井と床）から均等に抜け出すので、天井を抜ける電気力線は  $\frac{\sigma S}{2\epsilon_0}$  となり、これを天井の面積  $S$  で割れば、電場の強さが  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  であることがわかる。これは、1.4.2 節で計算した半径  $r_0$  の円盤による電場  $\frac{Q}{2\pi\epsilon_0(r_0)^2} \times \frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}}$  において、 $Q = \pi(r_0)^2\sigma$  と置いた後に  $r_0 \rightarrow \infty$  の極限をとったものと同じである。あるいは演習問題 1-4 で考えた電場の式  $\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \times$  (点  $P$  から円盤を見た時の立体角) で、立体角に  $2\pi$  を代入したのと同じである。当たり前のことではあるがガウスの法則による結果と具体的に積分を行った場合の結果は等しい。

なお、無限に広いわけではない面の場合、当然遠ざかるほど電場は弱くなることになる。しかしその場合でも、面に非常に近いところだけを考えるならば、 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  という関係は保たれている。

### 2.3.2 一様に帯電した無限に長い棒

1.4.1 節で考えた帯電した棒の長さを  $\Delta z$  にしてみる。このように対称性が高い時は、ガウスの法則を使うと非常に簡単に電場を求めることができる。



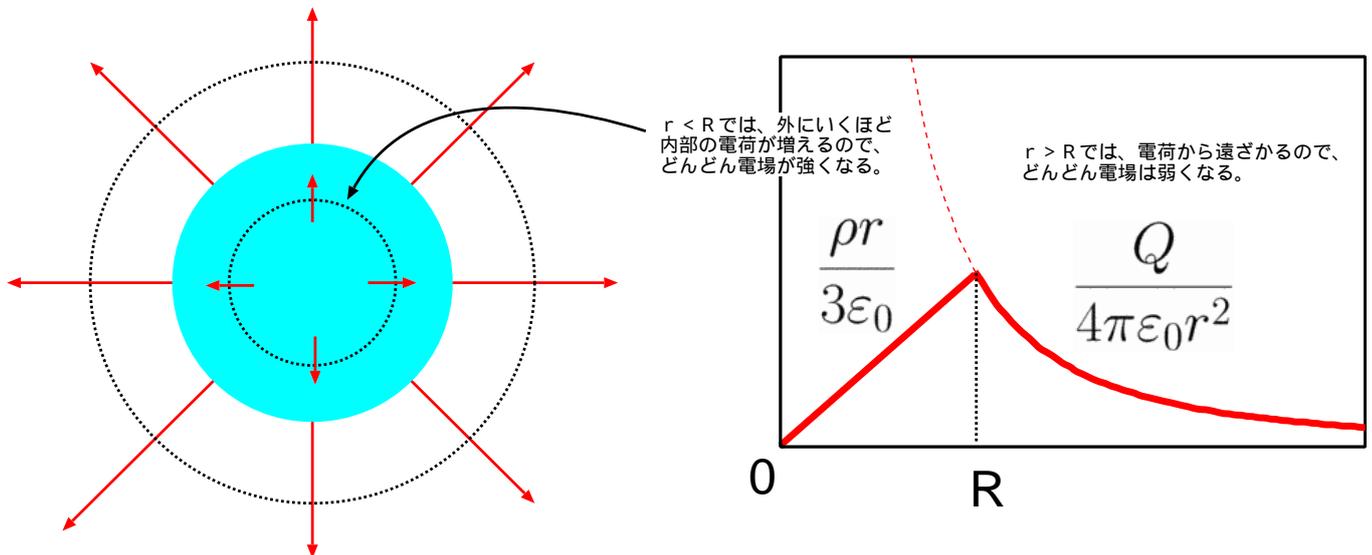
この場合、この棒の電荷から発する電気力線は、 $z$  軸に垂直な方向に伸びていく（無限に長い棒を考えているので、それが作る電場は対称性から  $z$  成分を持たない）。

図のように長さ  $\Delta z$  の部分を考えて、この円筒部分に入っている電荷の量は線密度  $\rho$  に長さをかけて  $\rho\Delta z$  であり、この部分から出る電気力線の総本数は  $\frac{\rho}{\epsilon_0}\Delta z$  となる。

出て行く電気力線は全て円柱の側面を通過していくのだから、円柱の側面積  $2\pi r\Delta z$  でこれを割れば電場の強さがわかる。結果は  $\frac{\frac{\rho}{\epsilon_0}\Delta z}{2\pi r\Delta z} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r}$  となる。この式もまた、1.4.1 節の結果で棒の長さを  $\Delta z$  にしたものと一致する。

### 2.3.3 一様に帯電した球

次に、球体に体積密度  $\rho$  で一様に電荷が分布している場合を考えよう。球の半径を  $R$  とすると、全部で  $\frac{4\pi}{3}R^3\rho$  の電荷がいることになる。



球体の外側に関しては、これまでと同じで、電気力線の総本数である  $\frac{Q}{\epsilon_0}$  を外部に考えた仮想的な球の表面積  $4\pi r^2$  で割ればよいので、見慣れた公式どおり、 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$  の電場があることになる。

問題は球の内側である。球の内側には電荷は  $\frac{4\pi}{3}r^3\rho$  だけしかない。よって、電場は

$$\vec{E} = \frac{4\pi}{3}r^3\rho \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \frac{1}{3\epsilon_0}\rho r\vec{e}_r \quad (2.14)$$

となる。この式には、原点から距離が  $r$  より大きく  $R$  より小さい部分の電荷の影響が全く入っていないことに注意せよ。この部分を作る電場は、原点からの距離  $r$  の位置では、ちょうど消しあって 0 になるわけである。

### 2.3.4 平行平板コンデンサ

平行平板コンデンサとは、互いに平行な 2 枚の板（極板と呼ぶ）を向かい合わせたものである。このような板の一方に  $+Q$ 、もう一方に  $-Q$  の電荷を帯電させた場合、電場は右の図のようになり、電気力線のほとんどは極板間に集中する。この電場の強さを一般に求めるのはたいへんである（場所によって異なる複雑な関数で表現されているので）が、近似として「電気力線（電場）は極板と極板の間にしか存在しない」と考えれば非常に簡単に計算できる。

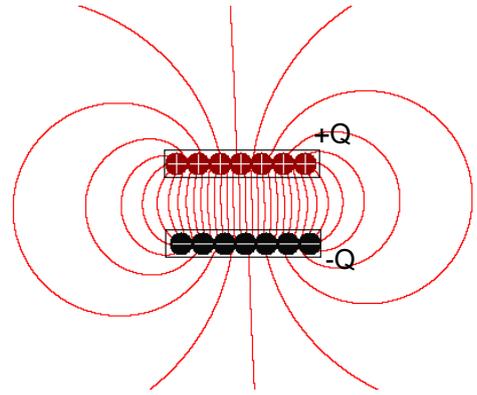
コンデンサの極板の面積を  $S$  とすると、面積  $S$  の中に電荷  $Q$  から出て電荷  $-Q$  に入る電気力線（全部で  $\frac{Q}{\epsilon_0}$  本）が入っていることになる。

したがって、極板の間のできる電場の強さは  $\frac{Q}{\epsilon_0 S}$  となる。

なお、実際には図のように極板から外にも電場は染み出るものなので、この計算はあくまで近似である。

この近似が有効な範囲において、電場の強さ  $\frac{Q}{\epsilon_0 S}$  は極板間の距離にはよらない。

ここまででわかったように、電荷分布の形状によっては、「電場は距離の自乗に反比例する」と単純に考えることはできない。直線上に分布した電荷の作る電場の場合は距離に反比例するし、平面上に分布した電荷の作る電場の場合は、距離に無関係となる。



## 2.4 電場の発散：ガウスの法則の微分形

前節で考えたガウスの法則 (2.13) は、右辺は体積積分、左辺はその体積を囲むような面積上の面積積分で書かれている。この体積はどんなものであってもよい。そこで物理の常套手段であるところの「まず細かく区切って考えよ」をここでも使うことにしよう。つまり微小な体積と、その微小な体積を囲む微小な面積に、(2.13) を適用するとどうなるかを考えよう。

### 2.4.1 直交座標系における発散

電場が存在する空間の中にとっても小さな直方体を考える。実際に箱を入れる必要はない。とにかく「直方体の形をした微小領域」を考えるのである。その直方体の中を電気力線が通り抜けていっている。そして「この直方体の中から正味どれだけの電気力線が出てくるのか？」という問題を考える。この問題を解くには直方体の6つの面での外向きの flux の和を取ればよいことはすぐわかるだろう。

すでに述べたように、電場が  $\vec{E}$  であっても、直方体の天井から抜けていく電気力線の本数を考える時、問題となるのはベクトル  $\vec{E}$  を  $(E_x, E_y, E_z)$  と  $x$  成分  $y$  成分  $z$  成分にわけた時の、 $z$  成分のみである。つまり、天井から抜けていく電気力線の本数は

$$\int_x^{x+\Delta x} dx' \int_y^{y+\Delta y} dy' E_z(x', y', z + \Delta z) \quad (2.15)$$

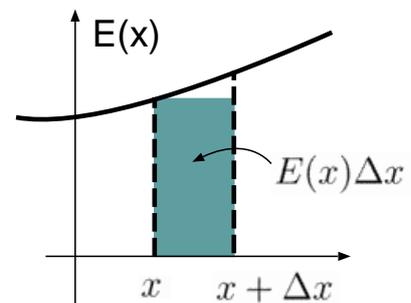
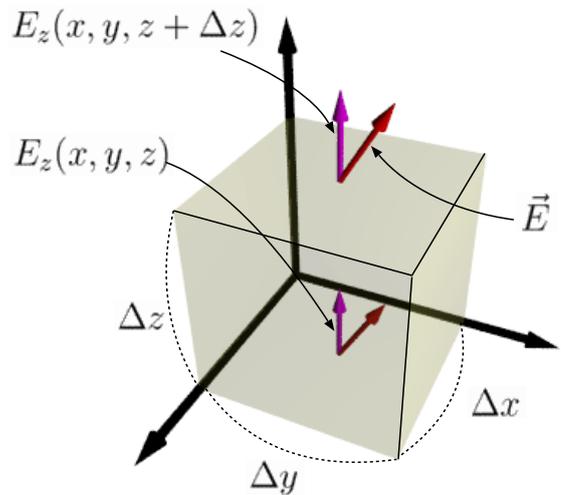
である。

ここで、 $\Delta x, \Delta y$  はどうせ小さい ( $0$  へと向かう極限を取る) ので、 $\int_x^{x+\Delta x} dx' \int_y^{y+\Delta y} dy'$  という積分を、 $\Delta x \Delta y$  をかけるだけの形に近似して考えよう。つまり、天井から抜ける量はこの近似の元で

$$E_z(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y \quad (2.16)$$

である。

では、底面から抜けていく電気力線の量は？—底面では、 $E_z$  が正ならば電気力線が入ってくることになる。だから抜けていく量を計算するためにはマイナス符号が必要となる<sup>6</sup>。つまり、底面から抜けていく量は  $-E_z \Delta x \Delta y$  である (もし  $E_z$  がマイナスなら、この量がプラスになる。つまり、「抜けていく」のである)。この二つの式を見て、「足



<sup>6</sup>というより、床では  $d\vec{S}$  が下を向いているから、 $E_z > 0$  の時に  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  が負になる、と考えた方がよいかもしれない。

したら零」と思ってはいけない。天井と底面は、 $z$  座標が  $\Delta z$  だけ違う。そこを考慮してちゃんと式を書くと、「天井から抜けていく量 + 底面から抜けていく量」は

$$(E_z(x, y, z + \Delta z) - E_z(x, y, z)) \Delta x \Delta y \quad (2.17)$$

となる<sup>7</sup>。ここで微分の定義

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{E_z(x, y, z + \Delta z) - E_z(x, y, z)}{\Delta z} = \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} \quad (2.18)$$

を思い出せば、「天井と床面で抜けていく量」は

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.19)$$

となる（どうせ  $\Delta z$  は微小であることに注意）。ここまで来たら後は簡単、 $x$  方向や  $y$  方向に関しても「抜けていく量」を考えればよいが、 $x, y, z$  の立場を入れ替えつつ全く同じ計算をやればよいので、6つの面全てを足し算した結果は

$$\left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.20)$$

となる。この式を  $\Delta x \Delta y \Delta z$  すなわち直方体の体積で割って、単位体積当たりになると、 $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$  となるが、この量を  $\text{div} \vec{E}$  と書く。

$\text{div}$  は別に電場専用の記号ではなく、一般にベクトル場<sup>8</sup>  $\vec{A}$ （ベクトル場ならなんでもいい）に対し、

直交座標での  $\text{div}$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.21)$$

と定義する。

$\text{div}$  は「ダイバージェンス (divergence)」と読み、日本語では「発散」もしくは「湧き出し」と呼ぶ<sup>9</sup>。「今考えている“流れ”は途切れなく続いているのか？—それとも何かから湧き出したり、何かに吸い込まれたりしているのか？」という問題を考える時にとっても便利なツールである<sup>10</sup>。

ここで、 $\text{div}$  は、「ある一点にある仮想的微小直方体」の上で、体積あたりの量として定義されていることに注意しよう。積分形のガウスの法則では面積分で定義されていた量が、 $\text{div}$  という記号を使って表現することで、体積あたりの量に変わってしまった。今考えていた量はガウスの法則の積分形 (2.13) の左辺である  $\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S}$  を  $\Delta x \Delta y \Delta z$  で割ったものであった。一方、(2.13) の右辺  $\int_V \rho dV$  は今考えている微小体積に対しては  $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$  となる（微小な体積の中なので、その中の  $\rho$  の変化は無視する）。よってこれを  $\Delta x \Delta y \Delta z$  で割ったものは、右辺を  $\Delta x \Delta y \Delta z$  で割ったものであるところの  $\text{div} \vec{E}$  と等しいから、

ガウスの法則の微分形

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.22)$$

が導かれる。空間内に電荷が存在しない時、 $\text{div} \vec{E} = 0$  となる。電気力線が途中で終わったり、無から始まったりしないこと、その数学的表現が  $\text{div} \vec{E} = 0$  なのである。

これをもう一度積分した式とガウスの法則の積分形 (2.13) を見比べると、

$$\int_V \text{div} \vec{E} dV = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.23)$$

という式が成立していることがわかる。この式は、電場だから成立するわけではなく、一般のベクトル場に対して有効な式である。後でもいろんなところでお目にかかることであろう。

<sup>7</sup>これもより正確に書くならば、

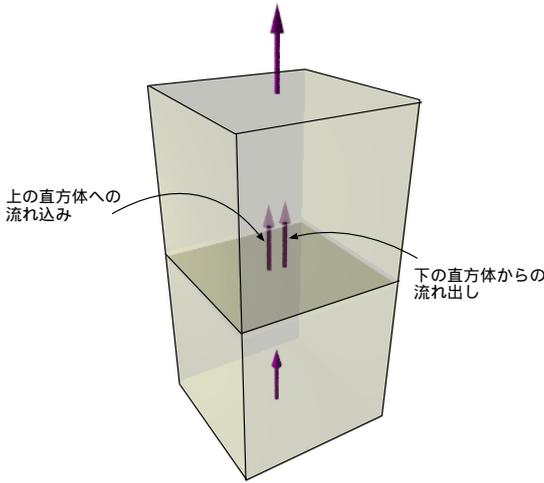
$$\int_x^{x+\Delta x} dx \int_y^{y+\Delta y} dy (E_z(x, y, z + \Delta z) - E_z(x, y, z))$$

である。しかし今は  $\Delta x$  も  $\Delta y$  も微小なので、(2.17) という計算で十分なのである。

<sup>8</sup>「ベクトル場」というのは、空間の各点各点に一個ずつベクトルがいるような状況。つまり、場所の関数であるベクトル  $\vec{A}(\vec{x})$  のこと。電場もベクトル場の一例である。

<sup>9</sup>「発散」という言葉は になる時にも使って紛らわしい。それに「湧き出し」の方が的確に意味をとらえているように思える。

<sup>10</sup>新しい記号が出てくると「また覚えることが増えた(;\_;)」と嫌がる人が多いが、そういう記号を使う理由は「この記号を使った方が楽だから」ということにつける。メリットがあるから使っているということを理解して、「便利なものが出てきたなあ(^ ^)」と喜ばなくては。



この式が成立することの直観的な説明を与えておく。左図のように、さっき考えた直方体を2個重ねてみる。そしてそれぞれで電気力線の出入りを計算してみたとする。二つ分について正味の出る電気力線の本数を計算したとすると、下の直方体の天井から出る電気力線と上の直方体の床から入る電気力線は同一であり、和を取るとちょうど消える。このようにブロック化した微小直方体をどんどん重ねていく（どんな複雑な立体図形であっても、微小な直方体の集合に分解することはできるはずである）と、その内側に入った部分については flux の計算は全てキャンセルして、一番外側（つまり表面）での積分のみが残ることになる。こうして、体積積分である  $\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV$  と面積積分である  $\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S}$  が結びつくわけである。

### 2.4.2 発散のない電場の例

電場がないところでは  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  となるということ、これまで求めた電場の場合で確認しておこう。まず無限に広い平面が一様に帯電している場合、電場はどこでも等しく、 $(0, 0, \frac{\rho}{2\epsilon_0})$  であるから、当然  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  である。原点にある点電荷  $Q$  による電場  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$  の場合を考えると、 $\vec{e}_r$  の  $x, y, z$  成分が  $\left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$  である<sup>11</sup>から、

$$\vec{E} = \left( \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{Qy}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.24)$$

と書ける。まず、 $\frac{\partial E_x}{\partial x}$  を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{Qx \times 2x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} x^2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

となる。次に  $x, y, z$  の立場を入れ替えたもの、つまり、

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} y^2$$

と、

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} z^2$$

を足す。こうして出てきた3つの式の第1項は全部同じものになるので3倍となる。第2項は最後で  $x^2, y^2, z^2$  が出てくるので、全ての和は、

$$\operatorname{div} \vec{E} = 3 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} (x^2 + y^2 + z^2) \quad (2.26)$$

となるが、第2項を約分すると第1項と逆符号で同じものになり、和は0である。

なお、この計算はめんどくさく感じるだろうけれど、後で示す極座標での  $\operatorname{div}$  の形を知れば悩む必要はなくなる。

<sup>11</sup>  $\vec{e}_r$  は位置ベクトル  $(x, y, z)$  と同じ方向を向く。長さが1になるように位置ベクトルの長さ  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  で割れば  $\vec{e}_r$  ができる。

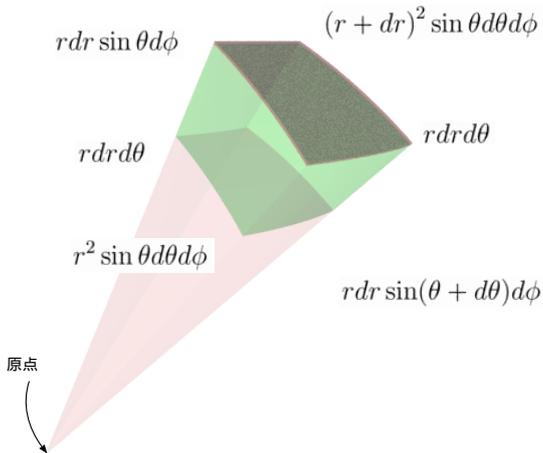
2.4.3 極座標での div

直交座標では  $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$  という形になった div であるが、極座標など他の座標系ではそうではない。単純に

これは大間違いだから覚えるな !!

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

などとやってはいけない (そもそもこの式は次元すらあってない! )



正しい極座標の div を求めるために、左図のように微小体積を設定する。気をつけるべきは、この微小体積は直方体ではないということで、たとえば天井の面積が  $(r + \Delta r)^2 \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi$  なのに対し、床の面積は  $r^2 \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi$  なのである。この微小体積は、 $\Delta r, r \Delta \theta, r \sin \theta \Delta \phi$  という3辺の長さを持っていることに注意しよう。ゆえに微小体積は  $r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi$  となる。

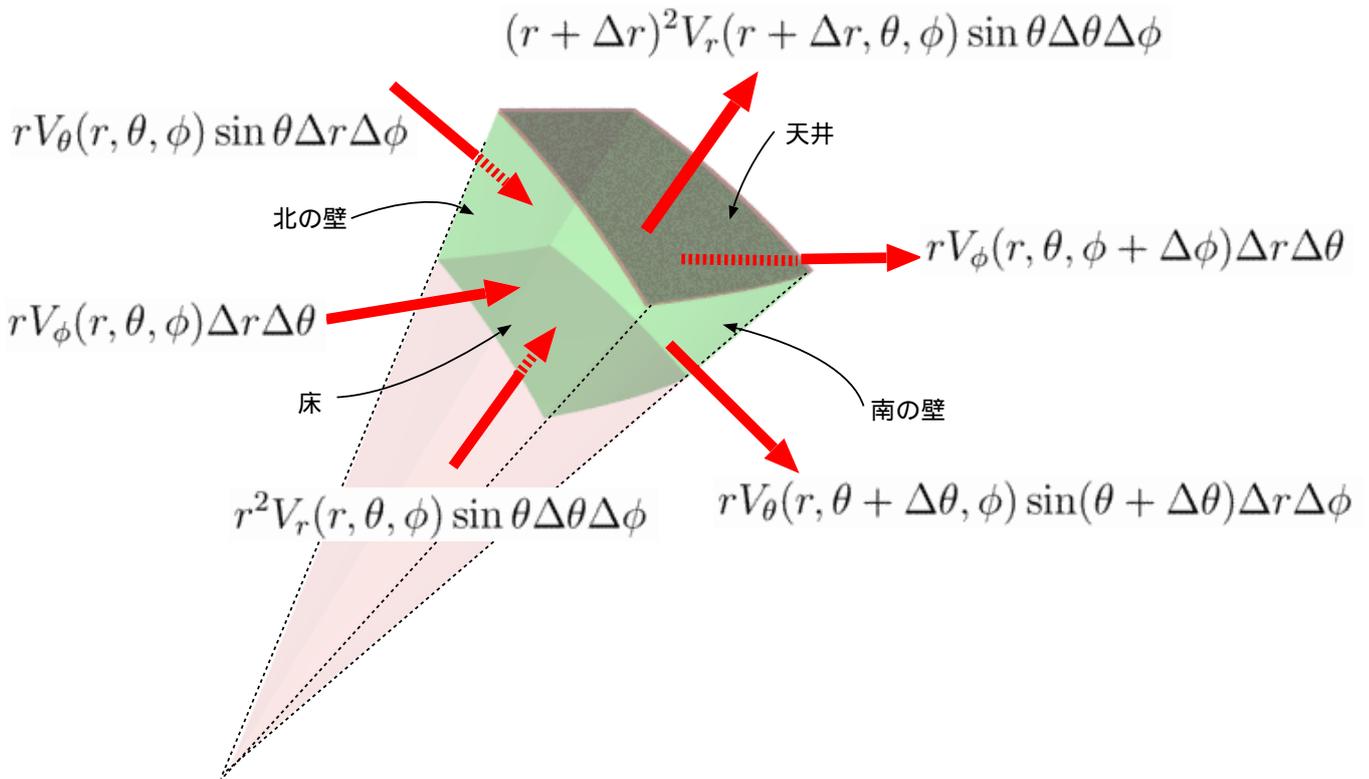
図の床にあたる部分は面積  $r^2 \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi$  を持つ、一方図の天井の部分は、 $(r + \Delta r)^2 \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi$  という面積を持っていることに注意しよう (つまり、直方体の場合と違って、向かい合う面の面積は同じではないのである)。

天井から抜け出る flux は  $(r + \Delta r)^2 V_r(r + \Delta r, \theta, \phi) \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi$ 、床から抜け出る flux は  $-r^2 V_r(r, \theta, \phi) \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi$  ということになる (例によってマイナス符号は、 $V_r > 0$  の時に入ってくる方向だからついてる)。

よって、天井と床からの湧き出しは、

$$\begin{aligned} & (r + \Delta r)^2 V_r(r + \Delta r, \theta, \phi) \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi - r^2 V_r(r, \theta, \phi) \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi \\ = & ((r + \Delta r)^2 V_r(r + \Delta r, \theta, \phi) - r^2 V_r(r, \theta, \phi)) \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi \end{aligned} \tag{2.27}$$

となる。



最後に体積  $r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi$  で割ることを考えると、div のうち、天井と床からくる部分は、

$$\frac{1}{r^2} \frac{(r + \Delta r)^2 V_r(r + \Delta r, \theta, \phi) - r^2 V_r(r, \theta, \phi)}{\Delta r} \xrightarrow{\Delta r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r(r, \theta, \phi)) \tag{2.28}$$

である。

この答はナイーブな予想の  $\frac{\partial}{\partial r} V_r$  とは違う。原因はもちろん、天井と床の面積の違いである。そのため、天井での流れ出しと床からの流れ出しは、 $V_r$  に  $r^2$  をかけた量に比例する。よってこの量  $r^2 V_r$  を微分しないと、正しい意味での湧き出しを計算していることにならないのである。

北の壁と南の壁も面積が違う。その違いは  $\sin \theta$  に比例しているのだから、南北の壁による div への寄与は、

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta \Delta \theta} (r \sin(\theta + \Delta \theta) V_\theta(r, \theta + \Delta \theta, \phi) - r \sin \theta V_\theta(r, \theta, \phi)) \xrightarrow{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) \tag{2.29}$$

となる。最後に東西については、

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta \Delta \phi} (r \sin \theta V_\phi(r, \theta, \phi + \Delta \phi) - r \sin \theta V_\phi(r, \theta, \phi)) \xrightarrow{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} V_\phi \tag{2.30}$$

となる。まとめると、極座標での div の式は

覚えるならこっちを覚えよう !!

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \tag{2.31}$$

である。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

### 2.4.4 $\vec{\nabla}$ を使った記法に関する注意

div は、「ナブラ」と呼ばれる記号  $\vec{\nabla}$  を使って  $\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  と書かれることもある。 $\cdot$  はベクトルの内積を示し、あたかもベクトル  $\vec{\nabla}$  とベクトル  $\vec{A}$  の内積であるかのごとき書き方になっている。

直交座標の場合、 $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$  となり、 $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$  にかかると、 $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$  という関係<sup>12</sup>により、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left( \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{2.32}$$

となり、これが  $\text{div} \vec{A}$  と同じであることがわかる。ここで、上の式では  $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$  になった部分だけが生き残っていることに注意しよう(内積を取るという計算だから当然なのであるが)。

$\vec{\nabla}$  の一般的定義は、任意の方向を向いた単位ベクトルを  $\vec{e}$  として、

$$\vec{e} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\vec{x} + h\vec{e}) - F(\vec{x})}{h} \tag{2.33}$$

である。つまり、ある任意の方向に距離  $h$  だけ移動した時の関数  $F(\vec{x})$  の変化量と、移動距離  $h$  の割合を  $h \rightarrow 0$  の極限で計算したものが、 $\vec{e} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x})$  になるというのが  $\vec{\nabla}$  の定義である。

そもそも、1次元での微分は

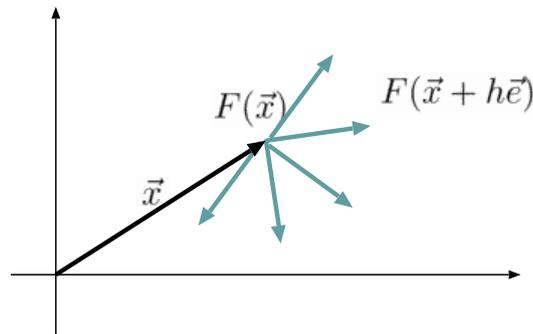
$$\frac{d}{dx} F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \tag{2.34}$$

であった。つまり位置座標  $x$  を  $h$  だけ変化させた時の  $F(x)$  の変化と  $h$  の割合である。2次元以上の空間では、位置座標  $\vec{x}$  をどちら向けに変化させた時の割合なのか、を示すため、微分がベクトルになってしまうわけである。直交座標の場合、 $\vec{e}_x \cdot \vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x}$ 、 $\vec{e}_y \cdot \vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial y}$  というふうに、 $\vec{e}$  が向いている方向によって、 $\vec{e} \cdot \vec{\nabla} F$  が  $\frac{\partial F}{\partial x}$  になったり  $\frac{\partial F}{\partial y}$  になったりする。つまり、

$$\vec{\nabla} F = \vec{e}_x \frac{\partial F}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial F}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial F}{\partial z} \tag{2.35}$$

ということになる。

<sup>12</sup> $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  はそれぞれの長さは 1 であり、互いに直交するという関係式。



この式から  $F$  を外して書いた物が

—  $\vec{\nabla}$  の定義 —

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.36)$$

である。本来微分記号というのは後ろに何か関数があって意味があるので、この式はあくまで「記号」として解釈しておこう。

$\vec{\nabla}$  などをつかって、微分をベクトルのように扱う理由は、微分というのは本来「ある場所と、その隣の場所との関数の差を調べる」ものであるが、2次元以上の空間では「隣の場所」というのがどっちの隣なのか（東隣か西隣か、あるいは北か南か、もしくは階上か階下か）によって微分の値も違うからである。

極座標ではどうかというと、 $\vec{e}$  が  $r$  方向に向いている時すなわち、 $\vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x})$  は  $\frac{\partial F}{\partial r}$  でよいが、 $\theta$  方向に向いている時すなわち  $\vec{e}_\theta \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x})$  は  $\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}$  でなくてはいけい。なぜなら、 $\theta$  方向に距離  $h$  進むと、 $\theta$  は  $\frac{h}{r}$  だけ増加するからである。つまり、

$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{\nabla} F(r, \theta, \phi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(r, \theta + \frac{h}{r}, \phi) - F(r, \theta, \phi)}{h} \quad (2.37)$$

という計算を行わなくてははいけないのである。

$$F(r, \theta + \frac{h}{r}, \phi) = F(r, \theta, \phi) + \frac{h}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (2.38)$$

のようになることを考えれば、(2.37) の右辺は  $\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}$  となる。

同様に、 $\phi$  方向に距離  $h$  進むと  $\phi$  は  $\frac{h}{r \sin \theta}$  だけ増加するので、 $\vec{e}_\phi \cdot \vec{\nabla} F = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \phi}$  である。この3つをまとめると、

$$\vec{\nabla} F = \vec{e}_r \frac{\partial F}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \rightarrow \vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (2.39)$$

となる。この式から逆に  $\vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $\vec{e}_\theta \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ ,  $\vec{e}_\phi \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$  となることはすぐに確認できる。

ここでよくある間違いを指摘しておこう。極座標で表したベクトル場を  $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi$  と書いた時、非常によくある間違いは、

— これも間違い!! —

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \left( \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \cdot (A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi) \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (2.40)$$

とやってしまうことである。なんとなく、上の式は正しそうに見えるが、実はまずい。なぜなら、 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$  はどれも定ベクトルではない。つまり「右の括弧内の  $\vec{e}$  も微分される」のである。

なお、実際に微分してみると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r &= 0, & \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_\theta &= 0, & \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_\phi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_r &= \vec{e}_\theta, & \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta &= -\vec{e}_r, & \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\phi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_r &= \sin \theta \vec{e}_\phi, & \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_\theta &= \cos \theta \vec{e}_\phi, & \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_\phi &= -\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (2.41)$$

となる。この公式を使って正しい計算を行うと、

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \left( \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \cdot (A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi) \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ &\quad + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \cdot \left( A_r \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{=\vec{e}_\theta} + A_\theta \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}}_{=-\vec{e}_r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi \cdot \left( A_r \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}}_{=\sin \theta \vec{e}_\phi} + V_\theta \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi}}_{=\cos \theta \vec{e}_\phi} + V_\phi \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi}}_{=-\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta} \right) \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r} A_r + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} A_\theta \end{aligned} \quad (2.42)$$

となる。これは (2.31) に等しい。

このように極座標などの曲線座標を使った  $\vec{\nabla}$  の計算では、 $\vec{e}$  が定ベクトルではないということを忘れて計算を間違えることがよくあるので気をつけよう。

## 2.4.5 極座標の div を使って電場を求める

さて、極座標の div の便利さを実感しておこう。極座標の div の式 (2.31) の  $\vec{A}$  に点電荷の場合の電場  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$  を代入すると 0 になる。この場合は  $V_r$  のみが  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  という値を持ち、div を取る時には  $r^2 V_r$  としてから微分するので定数の微分になり 0 となる。

また逆に、「球対称な電荷分布がある時、電荷の外側ではどんな電場ができるか?」という問題を解く時、 $\text{div} \vec{E} = 0$  を手がかりにして解いていくこともできる。この場合、球対称性から  $E_\theta$  や  $E_\phi$  は存在しないので、 $\text{div} \vec{E} = 0$  は

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= 0 \\ r^2 E_r &= C \\ E_r &= \frac{C}{r^2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

となって、逆自乗の法則が導けることになる ( $C$  は積分定数であって、他の条件から決めねばならない)。電荷が存在する場合は、 $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  を出発点として計算すればよい。例えば一様に帯電した球の場合なら、 $\rho$  は定数なので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 \\ r^2 E_r &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} r^3 + C' \\ E_r &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} r + \frac{C'}{r^2} \end{aligned} \quad (2.44)$$

となる。ここで積分定数  $C'$  は実は 0 である。なぜなら、そうでなかったら  $r = 0$  で  $E_r$  が発散してしまうからである。

.....  
【FAQ】「逆自乗則の式  $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  の場合だって発散しているけど気にしなかったではないですか」

逆自乗の式はあくまで「電荷の存在しない範囲」で成立した式なので、電荷がいる場所は適用範囲外。適用範囲外で発散しても、「当局は一切関知しない」であって、問題はない。上の式の場合、原点も適用範囲内なので、そこで発散されてはやっぱり困る。

.....  
積分定数  $C$  の方は、球の表面 ( $r = R$  としよう) で外部の解  $E = \frac{C}{r^2}$  と内部の解  $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$  が接続されるようにすればよいから、

$$\frac{C}{R^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R \rightarrow C = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R^3 \quad (2.45)$$

となる。一様な電荷分布を仮定したから、 $\frac{4\pi}{3} R^3 \rho = Q$  とすれば、外部での解は

$$E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4\pi}{3} \rho R^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.46)$$

というおなじみの形になる。

こうして、一様帯電した球の内部での電場を求めることができる (前にやったよりもこっちの方が簡単である)。もう一度まとめておくと、

————— 真空中の静電気学の基本方程式 —————

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.47)$$

という 1 本の式で、ここまでの物理法則を表してしまえることができる。クーロンの法則もガウスの法則も、全てこの式で表現つくされているのである。

この式は物質中では少しだけ変更される。その変更された方程式が、後で電磁気学の基本法則であるマクスウェル方程式の一つとなるのである。

## 2.5 章末演習問題

【演習問題 2-1】 円筒座標系  $(r, \phi, z)$  では、div は

円筒座標の div

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} A_\phi + \frac{\partial}{\partial z} A_z \quad (2.48)$$

という形を取る。なぜこうなるのか、図解して説明せよ。

【演習問題 2-2】 球対称な電荷分布があり、電荷が分布している部分の電場を測定したところ、どの場所でも電場は  $r$  方向（原点から離れる方向）を向いて、その電場の強さは  $kr^n$  と距離の  $n$  乗に比例していた（ただし、ある半径  $R$  より遠くには電荷がないとする）。電荷はどのように分布していたのか？

物理的に許される  $n$  の範囲を考察せよ。

【演習問題 2-3】

図のように、一様に帯電したパイプ状の中空の円筒がある、円筒の内径（中空部分の半径）は  $r_1$ 、外径は  $r_2$  である。内部（ $r_1 < r < r_2$  の部分）には体積電荷密度  $\rho$  で電荷が一様に分布している。図は有限長さで切られているが、実際には無限に長い円筒であるとして、円筒の中心である  $z$  軸から  $r$  離れた場所での電場を求めよ。

【演習問題 2-4】 (2.41) を証明せよ。

ヒント：方法は二つある。

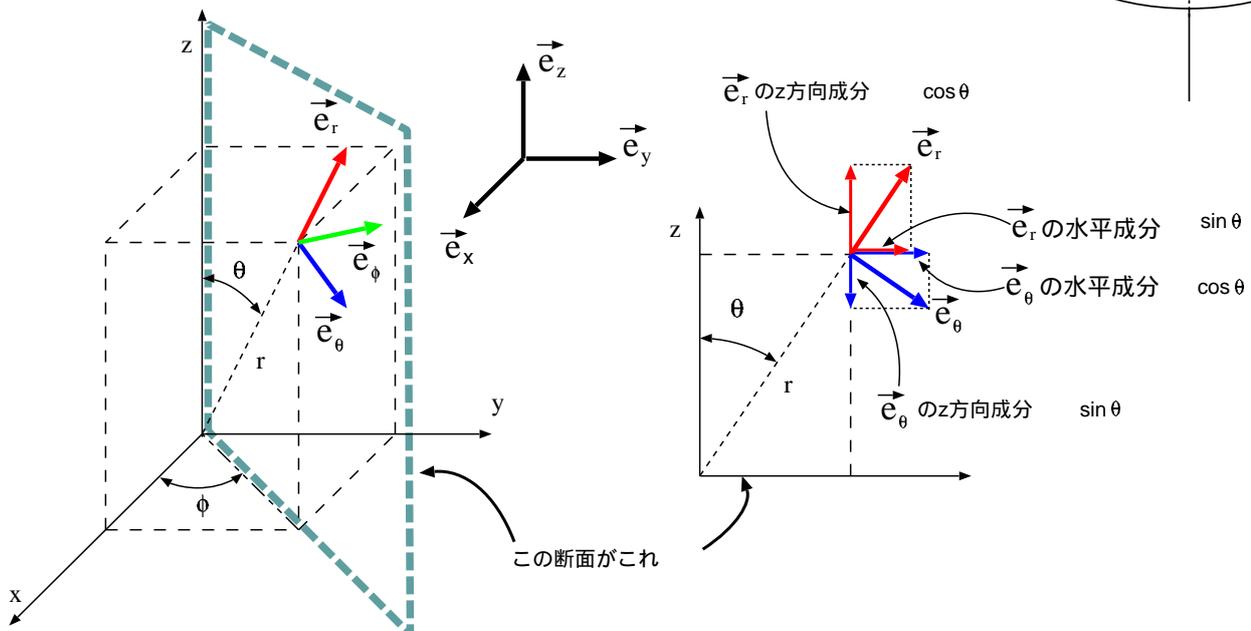
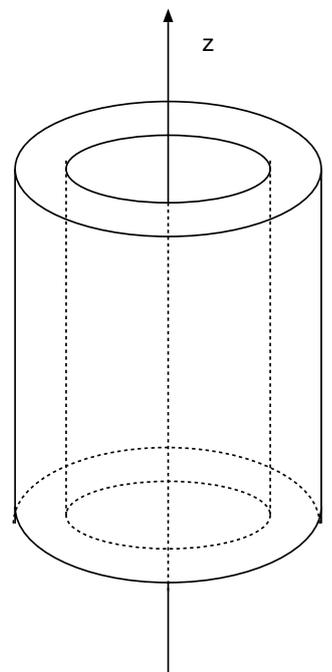
- (1) 図を描いてベクトルがどう変化するかを考える。
- (2) 定ベクトルである  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  を使って表現すると、

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \quad (2.49)$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \quad (2.50)$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \theta \sin \phi \vec{e}_x + \sin \theta \cos \phi \vec{e}_y \quad (2.51)$$

である。これを微分する。



【演習問題 2-5】 円筒座標に関して、(2.41) 同様の式を証明せよ。

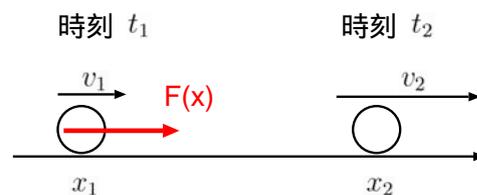


## 第3章 静電気力の位置エネルギーと電位

この章では、電場を記述するもう一つの便利な方法、電位の考え方について述べる。電場が「単位電荷あたりの力」で定義されていたように、電位は「単位電荷あたりの位置エネルギー」で定義される量である。電位の定義に入る前にまず、力とエネルギーの関係を復習した後、静電気力による位置エネルギーを考えることにしよう。

### 3.1 力学的エネルギーの復習（1次元）

そもそも位置エネルギーとは何か？—もう一度考えておこう。まずは1次元的な運動を考える。質量  $m$  の物体がある直線上を運動していて、その位置  $x$  に依存する力  $F(x)$  を受けているとする。運動方程式は  $m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$  である。この式の両辺を  $x$  で積分する。今物体はある時刻  $t_1$  に位置  $x_1$  にいて、それから後のある時刻  $t_2$  に  $x_2$  にいたとする。積分は  $x_1$  から  $x_2$  まで、その物体の運動にそって行う<sup>1</sup>。



$$m \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2x}{dt^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (3.1)$$

右辺は  $F(x)$  がちゃんとわかっているれば、後は積分するだけである。左辺はそのままでは積分しにくいので、以下のようにやるとできる。まず、 $dx \rightarrow \frac{dx}{dt} dt$  と置き換える。つまり、積分を  $x$  でなく  $t$  で行うことにする。すると積分の書き換えで  $\frac{dx}{dt}$  が現れる。さらに

$$\frac{d}{dt} \left( \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right) = 2 \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} \quad (3.2)$$

であることを使うと、

$$\frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right) dt = \int F(x) dx \quad (3.3)$$

となる。左辺の積分範囲は  $t_1$  から  $t_2$  までになる。積分の結果は

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \Big|_{t=t_2} - \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \Big|_{t=t_1} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int F(x) dx \Big|_{x=x_2} - \int F(x) dx \Big|_{x=x_1} \quad (3.4)$$

となる。左辺に場所  $x_1$ 、時刻  $t_1$  での値が来て、右辺には場所  $x_2$ 、時刻  $t_2$  での値が来るように書き直すと、

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \Big|_{t=t_1} - \int F(x) dx \Big|_{x=x_1} = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \Big|_{t=t_2} - \int F(x) dx \Big|_{x=x_2} \quad (3.5)$$

と変わる。  $\int F(x') dx' \Big|_x = -U(x)$  と置くと、

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \Big|_{t=t_1} + U(x_1) = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \Big|_{t=t_2} + U(x_2) \quad (3.6)$$

となる。この式を見ると、左辺は時刻  $t_1$ 、場所  $x_1$  での値であり、右辺は時刻  $t_2$ 、場所  $x_2$  での値である。つまり、 $\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + U$  という量は物体の運動する間、どの時刻どの場所でも同じ値を保つ。 $\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$  を「運動エネルギー」、

<sup>1</sup> 物体は途中で向きを変えたりしなかったとして考えよう。物体が途中で引き返したりすると積分がややこしくなる（以下の計算ははその場合でも成立するが）。

$U(x)$  を「位置エネルギー」と呼んで、「運動エネルギーと位置エネルギーの和は保存する」という法則（力学的エネルギー保存の法則）が導かれたわけである。位置エネルギー  $U(x)$  と力  $F(x)$  の関係は

$$U(x) = - \int F(x) dx \quad \text{または} \quad F(x) = - \frac{d}{dx} U(x) \tag{3.7}$$

である。

以上ざっと位置エネルギーとは何であったかを思い出した。1次元の場合で例を三つあげておく。

重力の位置エネルギー

地球上の重力は、どこでも  $mg$  である（厳密に言うと  $g$  は標高や緯度などによって多少変化するが、そこは無視している）。上で位置エネルギーが定義できる条件は「場所のみの関数であること」と書いたが、「どこでも  $mg$ 」も（定数を与える）立派な関数であるから、位置エネルギーが定義できる。座標  $x$  を上向き正に取れば、力は下向きになるので、 $F(x) = -mg$  と考えればよく、この場合の位置エネルギーは  $U = mgx$  である。

万有引力の位置エネルギー

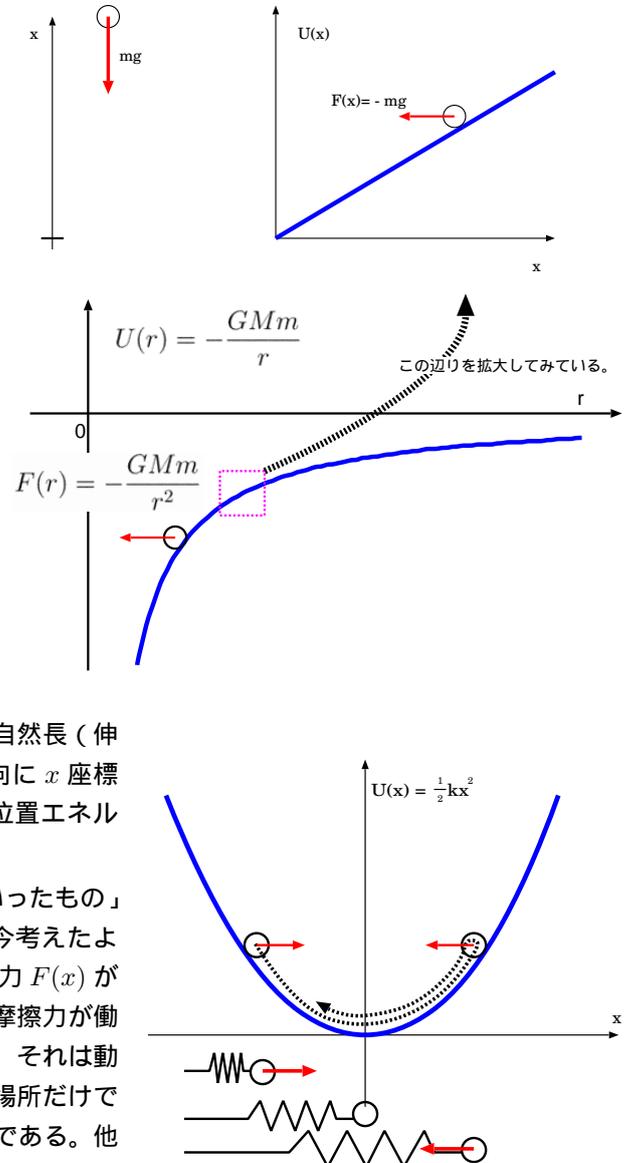
質量  $M$  の物体が質量  $m$  の物体に及ぼす万有引力は、 $-\frac{GMm}{r^2}$  となる（マイナスを付けたのは、 $r$  の負方向であることを強調した）。この場合の位置エネルギーは  $U(r) = -\frac{GMm}{r}$  となる。万有引力の変化が十分小さいと近似できるほど、狭い範囲で考えるならば、上の重力と同じになる。ただし、位置エネルギーの原点は  $r = \infty$  に取っている（上の重力でもそうだが、エネルギーの原点は任意にとつてかまわない。大事なのは傾きである）。

ばねによる位置エネルギー

ばねが  $x$  だけのびている時の力の大きさは  $kx$  である。ばねが自然長（伸び縮み無し）の時の物体の位置を  $x = 0$  としてばねが伸びる方向に  $x$  座標を取ると、力は逆を向くから  $F(x) = -kx$  となる。これから、位置エネルギーは  $\frac{1}{2}kx^2$  となる。

結局エネルギーとは何かといえば、「力を位置座標で積分していったもの」または、「微分すると力になるもの」という認識でいいだろう。今考えたような1次元問題の場合、位置エネルギーが定義できるためには「力  $F(x)$  が場所のみの関数である」という条件が必要である。たとえば「動摩擦力が働くとエネルギーが保存しない」というのはよく言われることだが、それは動摩擦力に「物体の運動方向と逆向きに働く」という性質があり、場所だけではなく「物体がどちらに運動しているか」にも依存しているからである。他にも空気抵抗（物体の速度に依存）が働くような場合も同様である。このような場合は上のような計算を行っても、運動エネルギーと位置エネルギーの和の形にまとめることはできない。

上の三つの例のうち、重力と万有引力の位置エネルギーはまさに「位置」に対応したエネルギーであり、ばねによる位置エネルギーは「位置」というよりは「ばね」という物体の「状態」に対応した位置エネルギーである。力を出して仕事をすることができるものは、なんらかの形でエネルギーを持っていて、トータルのエネルギーが保存するようになっている。力  $F(x)$  はエネルギーの微分の逆符号  $-\frac{d}{dx} U(x)$  に等しいが、これはつまり位置エネルギーのグラフを書いた時「グラフの坂を下りる方向に、その坂の傾きに比例した力がかかる」ということになる。つまり、ばねの位置エネルギーのグラフの縦軸を「山の高さ」のように考えて、その山を降りる方向に力が働くのだ、というイメージを持つことができる。次の節で電位を定義するが、電位も同様に「電位の高い所から電位の低い所へと降りる方向に静電気力が働く（ただし+電荷の場合）」というイメージを持って考えるとわかりやすい。

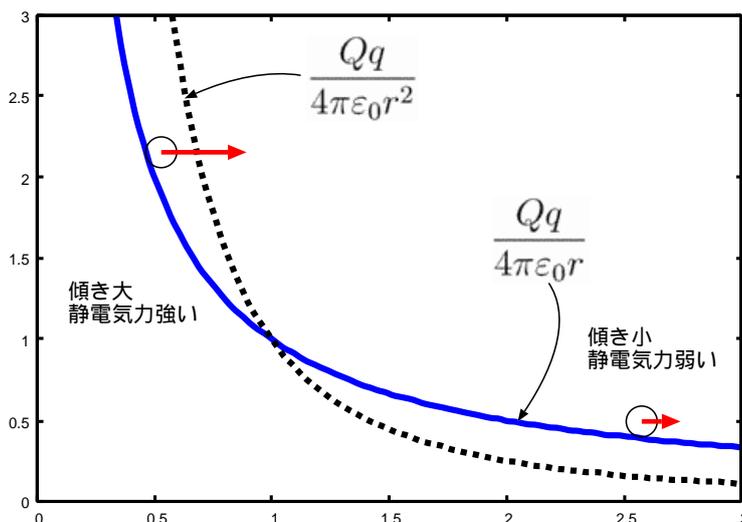


### 3.1.1 1次元の静電気力の位置エネルギーと電位

まずは1次元の場合で、静電気力による位置エネルギーを考え、電位の定義を示しておこう<sup>2</sup>。

静電気力は（電荷）×（電場）で表される。電場は場所の関数であるから、静電気力も場所の関数となり、位置エネルギーを定義することができる（空間が2次元以上の時は、位置エネルギーが定義するために更に条件が必要だが、それは後述べる）。

なじみ深い、点電荷  $Q$  による電場  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  の場合で考えてみると、 $F(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  であるから、対応する位置エネルギーは  $U(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$  である（ $F(r) = -\frac{d}{dr}U(r)$  を確認せよ）<sup>3</sup>。右のグラフで、 $U(r)$  の傾きが大きいところは  $F(r)$  も大きくなっていることに注意しよう。



さて、このようにして静電気力による位置エネルギーが定義できたとして、その位置エネルギーを単位電荷あたりに直したのとして、電位を定義する。すなわち、「電荷  $q$  に静電気力  $\vec{F}$  が働く時、そこには  $\vec{E} = \frac{1}{q}\vec{F}$  の電場がある」として「1Cあたりに働く力」で電場を定義した時と同じ考え方で、

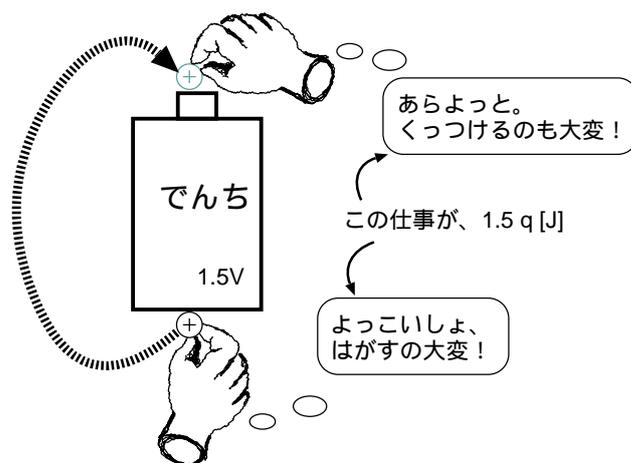
#### 【電位の定義】

試験電荷  $q$  をある場所に置いたと仮定した時、その試験電荷が静電気力に由来する位置エネルギーを  $U$  だけ持つならば、その場所の電位（または静電ポテンシャル）は  $V = \frac{U}{q}$  である。

という定義で電位（もしくは静電ポテンシャル<sup>4</sup>） $V$  を導入する。

位置エネルギー  $U$  と力  $\vec{F}$  が  $F = -\frac{d}{dr}U$  という関係にあったのだから、電場と電位は  $E = -\frac{d}{dr}V$  という関係にある（正確な式は、3次元の話をしてから出そう）。

電位の単位は [V]（ボルト）である<sup>5</sup>。市販の乾電池には 1.5V と書いてあるが、あれは電池の + 極と - 極の間に 1.5V 分の電位差があるということを意味する。つまり、試験電荷  $q$  が - 極付近にある時と + 極付近にある時で、 $1.5 \times q$  [J] の位置エネルギー差があるということである。つまり、電池の - 極から + 極まで、 $q$  [C] の試験電荷を運ぶと、 $1.5q$  [J] の仕事をすることになる。そのような電位差が発生する理由は、電池の内部に - 極から + 極に向けて正電荷を（あるいは + 極から - 極に向けて負電荷を）運び込む作用（市販の電池の場合は化学反応による作用である）があるからである。試験電荷は（ $q > 0$  なら）- 極に引っ張られ、+ 極から反発される。よって試験電荷を（そこに張り付こうとする）- 極からひっぱがして、（くっつけたがらない）+ 極に押しつけるには、そ



<sup>2</sup>現実の我々の空間は3次元なので、3次元的に考えなくてはいけない。本節はあくまで「練習」であり、イメージをつかむためのものである。

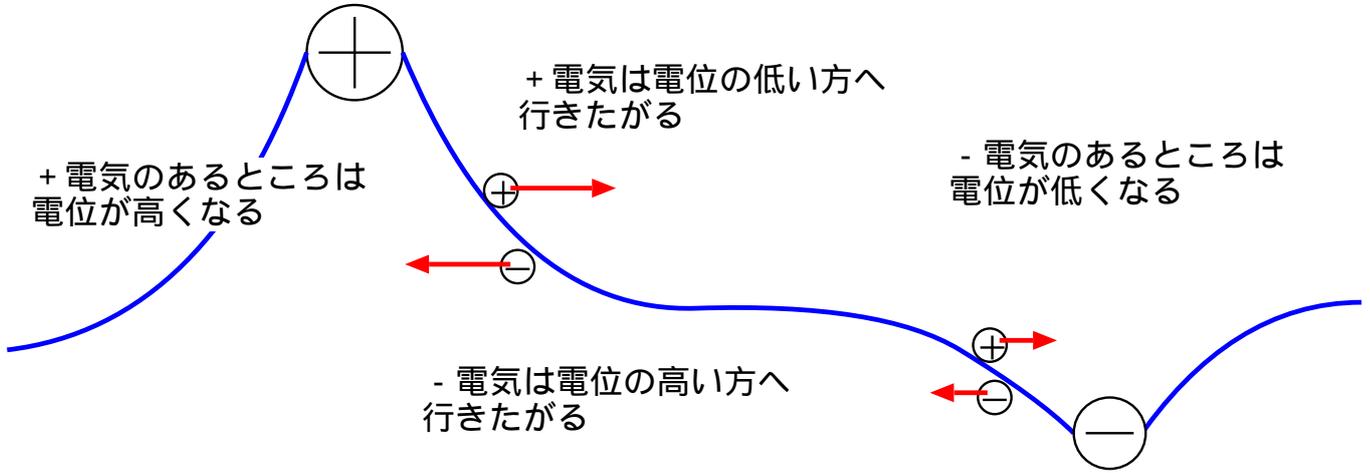
<sup>3</sup>このあたりの計算は、万有引力  $\frac{GMm}{r^2}$  に対応して位置エネルギー  $-\frac{GMm}{r}$  が決まると同様である。符号が違うのは  $Qq > 0$  ならば静電気力は斥力だが、万有引力は名前通り引力であることに由来する。

<sup>4</sup>「静電ポテンシャル」と「ポテンシャルエネルギー」は言葉は似ているが、前者は単位電荷あたりに直したものの、後者はエネルギーそのものであるから、少し違う。

<sup>5</sup>電池の発明者であるヴォルタにちなむ。

れだけの「仕事」がいるのである<sup>6</sup>。

上で考えた点電荷  $Q$  がある場合に試験電荷の持つ位置エネルギーは  $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$  だったので、この位置エネルギーを試験電荷を単位電荷に直したものが電位となる。すなわち、点電荷  $Q$  によって、そこから距離  $r$  の場所に生じる電位は  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  である。つまり、+ 電荷付近は電位が高くなり、- 電荷付近は電位が低くなる。定義により、エネルギーが低くなる方向に力を受けるので、+ 電荷は電位が低くなる方向へ、- 電荷は電位が高くなる方向へと力を受けることになる。



上のグラフの縦軸は電位であって、 $z$  軸などの実際の位置座標ではない。イメージとしては、電位というのは「架空の山の高さ」であり、+ 電荷はその架空の山をすべり下りようとする。電位を作るのも電荷であり、+ 電荷のある場所が盛り上がり、- 電荷のある場所が盛り下がる。その様子はあたかも電位というものが弾力のあるゴム膜のようなもの（トランポリンを思い浮かべるとよい）でできていて、+ 電荷があるところは（架空の）上に引っ張られ、- 電荷のあるところは（架空の）下へと引っ張られているようである（このイメージについても、後で3次元的に考え直そう）。

電場に関して重ね合わせの原理が使えたのだから、電位についても重ね合わせの原理は使える。すなわち、複数の電荷のつくる電位は、各々の電荷の作る電位の足し算で計算される。今はまだ1次元の話しかしていないのでそのありがたみがわかりにくいと思うが、2次元以上では電場がベクトルであり、電位がスカラーであることは非常に大きな差になる。電位の和の計算にはベクトル和（平行四辺形の法則）が必要だが電位の和の計算は単なる足し算なのである。

### 3.2 2次元以上の空間で考える電位

現実の空間は3次元だから、ここまでで述べた1次元的な考えだけでは足りない。そこでこの節では2次元以上の場合で位置エネルギーを定義する方法について考えた後、2次元以上の空間での電場と電位の関係を考えていこう。

#### 3.2.1 2次元以上の空間における位置エネルギー

2次元以上で考える時には、力  $F(x)$  がベクトル  $\vec{F}(x)$  となり、（3次元であれば） $(F_x, F_y, F_z)$  のように次元の数だけの成分を持つ。ゆえに、仕事の定義も、

$$\int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} \tag{3.8}$$

のように力  $\vec{F}$  と変位ベクトル  $d\vec{x}$  の内積の積分で定義される。

この力に対応するエネルギー  $U(x, y, z)$  が定義できたとするなら、

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{3.9}$$

<sup>6</sup>なお、現実的な問題では  $q$  はかなり小さい（前にも書いたように、日常では1Cの電荷に出会うことはまずない）。よって  $1.5q$ [J] の仕事というのは非常に小さく、実際にこれをやっても「ああ仕事をしたなあ」と実感することはないだろう。

のように力を表現することができる。これは1次元の時に  $F = -\frac{dU}{dx}$  と考えたこと其自然な拡張である。ただし、場合によってはこのように書けない場合もあり得る。ちゃんとエネルギーが定義できるための条件は後ではっきりさせるが、ここではとりあえず定義できる場合だけを考えるとということで先へ進もう（後でちゃんと考察するので心配なく）。

これをまとめて、

$$F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = -\vec{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} - \vec{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} - \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z} \tag{3.10}$$

と表現する。この式の右辺をよく見ると、ナブラ記号  $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$  を使って、 $-\vec{\nabla}U$  と表現できる。このように、関数  $\Phi(\vec{x})$  が与えられた時に、ベクトル  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$  を作る演算を「グラディエント (gradient)」（日本語では「勾配」）と呼ぶ。記号 grad を使って、

grad の定義

$$\text{grad}\Phi = \vec{\nabla}\Phi = \vec{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{3.11}$$

と表現する。

grad も div も（後から出てくる rot も） $\vec{\nabla}$  という微分をかける演算であるが、その意味はそれぞれ違うので気をつけること。特に、div はベクトルにかけて結果はスカラーとなるが、grad はスカラーにかけて、結果がベクトルとなる。

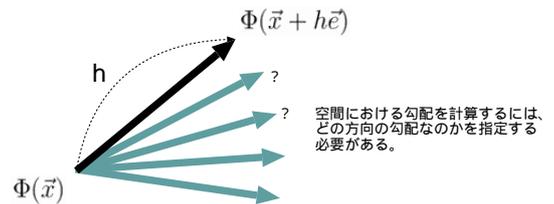
grad の意味を補足しておく。 $\vec{\nabla}$  による微分は

$$\vec{e} \cdot (\text{grad}\Phi) = \vec{e} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(\vec{x} + h\vec{e}) - \Phi(\vec{x})}{h} \tag{3.12}$$

のように定義されている。つまり、ある場所  $\vec{x}$  での  $\Phi$  と、そこから  $h$  だけ離れた場所  $\vec{x} + h\vec{e}$  での  $\Phi$  の差を計算して、それを  $h$  で割る。つまり、距離  $h$  移動した時に関数  $\Phi$  がどの程度変化したかの割合（勾配）を計算するものである。普通の微分に比べて大きく違うところは、単に  $x$  を  $h$  増やすのではなく、ある方向（その方向を指定するのに  $\vec{e}$  が必要であった）に  $h$  だけ離れた場所との比較を行う。

図で書くと右の図のような感じである。つまり、 $\text{grad}\Phi$  はある微小移動ベクトル（矢印）を持ってきて、その根元と矢の先での  $\Phi$  の差を計算するという演算なのである（後で  $h$  で割るのは、単位長さあたりの変化量とするため）。

というわけで、grad はスカラーからベクトルを作る計算であるが、そうやってできたベクトル  $\text{grad}\Phi$  と単位ベクトル  $\vec{e}$  と内積をとってやると、その  $\vec{e}$  が向いている方向の  $\Phi$  の勾配を計算できるのである。



### 3.2.2 電位と電場の関係

以上述べてきたように、位置エネルギーの定義が可能な場合、位置エネルギーの勾配の逆符号がその物体に働く力となる。つまり、 $\vec{F} = -\text{grad}U$  である。単位電荷あたりの力を電場と定義し、単位電荷あたりの位置エネルギーを電位と定義したのだから、上の力とエネルギーの関係を単位電荷あたりに直すと「電位の勾配の逆符号が電場である」ということになる。

つまり、

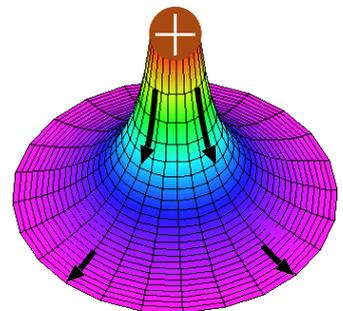
電場と電位の関係

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \tag{3.13}$$

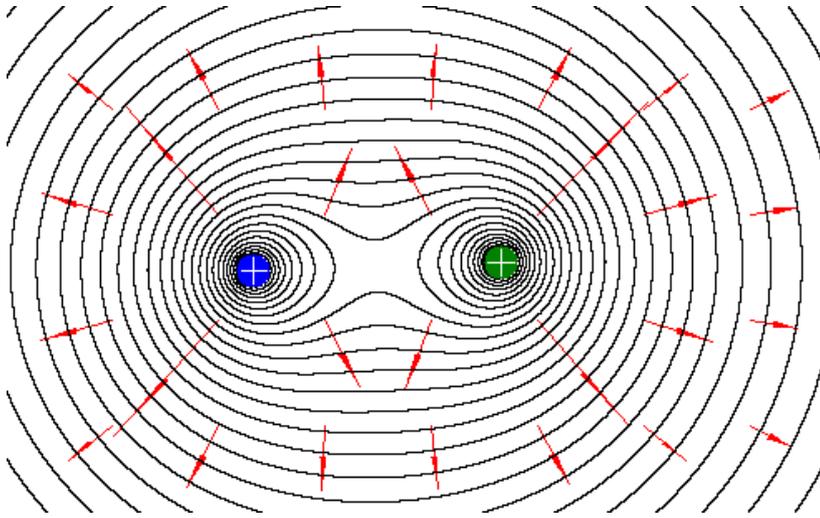
となる。

2次元の場合で、 $V$  と  $\vec{E}$  を図で表現しておこう。

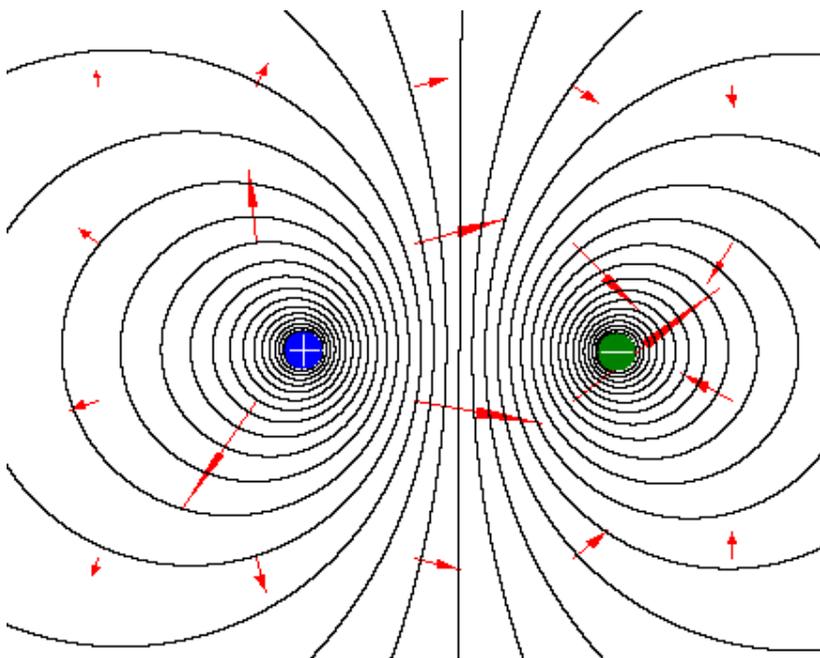
+ 電荷のあるところが電位が高くなっている、という様子を右の図で表現した。図の上はもちろん空間の  $z$  軸ではなく、架空の高さであるところの  $V$  軸である。+ 電荷のあるところは、ゴム膜が「上」にひっぱられるようになって電位が高くなる。



gradの意味するところは、名前の通り「山の勾配」である。 $V$ を山の高さを見た時に、gradによって計算できるのは、その方向に移動した時に「山の高さ」 $V$ がどんな割合で増加するかである。ベクトル  $\text{grad}V$  の向きは勾配がもっとも急な方向を意味する。その大きさはもちろん、そちらへの勾配である。右の図は  $-\text{grad}V$  を表す。マイナス符号が着くことで「すべり落ちる方向」を向いたベクトルとなる。電荷に近づくほど、勾配も急になるので、電荷に近づくほど電場が強い。



ている。



くかぎり、位置エネルギーが変化しない。つまり、等電位面上を移動する限り、電場は仕事をしない。力が働くのに仕事をしないということは、移動方向と力の方向が垂直だ、ということである。よって、等電位面は電気力線と垂直になる。

左図は、二つの等しい+電荷の作る電位の様子を等高線で表したものである。いきなり3次元的に考えるのは難しいので、まず左の図をよく見て、等電位線(面)のイメージをつかんでもらいたい。+電荷のあるところが「山」になり、そこから滑り降りる方向に電場ができています、というイメージである。

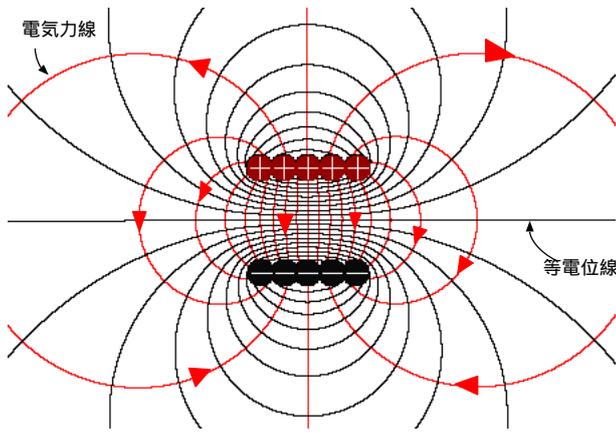
このように、電位という「架空の高さ」に対応する等高線を「等電位線」と呼ぶ。なお、3次元的に考える時は等電位な場所は線ではなく面状になるので「等電位面」と呼ぶことが多い。

矢印は電場を示している。電場の向きは常に等電位面に垂直である。矢印は、山(+電荷のあるところ)から転げ落ちる方向に向い

左の図は、絶対値が等しい正負の電荷がある場合の等電位面の様子である。こちらの場合には+電荷を「山」、-電荷を「谷」と考えて、山から下りて谷へ落ちる方向へと電場ができる。上の図でもそうであったが、等電位面の間隔が狭い場所(混み合っている場所)は電場が強い(等高線だと思えば、間隔が狭いということは急な坂=大きい勾配)ことがわかるだろう。

ここでもしこの電荷の間の距離を縮めたとすると、電荷と電荷の間にある電場は強くなるが、それは山と谷が近づくことでより斜面が急になるからである。一方、遠方での電場はむしろ弱まるが、それは山と谷が重なり合うことで、遠方では二つの効果が消し合ってしまうからだと考えられる。

電気力線と等電位面を両方書くと、この二つは常に垂直に交わる(電場ベクトルは等電位の法線ベクトルになる)。等電位面上を動



左の図はコンデンサの場合の電気力線と等電位面を描いたものである。コンデンサの場合、電気力線は極板間に集中し、少しだけ外に漏れるという形になる。そのため、「コンデンサの外には電場は0とする」という近似を使うことが多い。

電位もコンデンサ外では変化（傾きもしくは勾配）が小さくなっていることに注意しよう。見てわかるように、電気力線が混雑しているところでは、等電位面も混雑する。どちらも「電場が強い」ということを表現しているわけである。

### 3.2.3 位置エネルギーが定義できる条件

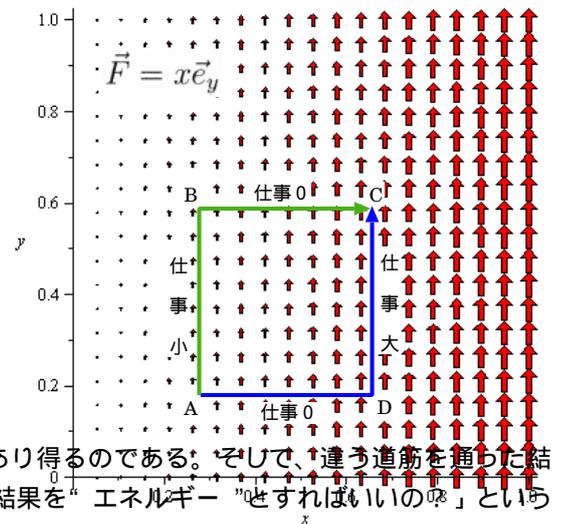
さて、前節で、力を  $\vec{F} = -\nabla U$  と書いたが、これはあくまで、「力に対応するエネルギーが定義できたとするなら」という条件付きであった。

2次元もしくは3次元の中で考える時には、上に上げた「力  $F(x)$  が場所のみの関数である」以外にも、エネルギーが定義できるための条件がさらに必要になってくる。

というのは、一般に場所の関数になっている力  $\vec{F}$  が与えられた時、それが  $U$  の勾配の逆符号で与えられるとは限らない。たとえば単純な例として  $\vec{F} = x\vec{e}_y = (0, x, 0)$  を考えよう。  $F_y = x$  であるから  $U = xy$  と予想されるが、そうだとすると  $\frac{\partial U}{\partial x} = y$  となってしまうと、  $F_x$  が0であることと矛盾する。つまり、  $\vec{F} = -\nabla U$  と書くことはできない。

ではどういう時にはエネルギーが定義でき、どんな時にはできないのだろうか？—そのことを単純に判定する方法はないだろうか？

1次元ならある点からある点へ移動する方法は一つしかないので、力を距離で積分した時の答は一つしかありえない。ところが2次元以上の空間ではある点から別の点に行くのに、いろんな方法（道筋）があり得るのである。そして、違う道筋を通った結果積分の結果が違ってたとすると、「いったいどっちの道筋を通った結果を「エネルギー」とすればいいの？」という疑問が発生してしまうのである。



実際、上の例の場合、仕事が経路に依存する。それは図の A B C と図の A D C で仕事を考えてみるとすぐわかる。ノンゼロの仕事は A B と C D であるが、あきらかに C D の方が仕事が多い。エネルギーは「仕事の分だけ増える量」として定義されているのだから、A 点での位置エネルギーを定めた時、C 点での位置エネルギーは、経路によって違うということになってしまっていて、場所の関数としてエネルギーを定義することは不可能である。

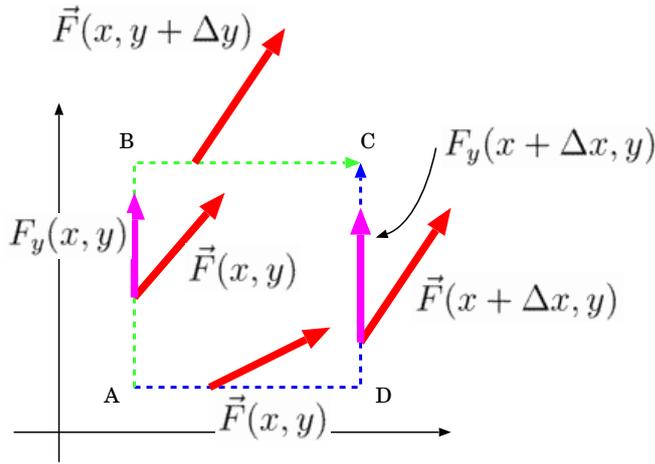
そのため、エネルギーが定義できるためには、「力を位置座標で積分していったもの（すなわち仕事）が経路に依存しない」という条件が必要になってくるわけである。このような性質を持つ力を「保存力」と呼ぶ。後でちゃんと示すが、静電気力は保存力である。

保存力である場合、  $\vec{F} = -\nabla U$  という形で、位置エネルギー  $U$  を定義することができる。重力、ばねの弾性力、万有引力なども保存力であり、対応する位置エネルギーを定義可能である。

## 3.3 rot と位置エネルギーの存在

### 3.3.1 仕事が経路に依存しない条件

仕事が出発点と到着点だけに依存し、経路に依存しないためにはどんな条件が必要であろうか？—それを求めるために、またしても物理の常套手段である「細かく区切って考える」を使うことにしよう。つまり、出発点と到着点が非常に近い点にある場合を考える。簡単のため、図の  $A(x, y)$   $D(x + \Delta x, y)$   $C(x + \Delta x, y + \Delta y)$  という経路と、  $A(x, y)$   $B(x, y + \Delta y)$   $C(x + \Delta x, y + \Delta y)$  という経路を比較するところから始める。例によって  $\Delta x, \Delta y$  は微小と考えるので、各経路における仕事は、以下の図のように計算できる。



- A Bでの仕事:  $F_y(x, y)\Delta y$
- B Cでの仕事:  $F_x(x, y + \Delta y)\Delta x$
- A Dでの仕事:  $F_x(x, y)\Delta x$
- D Cでの仕事:  $F_y(x + \Delta x, y)\Delta y$

下二つを足したもの (A D C 経路での仕事) から上二つを足したもの (A B C 経路での仕事) を引くと、

$$F_x(x, y)\Delta x + F_y(x + \Delta x, y)\Delta y - F_y(x, y)\Delta y - F_x(x, y + \Delta y)\Delta x \simeq \left(\frac{\partial}{\partial x}F_y\right)\Delta x\Delta y - \left(\frac{\partial}{\partial y}F_x\right)\Delta x\Delta y \quad (3.14)$$

となる。すなわち、経路によらずに仕事が決まる条件は、

$$\frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x = 0 \quad (3.15)$$

である。

ここでは  $xy$  平面で考えたのでこの条件が出たわけであるが、 $yz$  面や  $zx$  面についても同じ条件が成立せねばならないから、

$$\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}F_x - \frac{\partial}{\partial x}F_z = 0 \quad (3.17)$$

も合わせて、3つの条件が必要となる。逆にこの3つが成立すれば、この微小な四辺形を組み合わせることでどんな形の面でも作ることができるであろうから、仕事は経路によらなくなる。この3つの左辺を、 $xy$  面での条件を  $z$  成分、 $yz$  面での条件を  $x$  成分、 $zx$  面での条件を  $y$  成分としてベクトルとしてまとめたもの

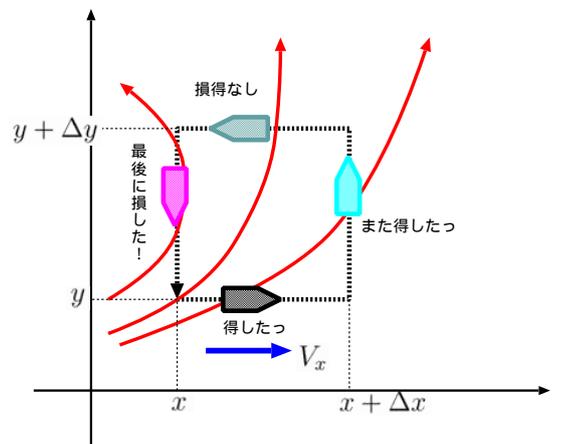
rot の定義

$$\text{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y, \frac{\partial}{\partial z}F_x - \frac{\partial}{\partial x}F_z, \frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x\right) \quad (3.18)$$

と定義し、「ローテーション (rotation)」と呼ぶ。日本語では「回転」と呼ぶ。なぜ回転と呼ぶのかは、次の節のイメージで理解するとよい。記号は curl (カール) を使うこともある。

### 3.3.2 rot のイメージ：ボートの周回

rot の意味を、水の流で考えよう。水面の上に仮想的なボートを浮かべてみる。そして、その仮想的なボートが四辺形の形に水面を運航する。この時「ボートは水の流れにどれだけ押しもらったでしょうか」という問題を考えると、この答えを出すために必要になるのが rot なのである。上の図の点線のように水が流れていて、四辺形の形に仮想的ボートが動いたとする。最初ボートは右に移動し、流れは少し右に傾いているから、ちょっと得をする。次に上へ進む時も得をする。その次には左へ進むが、この時は流れと運動方向が垂直に近いのでそれほど得も、損もしない。最後の下への移動では流れに逆らっているので損をする。これを1サイクル分足し上げたものが rot の正体である。



ではこれを式で書こう。まず最初の右へ動くとき、どれくらい得をするかという、 $V_x \Delta x$  くらいであろう。上の方で左に動く時は、逆向きなので  $-V_x \Delta x$  になる。ここで「足したらゼロ」と思ってしまうのは div の時の話と同じで、この場所では  $y$  座標が  $\Delta y$  だけ増えているのだから、

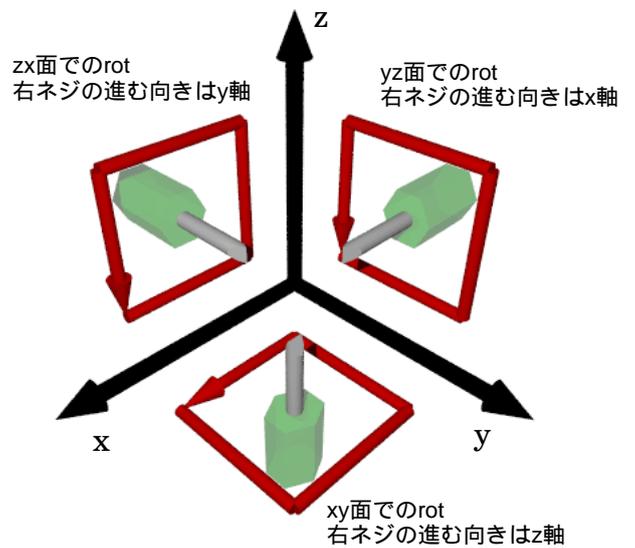
$$\underbrace{-V_x(x, y + \Delta y, z)\Delta x}_{\text{上の辺での得}} + \underbrace{V_x(x, y, z)\Delta x}_{\text{下の辺での得}} \tag{3.19}$$

と解釈すべきなのである。例によって  $V_x(x, y + \Delta y) = V_x(x, y) + \frac{\partial V_x}{\partial y}(x, y)\Delta y + \dots$  とテーラー展開すれば、上と下の辺での得は  $-\frac{\partial V_x}{\partial y} \Delta x \Delta y$  となる。同様の計算を、右の辺の上向き移動の部分と、左の辺の下向き移動の部分についておこなうと、今度は関係するのは  $V_y$  であり、 $x + \Delta x$  の位置（右の辺）が + で、 $x$  の位置（左の辺）が + で効くので、 $\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}\right) \Delta x \Delta y$  となる。まとめると、

$$\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \Delta x \Delta y \tag{3.20}$$

とまとまる。これを単位面積あたりに換算した、 $\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$ こそが rot である（実際には、rot の  $z$  成分）。

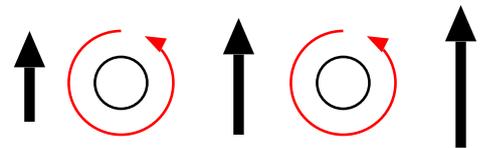
「rot はなぜベクトルなんだろう？」と疑問に思う人がいるかもしれない。それは、今考えたように微小な四角形一個一個に対して（単位面積当たりの密度として）定義されているのが rot であるからである。四角形がどんな向きを向いているかによって rot の値は当然、違うからである。そのベクトルの向きは、四角形の運航を右ネジを回す向きと考えた時のネジの進む向きとする。ある一点を指定しても、その場所に四角形はたくさん（いろんな方向を向いて）書ける。だから、「rot はベクトルで  $x$  成分と  $y$  成分と  $z$  成分がある」という表現は正しいのだが、より正確には、「rot には  $yz$  面に垂直な成分と  $zx$  面に垂直な成分と  $xy$  面に垂直な成分がある」（もちろん、「 $x$  成分」は「 $yz$  面に垂直な成分」のように対応する）と言うべきである<sup>7</sup>。



rot は「回転」という名前がついているせいもあって、何か渦を巻くように回っている時だけ nonzero になると誤解する人が多いので注意しておく。

前に示した  $\vec{F} = x\vec{e}_y$  の場合、どこにも渦は発生していないが、rot は nonzero である ( $\frac{\partial F_y}{\partial x} = 1$  だから)。もしこのような流れがあったとして、「その流れの中に丸いものを放り込んだとしたら、回り出すかどうか」と考えると rot のあるなしを判定しやすい。 $\vec{F} = x\vec{e}_y$  の場合、右の方が流れが速いので、丸いものは反時計回りに回転を始めるはずである。

右へ行くほど強くなる流れ



回転が起こる

なお、ベクトルの外積の式と rot の式を見比べると、

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{F} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y, & \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z, & \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \end{pmatrix} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y, & a_z b_x - a_x b_z, & a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.21}$$

となり、同じ形をしていることがわかる。rot は、ちょうど  $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  と  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  と外積を取っている計算になる。よって、

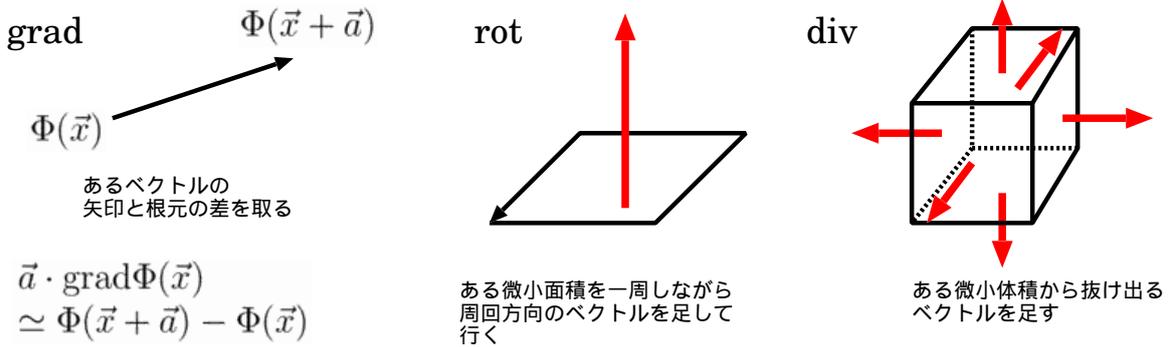
$$\text{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \tag{3.22}$$

という表記もよく使われる。

<sup>7</sup>もし3次元じゃない空間を考えたら、「面積に対応する量」はベクトルではなくなる。たとえば2次元では面積は1つ、ベクトルは2成分。4次元なら面積は6つあるがベクトルは4成分。面積に対応する量がベクトルと同じになるのは3次元のみ。我々の住むこの空間が3次元であることには何か深い意味があるのだろうか???

### 3.3.3 grad, rot, div の関係

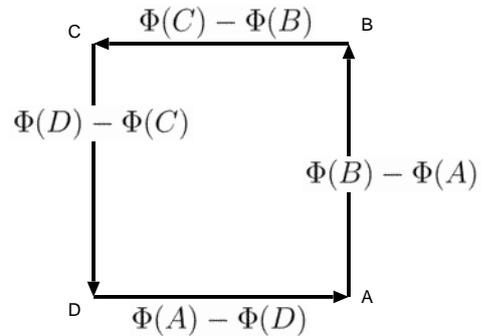
ここまでで、電磁気で使うベクトル解析で重要な div, rot, grad を説明したことになるが、この3つを図形的に表現すれば、



となる。単なる計算ツールとして数式を盲目的に覚えるのではなく、図形的イメージを頭に入れて欲しい。このイメージがあれば、以下にあげる法則がなぜ成立するのかが理解しやすい。

grad の rot が 0 であること

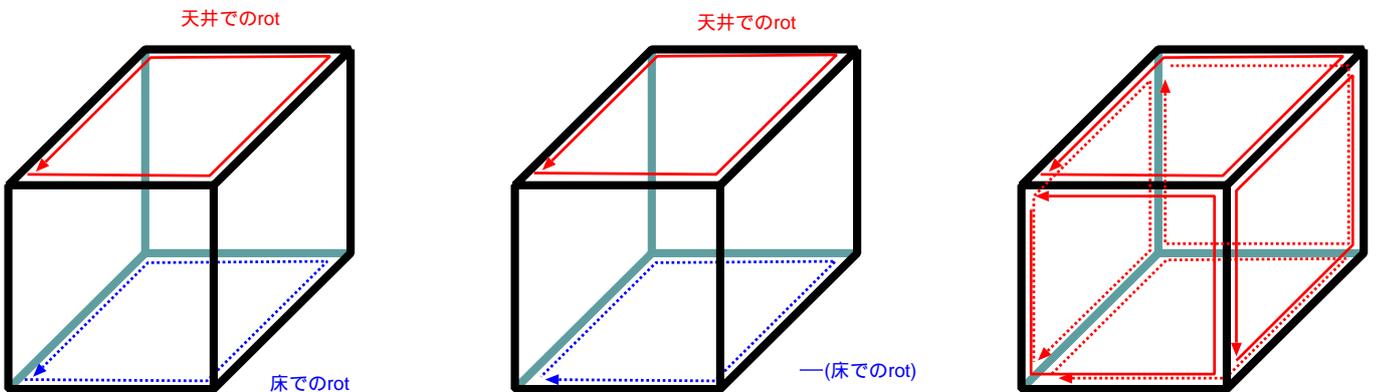
$\Phi$  がどんな関数であっても、 $\text{grad}\Phi$  の rot をとると 0 になる ( $\text{rot}(\text{grad}\Phi) = 0$ )。これは数式でもわかるが、grad と rot の意味を理解していれば、右図を見るだけで一発でわかる。grad は矢印の先の量と矢印の根本の量の差である。rot は四辺形の一週で定義されている。rot というのは、矢印4本もってきて四辺形を作るという操作に等しいのであるが、この4本の矢印が表しているものが grad の場合、「(矢の先)-(矢の根本)」という引き算なのだから、矢印が四辺形を描いて一周回るように足し算を繰り返せば、プラス符号付きの「矢の先」とマイナス符号付きの「矢の根本」が全て消しあい、答えが零になるのは当然である。



rot の div が 0 であること

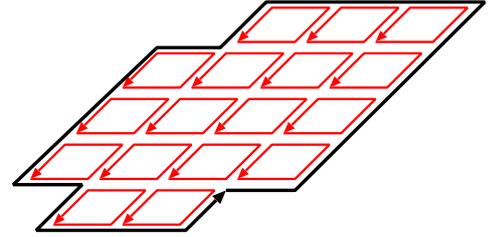
同じように考えると、任意のベクトル  $\vec{V}$  に対し、 $\text{div}(\text{rot}\vec{V}) = 0$  であることもわかる。これまた計算でも簡単にわかるのだが、ここでは図で説明しよう。

div は直方体、rot は四辺形に対応するものである。rot から div を作るというのはつまり、下の一番右の図のようにする、ということ。ここで天井の四辺形の rot と底面の四辺形の rot が逆回りをしているが、これは div が「天井 - 底」という引き算で表されているからである。他の6面についても、対面どうしの四辺形の中で、rot は逆回りしている。で、この図をよく見ると、一つの辺を2本ずつ、逆向き矢印が通っていることが理解できる。となれば、これも全部足せば零になるのは当然である。



ストークスの定理

rot の四辺形を直方体をなすように組み上げると div が零になるのだが、直方体でなく任意の面を作るように組み上げていくと、ストークス (Stokes) の定理というのが証明できる。rot の四辺形をあわせていくと、常にとりあう矢印どうしは消しあうので、一番外側にある線 (つまり考えている面の外縁) の部分の積分だけが残ることになる。



これから、

$$\int_S (\text{rot} \vec{V}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{x} \quad (3.23)$$

という公式が作れる。S はある面積を表し、 $\int_S$  はその面の上の積分である。 $\partial S$  は S の境界となる線を表す。 $\oint_{\partial S}$  は境界線の上での線積分である。これをストークスの定理と言う。

ストークスの定理は面をくみ上げていって作った定理であるが、立体を組み合わせて同様のことをすれば、ガウスの発散定理 ( $\int_V \text{div} \vec{V} dV = \int_{\partial V} \vec{V} \cdot d\vec{S}$ ) ができた。この二つの公式は 2 次元と 3 次元という違いはあれ、同じ考え方で出てくる式なのである。ストークスの定理から、 $\text{rot} \vec{E} = 0$  であるような面の周りを一周する用に電荷を動かすと、電場のする仕事が 0 であることがわかる。

さて、以上で準備は終わったので、この話を静電気力の具体的な問題に適用して、「電位」という概念を使っていこう。

### 3.4 電位 (静電ポテンシャル)

#### 3.4.1 位置エネルギーの微分としてのクーロン力

点電荷によるクーロン力が

$$\vec{F} = -\text{grad} \left( \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = -\vec{\nabla} \left( \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = -\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \quad (3.24)$$

とも書けることは重要である。U =  $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$  はポテンシャルエネルギーであるから、これを単位電荷あたりに直した  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ こそが点電荷による電位である。

なお、電位の定義は  $\vec{E} = -\text{grad} V$  であるが、V に定数 C を加えても ( $\text{grad} C = 0$  なので) これから導かれる電場は全く同じである ( $\vec{E} = \text{grad}(V + c)$ )。よって、電位の定義には常に定数を加えるという任意性がある (もともと、位置エネルギーにもあった任意性だから当然である)。

#### 3.4.2 電位の満たすべき方程式

真空中の静電気学の法則は  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  と  $\text{rot} \vec{E} = 0$  という二つの式にまとめることができるが、 $\vec{E} = -\text{grad} V$  を使うと、

電位を使って表現する真空中の静電気学の法則

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} = 0 &\rightarrow \text{自明 (grad の rot は常に 0 だから)} \\ \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} &\rightarrow \text{div}(\text{grad} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (3.25)$$

となり、基本法則は  $\text{div}(\text{grad} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  のみになる。

この、grad の div という量をまじめに計算すると、 $\text{grad} V$  は  $(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z})$  という成分を持つベクトルであり、div とはベクトル  $(A_x, A_y, A_z)$  に対して  $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$  を計算することであったから、

$$\text{div}(\text{grad} V) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.26)$$

と書ける。この 2 階微分演算子をまとめて  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  という記号で書いて、

## 静電気学におけるポアソン方程式

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.27)$$

という方程式が作られる。この式のように、 $\Delta f = j$  という形の方程式を「ポアソン方程式」と呼ぶ。右辺に入る  $j$  (静電気学の場合、 $-\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ) は「源 (source)」と呼ばれる。特に右辺が 0 の時 (静電気学の場合、電荷がない時) の方程式である  $\Delta f = 0$  はラプラス方程式と呼ばれ、この演算子  $\Delta$  はラプラシアンと呼ばれる。

【補足】この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

ここで、点電荷による電場の電位  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  が (原点以外で) ラプラス方程式を満たしていることを二つの方法で確認しよう。

【直交座標を使って】 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  であることを使う。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} \frac{x \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + 3 \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

これで  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right)$  が計算できたわけだが、 $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \right)$  を計算したとしたら、上の式で  $x \leftrightarrow y$  と取り替えたものになるであろうことは容易にわかる。同様に  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right)$  を計算すれば、上の式で  $x \leftrightarrow z$  と取り替えたものになる。というわけでこの3つを足し算すると、

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + 3 \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right) \text{ から} \right) \\ &\quad -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + 3 \frac{y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \right) \text{ から} \right) \\ &\quad -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + 3 \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) \text{ から} \right) \\ &= -\frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + 3 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

となり、確かに  $\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0$  が確認できる。

【極座標を使って】極座標での  $\text{grad}V$  は  $\left( \frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)$  と書ける (前から順に、 $r$  成分、 $\theta$  成分、 $\phi$  成分)。これを極座標での  $\text{div}$  の表記

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (3.30)$$

に代入すると、

$$\text{div}(\text{grad}V) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad (3.31)$$

となる。これが極座標での  $\Delta V$  の表示である。

この表記に  $V = \frac{1}{r}$  を代入すると、 $\theta, \phi$  による微分は 0 なので、残るのは第一項のみである。そしてその第一項は、まず  $\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}$  で、これに  $r^2$  をかけた  $r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = -1$  となるので、次の微分で 0 となる。極座標では非常に簡単に  $\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0$  が確認できる。

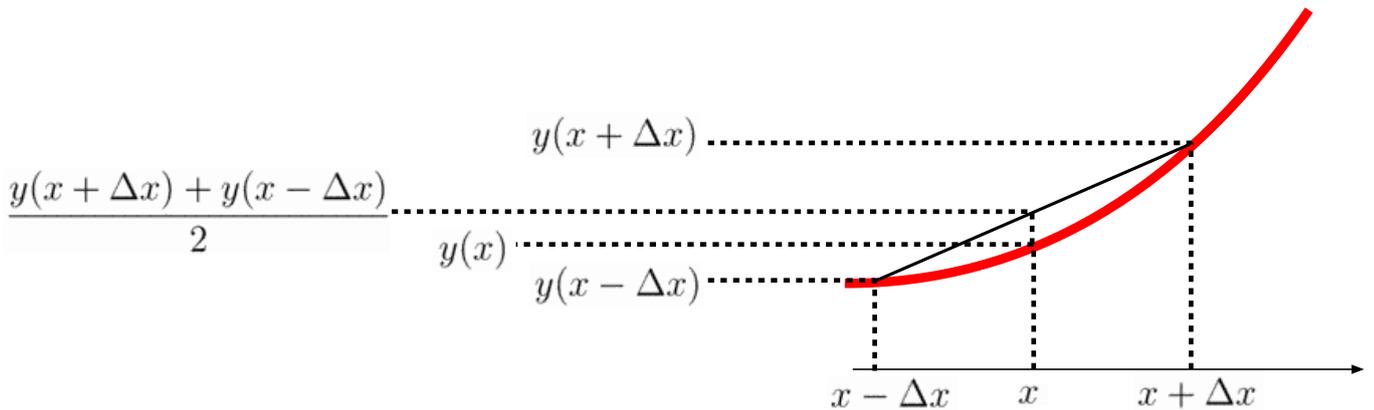
なお、後で説明するが、上の式が成立するのは  $r \neq 0$  の場所だけである。 $r = 0$  では分母が 0 になってポテンシャルが発散するため、そこをうまく評価してやらねばならない。

【補足終わり】

### 3.4.3 ラプラシアンの物理的意味

$\text{grad}$  に「勾配」という意味が、 $\text{div}$  に「湧き出し」という意味があることは、電場や電位の物理的イメージを得るのにたいへん役だった。そこでこの節では、ラプラシアン ( $\Delta$ ) にはどんな意味があるのかを考えておくことにする。

2次元、3次元から考えるのはたいへんなので、まずは1次元(1直線上)で感覚をつかんでおこう。1次元ならば、ラプラス方程式  $\Delta f = 0$  は単なる  $\frac{d^2}{dx^2}f = 0$  という「二階微分すると0」という方程式になる(1次元上なので、偏微分ですらない)。



微分はそもそもグラフの傾き(勾配)という意味があり、その定義は、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \tag{3.32}$$

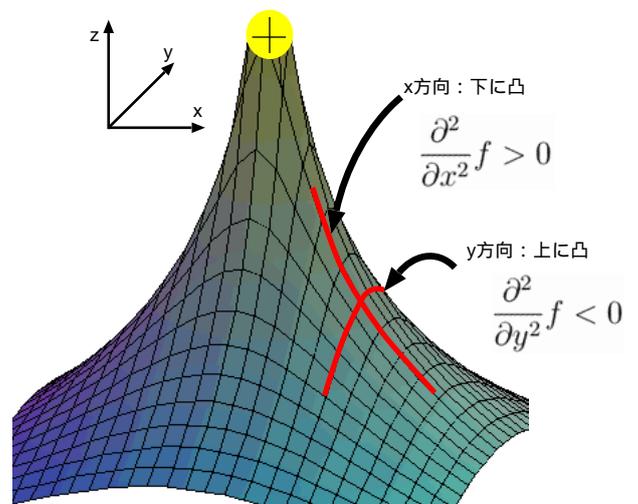
であった。では2階微分はというと、これを繰り返すのであるから、

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(y(x + \Delta x) - y(x)) - (y(x) - y(x - \Delta x)))}{(\Delta x)^2} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) + y(x - \Delta x) - 2y(x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \tag{3.33}$$

という式になる。この式の分子を見ると「両サイドの和 ( $y(x + \Delta x) + y(x - \Delta x)$ ) から中央での値  $\times 2$  ( $2y(x)$ ) を引く」という計算になっている。あるいはこれを2で割ると「両サイドの平均 ( $\frac{y(x + \Delta x) + y(x - \Delta x)}{2}$ ) から中央での値 ( $y(x)$ ) を引く」という量である。つまり、2階微分は「中央の値と両サイドの平均値とのずれ」を表す。これは「グラフがその場所でどの程度たわんでいるか」を示す量になっている(グラフが直線ならば2階微分が0であることは、そもそもの定義から理解できるだろう)。

もしこのグラフの線がゴム紐のような弾力のあるものであったとすると、2階微分が+である場所では、ゴム紐のその部分は上に引っ張られる。2階微分が-ならば話は逆となる。つまり、この2階微分はゴム紐の復元力のようなものを表現しているのである。

2次元ではラプラシアンは  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  を意味する。この場合、 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  の部分は  $x$  方向でのたわみ具合を、 $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$  は  $y$  方向でのたわみ具合を勘定することになる。よって、 $\Delta f(x, y) = 0$  というのは、 $x$  方向で下に凸ならば、 $y$  方向に同じだけ上に凸になっていることを意味する。右の図は2次元の場合のラプラス方程式の解である  $f(x, y) = -\log(x^2 + y^2)$  の立体的グラフである。このグラフをゴム膜のように考えると、 $x$  方向のたわみはこの膜を上引っ張るだろう。そして、 $y$  方向のたわみはこの膜を下引っ張る。この二つの力が釣りあって、この膜が静止している。この釣りあい関係を表すのが、 $\Delta f = 0$  なのである。



3次元でも同様で、 $\Delta f(x, y, z) = 0$  は、 $x, y, z$  の3つの方向のたわみによる力の釣りあいを意味する(図で表現するのは難しい! <sup>8)</sup>。

なお、このことからラプラス方程式を満たす関数(たとえば真空中の電位  $V$ ) はけっして極大や極小を持ってない<sup>9</sup>ことがわかる。数式での証明は略するが、ゴム膜のイメージで考えると、極大値や極小値があるとその場所では決して引っ張り力

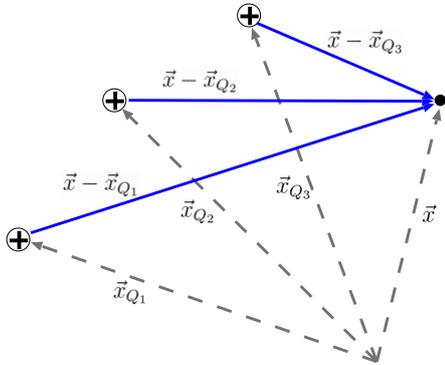
<sup>8</sup> $x, y, z$  にさらに  $f$  を合わせて、4次元がイメージできればできるが、普通の人間にはムリである。

<sup>9</sup>このことをアンショーの定理と呼ぶ。これからわかることは、静電場のよる力だけでは釣りあいは達成できないということである。

がつりあうことがないことが理解できるだろう。 $x$  方向のたわみはゴム（電位）を上引っ張り、 $y, z$  方向のたわみがゴム（電位）を下引っ張るという形でしか平衡状態は出現しない。

## 3.5 電位の計算例

### 3.5.1 電位の重ね合わせ



電場に関しては重ね合わせの原理が使えたが、 $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  で定義される  $V$  についても、重ね合わせの原理が使える。電位に関する重ね合わせの原理は、電場に関する重ね合わせの原理より、さらに便利である。なぜなら電場はベクトルであるから重ね合わせるにもベクトル和をとる必要があるが、電位はスカラーであるから単なる足し算で重ね合わせることができるのである。実は前の章でやった問題の多くも、この考え方で電位を使った方が簡単に解くことができる。

電気量が  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  である  $N$  個の電荷が  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$  に存在している場合、点  $\vec{x}$  における電位は

$$V(\vec{x}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}_{Q_1}|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}_{Q_2}|} + \dots = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}_{Q_i}|} \quad (3.34)$$

と表せる。これの grad を取ると電場が出る。grad ( $\vec{\nabla}$ ) は微分演算子であり、級数の和をとってから微分しても微分してから級数和をとっても結果は同じになることから、

$$-\vec{\nabla}V(\vec{x}) = -\sum_{i=1}^N \vec{\nabla} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}_{Q_i}|} = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}_{Q_i}|^2} \vec{e}_{\vec{x}_{Q_i} \rightarrow \vec{x}} \quad (3.35)$$

という計算になる。つまり、各電荷の電場を考えてから和をとっても、各電荷の作る電位の和をとってから微分して電場を考えても、結果は同じである。この後やる具体例では、連続的に分布した電荷を考えるが、その場合は微小部分による電位の和（つまりは積分）を計算すればよい。

すなわち、電荷密度  $\rho(\vec{x})$  が存在する時の電位は

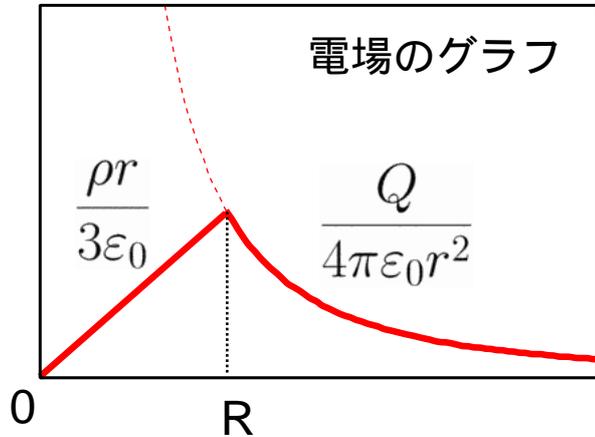
$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' \quad (3.36)$$

のように積分で計算できる。この式は、場所  $\vec{x}'$  にいる微小電荷  $\rho(\vec{x}')d^3\vec{x}'$  による影響を足し算することで、場所  $\vec{x}$  における電位  $V(\vec{x})$  が計算できる、という式である。 $\vec{x}'$  の積分は、電荷のあるところ全部について行う。

## 3.5.2 一様な帯電球

一様な電荷密度  $\rho$  で帯電した半径  $R$  の球のつくる電位について考える。電位を計算する方法を列挙しよう。

電場から計算する

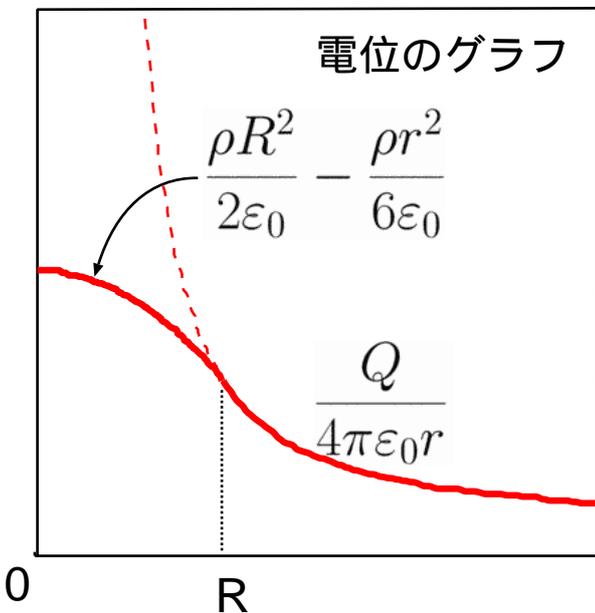


すでにこの場合の電場は求めてある。

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & r > R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r & r \leq R \end{cases} \quad (3.37)$$

である。 $\vec{E}$  は  $r$  のみの関数であるから、 $V$  も  $r$  のみの関数になると考えて良いであろう。 $\vec{E} = E_r \vec{e}_r$  として、 $E_r = -\frac{dV}{dr}$  になるように  $V$  を決めると、

$$V = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} & r > R \\ V_0 - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} & r \leq R \end{cases} \quad (3.38)$$



となる。これに  $-\vec{\nabla}$  をかければ上の  $\vec{E}$  になることはすぐわかる。

ここで現れた定数  $V_0$  は  $r = 0$  での電位である。電位は「微分して ( $\vec{\nabla}$  をかけて)  $-$  をつけると電場になる」という定義なので、定数をつける自由度は常にある<sup>10</sup>。 $V_0$  の値は、この式に  $r > R$  での式に  $r = R$  を代入した時と、 $r \leq R$  の式に  $r = R$  を代入した時に両者が等しいという条件 (接続条件) から決める。すなわち、

$$\begin{aligned} V_0 - \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} &= \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \\ V_0 &= \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \end{aligned} \quad (3.39)$$

ということ。

電場と電位の概略のグラフを並べてみたのが上の図である。電位のグラフがスムーズにつながる曲線となっていること、電位の傾き  $\times (-1)$  が電場となっていることを確認して欲しい。特に

$r = R$  で電位の傾きがスムーズであること (これはつまり、 $r = R$  での電場が接続されることを意味する) は注意しよう。後の計算ではこれを積極的に利用する。

電場から求める方法は電場が求まっていれば簡単だが、そうでない場合はむしろ回り道であることは言うまでもない。

<sup>10</sup>そういう意味では、 $r > R$  での電位も  $V_\infty + \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$  のように無限遠での電位を足しておいてもかまわない。ここでは無限遠で電位は  $0$  であると決めた。

微小部分の作る電位を考えてそれを積分する

電場の時にも使った、「まず細かく分けて考える」という手法である。電場の計算同様、まず微小部分（体積は  $(r')^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi$ ）のつくる電位を考えると、

$$dV = \frac{\rho(r')^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta}} \quad (3.40)$$

であるから、これを積分する。 $\phi$  積分はすぐに終わって  $2\pi$  を出す。 $\theta$  積分をするためにまた  $\int_0^\pi \sin \theta d\theta \rightarrow \int_{-1}^1 dt$  の置き換えをして、

$$\begin{aligned} V &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr' \int_{-1}^1 \frac{(r')^2 dr' dt}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr't}} \\ &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr' (r')^2 dr' \left[ -\frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr't} \right]_{-1}^1 \end{aligned} \quad (3.41)$$

とする。 $\left[ -\frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr't} \right]_{-1}^1$  は  $-\frac{1}{rr'} (|r - r'| - |r + r'|)$  となるか

ら、 $r > r'$  ならば  $-\frac{1}{rr'} \times (-2r')$ 、 $r < r'$  ならば  $-\frac{1}{rr'} \times (-2r)$  である。 $r'$  は 0 から  $R$  まで積分するので、 $R < r$  ならば常に  $r > r'$  である。その場合、

$$V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^R dr' (r')^2 dr' \frac{1}{r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} \quad (3.42)$$

である。

$r < R$  の時は積分域をわけて、

$$\begin{aligned} V &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \left( \int_0^r dr' (r')^2 dr' \frac{1}{r} + \int_r^R dr' (r')^2 dr' \frac{1}{r'} \right) \\ &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \left( \left[ \frac{(r')^3}{3r} \right]_0^r + \left[ \frac{(r')^2}{2} \right]_r^R \right) \\ &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{3} + \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2 - \frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

この結果は当然、電場から求めたものと等しい。

ポアソン方程式を解く

問題が球対称なので、電位も球対称になると仮定する。ポアソン方程式は

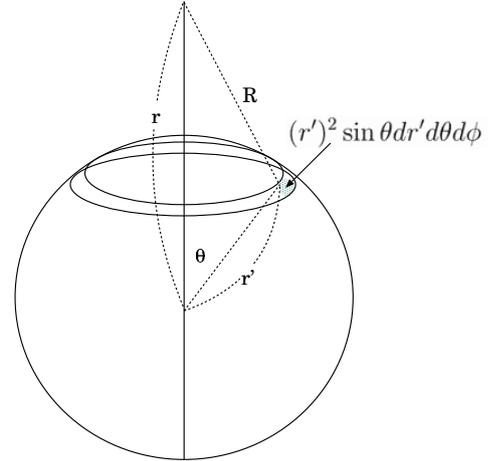
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} V(r) \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.44)$$

となる。ただし、 $r > R$  ではラプラス方程式

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} V(r) \right) = 0 \quad (3.45)$$

が成り立つ。こちらから解こう。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} V(r) \right) &= 0 && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(両辺を積分)} \\ r^2 \frac{d}{dr} V(r) &= C_1 && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(} r^2 \text{で割り、)} \\ \frac{d}{dr} V(r) &= \frac{C_1}{r^2} && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(再び両辺を積分)} \\ V(r) &= -\frac{C_1}{r} + C_2 \end{aligned} \quad (3.46)$$



$r = \infty$  で  $V = 0$  という境界条件を採用することにすれば、 $C_2 = 0$  である。次に内部での方程式を解くと、上と全く同じ手順を踏んで、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} V(r) \right) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 \\ r^2 \frac{d}{dr} V(r) &= -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r^3 + C_3 \\ \frac{d}{dr} V(r) &= -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r + \frac{C_3}{r^2} \\ V(r) &= -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 - \frac{C_3}{r} + C_4 \end{aligned} \quad (3.47)$$

となる。原点で  $V$  が発散しないという条件から、 $C_3 = 0$  である。

後は  $C_1, C_4$  を求めればいいが、そのためには今もとめた二つの  $V$  と、その微分  $\frac{dV}{dr}$  が、 $r = R$  で等しいという条件を置く。電位の微分が電場であるから、その電位がジャンプするような関数であってはならない（微分ができないから）し、微分がジャンプしてはならない（一カ所に二つの電場があることになってしまう）。その条件は

$$V(r) \text{ の接続条件： } -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R^2 + C_4 = -\frac{C_1}{R} \quad (3.48)$$

と、

$$\frac{dV}{dr}(r) \text{ の接続条件： } -\frac{\rho}{3\epsilon_0} R = \frac{C_1}{R^2} \quad (3.49)$$

である。下の式から  $C_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} R^3$  となり、これを上の式に代入すれば、

$$-\frac{\rho}{6\epsilon_0} R^2 + C_4 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R^2 \quad (3.50)$$

となるから、 $C_4 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2$  と求められる。

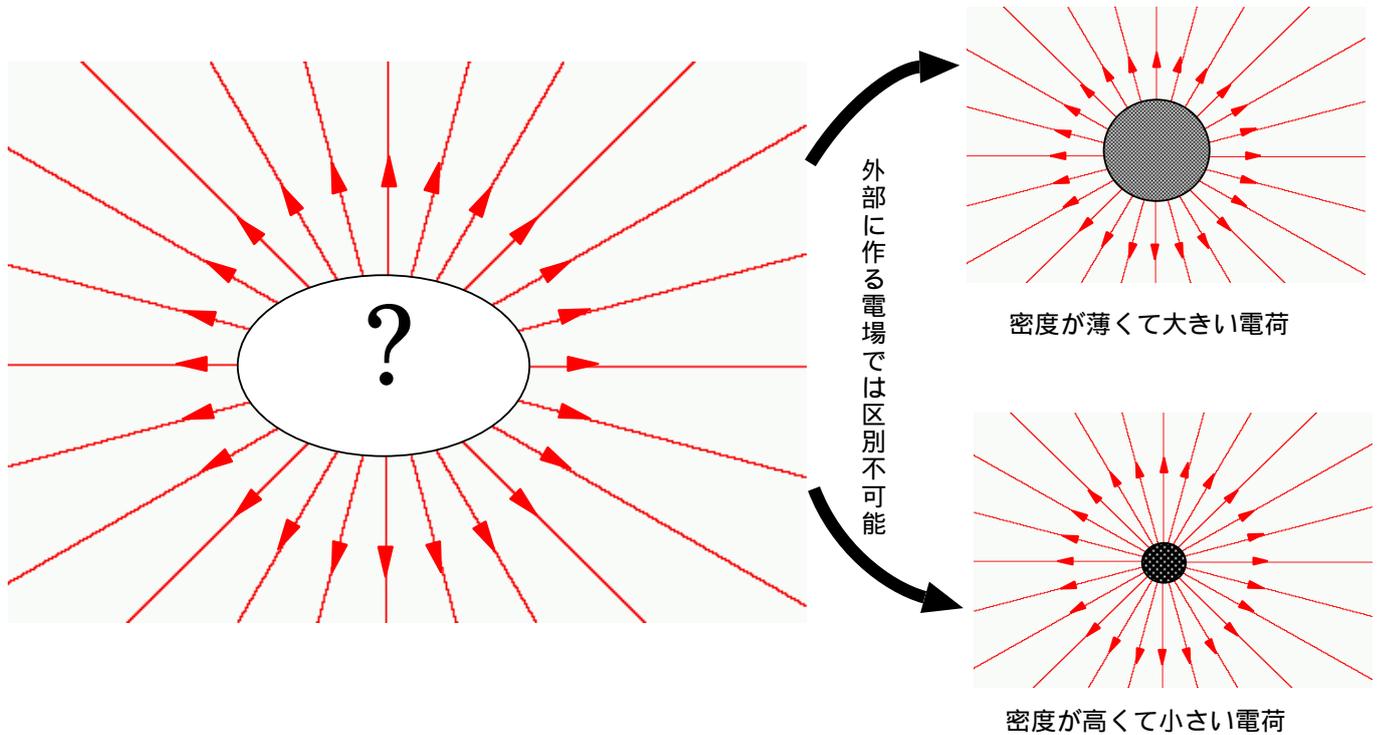
こうして得た最終結果も、もちろん他の手段で得たものに等しい。

以上、3つの方法で様な帯電球のまわりの電位を求めた。どの方法がいいかは時と場合によるので「これを使い」という万能の処方箋はない。

この結果において注目すべきことが一つある。それは、 $r > R$  を考えているかぎり、結果は点電荷  $Q$  が原点にある場合の電位  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  と区別がつかないということである。箱の中に球対称な電荷が入っていて、我々が箱の外でだけ電場や電位が測定できるとすると、その箱の中の電荷が一点に集中しているのか、それとも球状に広がっているのか、我々には判定できない。

**【補足】** この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでください。

この節で考えた様な帯電球は、いったん球の外部に出れば電位が距離と総電荷のみで決まり、その総電荷がどの範囲に存在しているかは関係なかった（もちろん、球対称に分布するという条件を満たしている場合のことである）。



点電荷とは、この球の半径が0になった極限であると考えられるので、点電荷の作る電位は、 $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  である。ただし、 $Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$  は全電気量。これを一定にしつつ  $R \rightarrow 0$  の極限を取ることになる（つまり、 $\rho$  は  $\frac{3\rho}{4\pi R^3}$  であり、 $R \rightarrow 0$  で発散する）。よって、

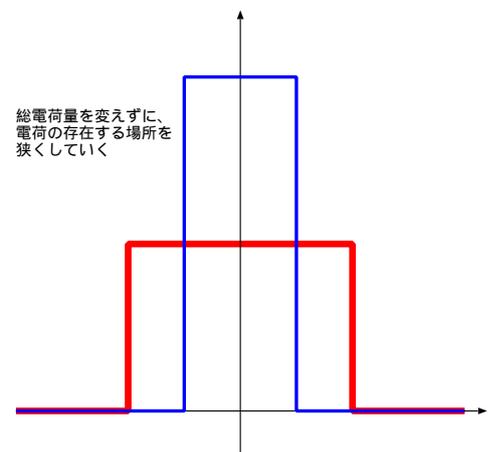
$$-\Delta \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \begin{cases} \infty & r=0 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (3.51)$$

ということになる。右辺は  $r \neq 0$  であって、 $r=0$  では発散する。そして、積分すると（もともと電荷密度  $\div \epsilon_0$  であって、全電荷は  $Q$  なので） $\frac{Q}{\epsilon_0}$  になる。

物理では「ほとんどの場所では0であるが、原点でのみ0でなく、しかも積分すると1になる関数」を「Diracの $\delta$ 関数」と呼び、 $\delta(\vec{x})$  と書く。今の場合は積分すると  $\frac{Q}{\epsilon_0}$  なので、

$$-\Delta \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\vec{x}) \quad (3.52)$$

と書いてもよい<sup>11</sup>。 $\delta$ 関数は電磁気のみならず、量子力学など物理のいろんなところでよく使う関数<sup>12</sup>なので、今覚えておいて損はない。

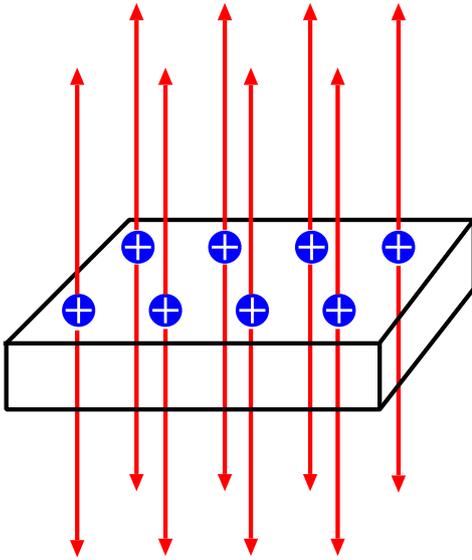


【補足終わり】

<sup>11</sup>これから公式  $\Delta \left( \frac{1}{4\pi r} \right) = -\delta(\vec{x})$  が示せたことになる。

<sup>12</sup>なお、正確に言うと  $\delta$ 関数は「関数」ではなく「超関数」と呼ばれるものの仲間である。

## 3.5.3 無限に広い板



$z = -d$  で表現される面と  $z = d$  で表現される面を表面として持つ厚さ  $2d$  の板内部に一様に電荷密度  $\rho_0$  で電荷が分布しているとしよう。この電荷は  $x = -\infty$  から  $x = \infty$  まで ( $y$  についても同様)、つまり宇宙の端から端までずっと同じように分布しているとしよう。

この場合、 $x, y$  に依存しない形のポテンシャルになることが対称性からわかる。「対称性からわかる」という言葉の意味は以下の通りである。

いまある場所のポテンシャルが  $x$  もしくは  $y$  に依存していたとしよう。そうだとすると、その方向には電場があることになる。しかし、今考えている状況は宇宙の端から端まで、均等に電荷が分布しているのだから、どんな方向の電場があったとしてもおかしい。

そこで方程式は、

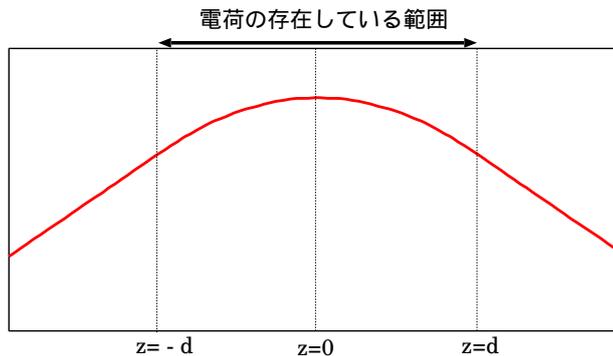
$$\frac{d^2}{dz^2} \phi(z) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(z) \quad (3.53)$$

という常微分方程式の形になる。電荷分布を

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 & -d < z < d \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (3.54)$$

とすると、領域  $-d < z < d$  でこの方程式の解は

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(z)}{dz} &= -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} z + C_1 \\ \phi(z) &= -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} z^2 + C_1 z + C_2 \end{aligned} \quad (3.55)$$



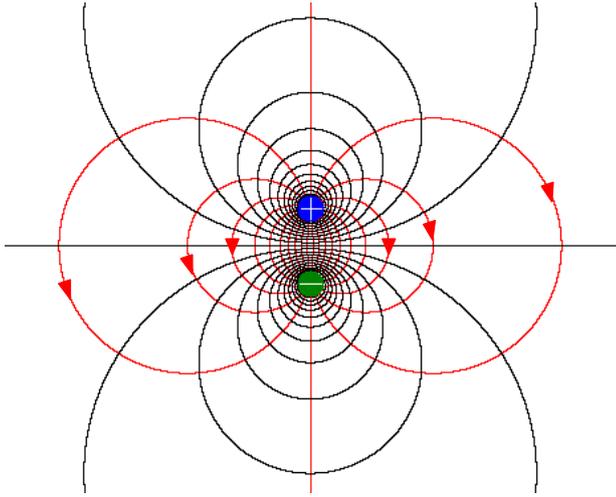
となる ( $C_1, C_2$  は積分定数)。  $z = 0$  の場所には (これまた対称性から) 電場はないと考えられるので、  $\frac{d\phi(0)}{dz} = 0$  から  $C_1$  は 0 である。電位の基準はどこに選んでもよいのだから、  $z = 0$  を基準にすることにすれば、  $C_2 = 0$  となる。

最終的な電位のグラフは左の図の通りである。イメージとしてはここでも、電荷があるところでは、電位が上に引っ張られると考えるとよい。板の部分を出ると電荷がなくなり (電位に対する引っ張りがなくなり)、電位の二階微分が 0 になるので、電位を表すグラフは直線となる。今は 1 次元的な問題を考えているので、ある方向で二階微分が正、別の方向では負という形でラプラス方程式を満たすことはできない。

電場はこのグラフの傾き  $\times (-1)$  であるから、中央で 0、  $z > 0$

では正方向、  $z < 0$  では負方向を向く。

## 3.5.4 電気双極子



実際の物質においては、正電荷、負電荷が単独で存在していることはあまりなく、原子核(+)に電子(-)がついているように、あるいは $\text{Na}^+$ イオンに $\text{Cl}^-$ イオンがついているように、トータルで電荷0になるような組み合わせになって物質を作っていることが多い。たとえば水分子は酸素原子の部分はマイナス電荷を持ち、水素原子の部分はプラス電荷を持つ<sup>13</sup>。このように非常に小さい一つの粒子にプラス電荷とマイナス電荷が含まれてその位置が一方向偏っているような状態を「電気双極子」と呼ぶ。もっとも単純な電気双極子としては、プラス電荷とマイナス電荷を一個ずつ貼り付けたようなものを思い浮かべるとよい。

電気双極子がどのような電場を作るかを考えるには、まず電気双極子のつくる電位を考えて、その微分を考えるのがよい。直交座標で考えて、 $(0, 0, d)$ に $+q$ の電荷が、 $(0, 0, -d)$ に $-q$ の電荷が存在しているとしよう。この時、この二つの作る電位はそ

れぞれによる電位の和で計算できるので、

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \quad (3.56)$$

である。

ここでは原子のような小さな物の話をしているので、以下で $d \rightarrow 0$ の極限で考えることにする。そのために、 $2qd$ 、すなわち(電荷の大きさ)×(電荷間の距離)を $p$ と書く<sup>14</sup>、これを一定値として、 $d \rightarrow 0$ の極限を取る。 $p$ は「電気双極子モーメント」と呼ばれる量である。 $p$ を使って上の式を書き直すと、

$$V(x, y, z) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{2d} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right) \quad (3.57)$$

となる。ここで $d \rightarrow 0$ の極限を取ると、

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{2d} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right) = -\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.58)$$

のように微分を使って表現できる。真ん中でマイナス符号がついているのは、ここでの引き算が $z-d$ での値から $z+d$ での値を引くという、普通の微分の場合の「 $x+\Delta x$ での値から $x$ での値を引く」という状況とは逆の引き算になっているからである。 $\Delta x$ に対応するのが $-2d$ なのだと考えればよい。

以上から電気双極子による電位は、

$$V(x, y, z) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.59)$$

となる。最後の表現では、 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ,  $z = r \cos \theta$ として極座標に直した。

双極子による電場は、これに $-\vec{\nabla}$ をかけて、

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \left( \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left( 3\vec{e}_x \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + 3\vec{e}_y \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + 3\vec{e}_z \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \vec{e}_z \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left( 3(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \vec{e}_z \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

<sup>13</sup>もともと中性だった酸素原子と水素原子が結合すると、電子が酸素側に偏る。原子核が電子を引きつける力の違いによりこういう事が起こる。

<sup>14</sup>分子が電気双極子になっている場合、電気双極子モーメントはだいたい、 $1.6 \times 10^{-16} \text{C} \times 10^{-10} \text{m}$ (原子サイズ)ぐらいになる。

となる。極座標で表すならば、 $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$  を使って、

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left( \vec{e}_r \frac{2 \cos \theta}{r^3} + \vec{e}_\theta \frac{\sin \theta}{r^3} \right) \quad (3.61)$$

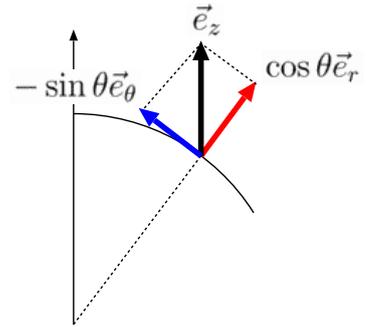
となる (言うまでもないが計算自体は極座標の方が簡単に終わる)。

この二つの式 (3.60) と (3.61) は違うように見えるかもしれないが、 $r\vec{e}_r = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$  と、 $\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$  を使って書き直すと同じになる。

ここまでは、電気双極子の電荷の配置を  $z$  軸に沿って、+ 電荷が  $+z$  側に移動し、- 電荷が  $-z$  側に移動していると考えたが、一般的な配置としては電気双極子モーメントはベクトル  $\vec{p}$  であると考え、その向きは - 電荷から + 電荷に向かう向きである。この場合、

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|^3}, \quad \vec{E} = 3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|^4} \vec{x} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|^3} \vec{p} \quad (3.62)$$

である。ここで微分は  $\vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{x}) = \vec{p}$ ,  $\vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{x}|^3} \right) = -3 \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^4}$  のように行った。



### 3.6 静電場の保つエネルギー

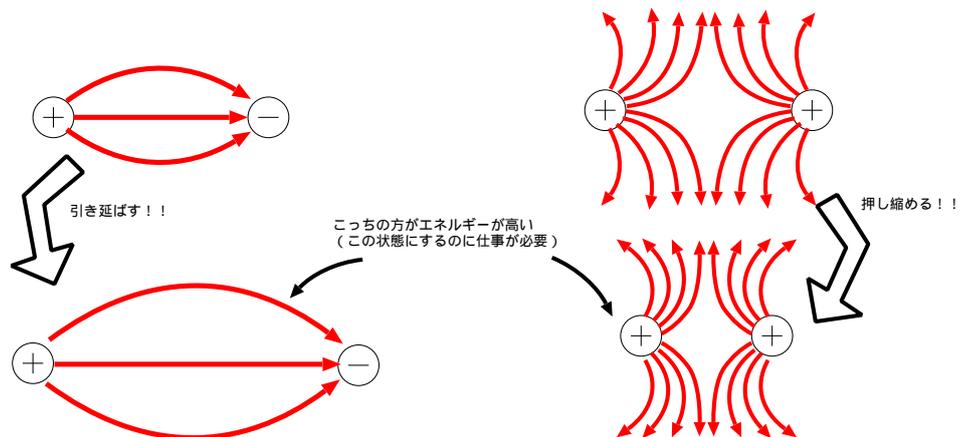
#### 3.6.1 位置エネルギーは誰のもの？

さて、3.4.1 で計算した 2 個の電荷の場合、 $U = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$  であったから、この式を「電荷  $Q$  が位置エネルギー  $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$  を持つ」と解釈すれば、「電荷  $Q$  がある場所の電位は  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 」ということになる。しかしこの式を、「電荷  $q$  が位置エネルギー  $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$  を持つ」と解釈すれば、「電荷  $q$  がある場所の電位は  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 」ということになる。これは考え方 (立場) の違いであって、どちらも正しい<sup>15</sup>。さらに言えば、「電荷  $Q$  は  $\frac{1}{2} \times \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$  のエネルギーを、電荷  $q$  も  $\frac{1}{2} \times \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$  のエネルギーを持ち、トータルでエネルギー  $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$  を持つ」という考え方も、間違いではない (後でこの立場を出発点にする)。

この 3 つの立場のいずれも正しいとはいえず、「では、エネルギーを持っているのはいったい誰なのか？」という疑問が湧くのは当然であろう。たとえば 2 個の物体がひっぱりあっている例として、バネにつながれた物体を考える。このバネが伸びているならばこの 2 物体は引き合う力を感じる。その力で仕事をすることができる。そのエネルギーは、バネの伸びが  $x$ 、バネ定数が  $k$  であれば  $\frac{1}{2} kx^2$  であるが、このエネルギーは誰が持っているかといえば、もちろんバネである。

電荷二つの場合、異符号で引きあっている場合にせよ、同符号で反発している場合にせよ、そこにバネのようなものはないように思える。しかし、やはりそこにあるものがエネルギーを蓄えていると考えなくてはいけないのである。そこにあるものとはもちろん「電場」である。ばね定数  $k$  のばねが  $x$  のびている時に (その時の状況に応じて)  $\frac{1}{2} kx^2$  のエネルギーを持つように、電場がある時にはその場所、その時の状況に応じてエネルギーを持っていることになる<sup>16</sup>。

先に答えを書いておくと、そのエネルギーの単位体積あたりの値は、ばねのエネルギーによく似た式  $\frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2$  となる。



<sup>15</sup> 「電荷  $Q$  も電荷  $q$  も  $U = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$  を持つので、全エネルギーはこの 2 倍」と考えるのは正しくない。これでは同じエネルギーを 2 回数えている (double-counting) ことになる。どちらかの立場を選ばねばならない。

<sup>16</sup> と、エネルギーを持っているのは電場である、ということを述べたが、これは上に書いた電荷がエネルギーを持っているという考えが間違いだと言っているのではない。電荷と電場というのは本来切り離せないものなのだから、エネルギーをどちらの所属とするかは、自由である。しかし、電場にしよういませた方がいろいろな点で都合がよいし、近接作用の考え方にのっとっている。

この式を導出する前に、電場の持つエネルギー（静電エネルギーと呼ばれる）がどのようなエネルギーなのか、イメージをつかんでおこう。

上に書いたバネの場合と同様、異符号でひっぱり合う時、その二つの電荷の間に何か「二つの電荷が近づくことでエネルギーが下がるもの」がなくてはならない。そのバネに対応するものとして、電気力線を考えよう。電気力線が伸ばされたゴムひものように、短くなろうとする性質（張力）を持っていたと考えれば、右の図のように「プラス電荷とマイナス電荷を引き離す」という操作は、「電気力線という仮想ゴムひもを引き延ばす」という操作なのだと思えることができる。つまり、このエネルギーを持っているのは「仮想ゴムひも」であるところの電気力線、または電場である。

プラス電荷どうし、マイナス電荷どうしの反発力はどのように説明できるだろうか。これは「平行する電気力線には反発力が働く」と考えると理解できる。このように反発力が働くということは、電気力線の密度が高くなると、電場の蓄えるエネルギーも大きくなる、ということである。

### 3.6.2 電場のエネルギー—電荷と電位による表現

3.4.1 節で2個の電荷（電気量  $q, Q$ ）が距離  $r$  だけ離れている時、この二つの電荷は  $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$  というエネルギーを持つということがわかったわけであるが、となると次に考えるべきは3つ、もしくはそれ以上の電荷があった時はどうなるかである。ここでも、重ね合わせの原理が計算を簡単にしてくれる。

今第3の電荷  $q'$  を無限遠からゆっくりと近づけて、 $Q$  からの距離が  $r_1$ 、 $q$  からの距離が  $r_2$  であるような場所まで持ってくるとする。この時、その「持ってくる」という動作をした人はどれだけ仕事をしなくてはならないかを考えると、その仕事は「電荷  $Q$  だけが合った場合にするべき仕事」と「電荷  $q$  だけが合った場合にするべき仕事」の和である。

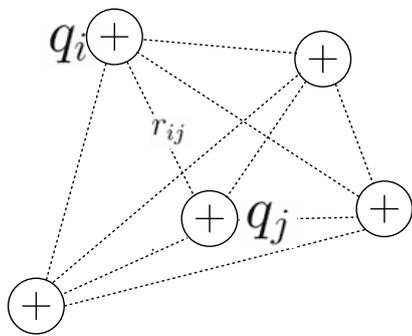
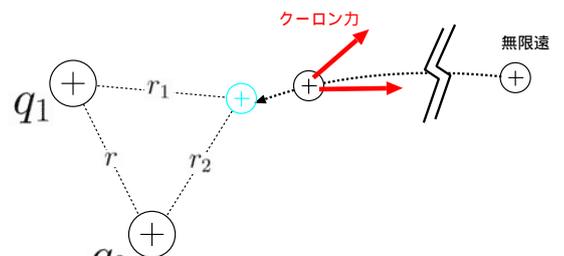
結果は

$$\frac{q_1 q'}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2 q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} \tag{3.63}$$

となる。これに最初からあったエネルギーである  $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$  を加えて、

$$\frac{q_1 q'}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2 q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{3.64}$$

が、この3つの電荷の系の持つエネルギーである。



数をどんどん増やしていこう。それぞれ  $q_1, q_2, \dots, q_N$  の電気量を持つ  $N$  個の電荷があり、 $q_i$  の電気量を持つ電荷と  $q_j$  の電気量を持つ電荷が  $r_{ij}$  だけ離れていたとするならば、結局この  $N$  個の電荷の集合体の持つ位置エネルギーは

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \tag{3.65}$$

ということになる。ここで、和記号から  $i = j$  が除かれていることに注意しよう。元々この位置エネルギーは電荷と電荷の相互関係で生まれているのだから、自分自身との間には位置エネルギーが発生するはずはない。だいたい、 $i = j$  にすれば  $r_{ii} = 0$  なので、分母が発散してしまう。 $\frac{1}{2}$  がついているのは、この和をどんどんやっていくと、同じ式が2回現れるからである。たとえば  $N = 3$  なら、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 \frac{q_1 q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{1j}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 \frac{q_2 q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{2j}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^3 \frac{q_3 q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{3j}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{21}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} + \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{31}} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{32}} \right) \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \end{aligned} \tag{3.66}$$

となる。 $\frac{1}{2}$  がついていて、ちょうど正しい答えとなる。

この式を、少し違う表現で書いてみよう。

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}}_{=V_i(\vec{x}_i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i(\vec{x}_i) \tag{3.67}$$

と書くことができる。 $V_i(\vec{x}_i)$  は、場所  $\vec{x}_i$  における電位であるが、ただし、 $q_i$  が作る電位は省いている。そのことを示すために  $\bar{i}$  という下付き添字をつけたわけである。もし  $q_i$  による電位を入れてしまったら、例によって  $\infty$  となる。

連続的に分布した電荷について考えると、微小体積  $dxdydz = d^3\vec{x}$  の中に電荷  $\rho d^3\vec{x}$  があるのだと考えて、その各微小体積によるエネルギーの和を考える。微小体積を 0 とする極限では和は積分に置き換わるので、

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i(\vec{x}_i) \rightarrow \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (3.68)$$

となる。これが静電場の持つエネルギーを、電荷密度  $\rho$  と電位  $V$  で表現した式である<sup>17</sup>。

### 3.6.3 電場の持つエネルギー—電場による表現

さて、我々は「電荷の位置エネルギーは電場が持っている」という予想のもと、ここまで電荷の位置エネルギーを書き直してきた。 $\frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) d^3\vec{x}$  という式は、いまだ電荷を使って表現している（つまり、エネルギーは電荷が持っている、という形の式になっている）。

ここで、電荷密度  $\rho$  は電場と関係あることを思い出そう。すなわち、 $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  である。これを使って書き直すと、エネルギーは

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int (\text{div} \vec{E}(\vec{x})) V(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (3.69)$$

という積分になる（電場と電位の式になったので、目標に一步近づいた）。

ここで、 $\text{div} \vec{E}$  という形で  $\vec{E}$  にかかっている微分を  $V$  の方におかぶせる（もちろん部分積分を使ってである）。 $x, y, z$  成分を使って書くと上の式は

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int \left( \frac{\partial}{\partial x} E_x(\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial y} E_y(\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial z} E_z(\vec{x}) \right) V(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (3.70)$$

で、これを各項ごとに部分積分すれば、

$$-\frac{\epsilon_0}{2} \int \left( E_x(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x} V(\vec{x}) + E_y(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial y} V(\vec{x}) + E_z(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial z} V(\vec{x}) \right) d^3\vec{x} \quad (3.71)$$

となる。いわゆる「表面項」、たとえば

$$\left[ \frac{\epsilon_0}{2} \int E_x(\vec{x}) V(\vec{x}) dydz \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} \quad (3.72)$$

は無限遠では  $V(\vec{x})$  や  $\vec{E}(\vec{x})$  が 0 になっているのだと考えて無視した。ここで、 $\vec{E} = -\nabla V$ （たとえばこのうち  $x$  成分を取り出すならば  $E_x = -\frac{\partial}{\partial x} V$ ）を使えば、

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int (E_x(\vec{x}) E_x(\vec{x}) + E_y(\vec{x}) E_y(\vec{x}) + E_z(\vec{x}) E_z(\vec{x})) d^3\vec{x} \quad (3.73)$$

となり、まとめると、

——— 真空中の静電場の持つエネルギー ———

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 d^3\vec{x} \quad (3.74)$$

となる<sup>18</sup>。これは電場のみで書かれた式になっている。これから、電場の持つエネルギー密度は  $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$  となる。数式の形としては、ばねのエネルギーの式  $\frac{1}{2} kx^2$  にも似ている。

<sup>17</sup>ここで  $\frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) d^3\vec{x}$  には「自分自身の作る電位は勘定に入れない」という計算に対応する「 $i = j$  を除く」のような注意書きがないことを不審に思う人がいるかもしれない。この場合の「自分自身」に対応するのは微小体積内の微小電荷  $\rho d^3\vec{x}$  である。微小電荷を取り除いても、取り除く前と電位の値はほとんど変わらないので、わざわざ断る必要がないのである。

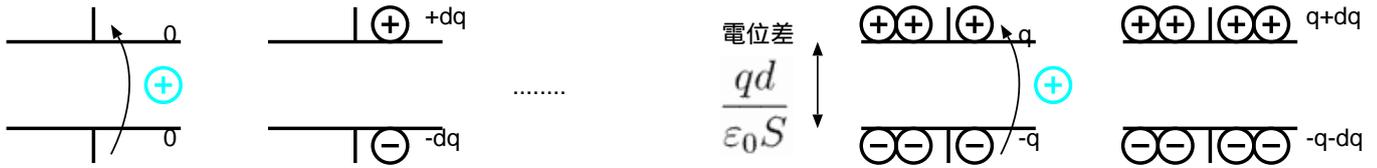
<sup>18</sup>慣れてきたら上の計算は、 $\int (\nabla \cdot \vec{E}) V = - \int \vec{E} \cdot \nabla V = \int \vec{E} \cdot \vec{E}$  といっしょにやりたいところである。

3.6.4 平行平板コンデンサの蓄えるエネルギー

静電気力の持つ位置エネルギーは  $\frac{1}{2}qV$  で表現されるということから、平行平板コンデンサの持つエネルギーを計算する。両極板に電荷  $Q$  と電荷  $-Q$  がためられているとする。極板の面積を  $S$  とすると極板間にできる電場の強さは  $\frac{Q}{\epsilon_0 S}$  となるというのはこれまで計算した通りであるから、極板間の電位差  $V$  は  $\frac{Qd}{\epsilon_0 S}$  となる（今電場は一定なので、電位差は電場×距離となる）。電位差  $V$  というのは、 $-Q$  がたまっている方の電位が  $V_0$  としたら、 $Q$  がたまっている方の電位が  $V_0 + V$  だということであり、この時に静電エネルギーは、

$$\frac{1}{2}Q(V + V_0) + \frac{1}{2}(-Q)V_0 = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 S} \tag{3.75}$$

となる。この  $\frac{1}{2}QV$  という式は、以下のように考えても導出できる。



電荷  $q$  を電位差  $V$  の間を運ぶと、 $qV$  だけ仕事をするようになる。今、コンデンサに電気  $q$  がたまっている時に、電気を  $q \rightarrow q + dq$  に増やすために必要な仕事を考えれば、それはもちろん  $dqV$  なのだが、今の場合  $V = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$  であるから、 $dq \frac{qd}{\epsilon_0 S}$  となり、この  $q$  を  $0$  から  $Q$  まで積分することで「コンデンサを充電するのに要した仕事」が計算できる。それは、

$$\int_0^Q dq \frac{qd}{\epsilon_0 S} = \frac{d}{\epsilon_0 S} \left[ \frac{q^2}{2} \right]_0^Q = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S} \tag{3.76}$$

である。これはもちろん上の式と一致する。

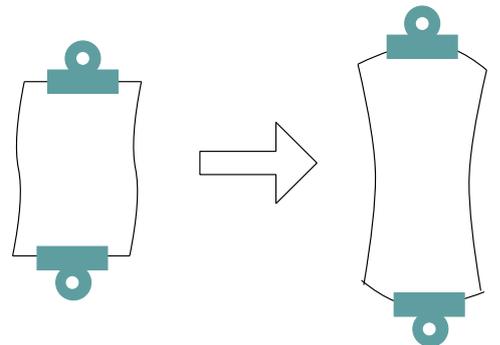
ここで、これをコンデンサの極板にはさまれた部分の体積  $Sd$  で割ると、コンデンサの持つエネルギーは単位体積あたり、

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{Q}{\epsilon_0 S} \right)^2 \tag{3.77}$$

となる。これはちょうど、 $\frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2$  に他ならない。

つまり、電荷に仕事をする事で溜め込んだエネルギーは「電場の持つエネルギー」としてコンデンサの極板間に溜められることになる。

電位をゴム膜に例えたアナロジーからすると、電荷をためることで+電荷のたまった部分は電位が高くなり（ゴム膜が上に引っ張られ）、-電荷のたまった部分は電位が低くなる（ゴム膜が下に引っ張られる）。結果としてコンデンサの内部では強い電場（ゴム膜の大きな傾斜）ができる。この引っ張られたゴム膜の弾性エネルギーに対応するものが電場のエネルギーである。ゴム膜の場合も、エネルギーはゴム膜を持ち上げたり下げたりする部分（極板）に局在するのではなく、広がって分布している。



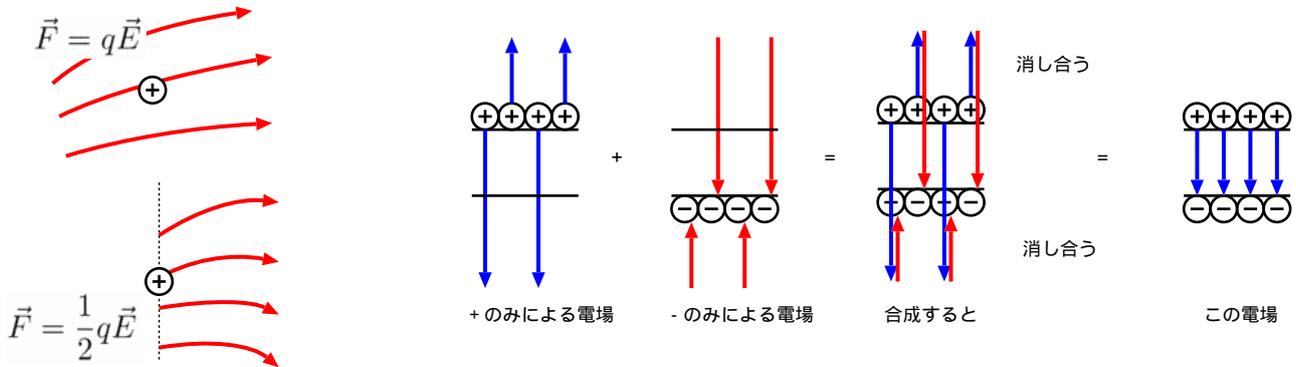
このエネルギーを「極板を引っ張り上げる仕事」として計算することもできる。コンデンサの極板間に大きさ  $E$  の電場ができている時、極板に働く引力は  $\frac{1}{2}QE$  である。まず極板間の距離が  $0$  になっていると仮定する。この時のコンデンサのエネルギーは  $0$  である（プラスマイナスの電荷が重なって存在しているというのは、何も無いのと同じ）。この引力に逆らって距離  $d$  だけ極板を引きはがすと考えると、仕事は  $\frac{1}{2}QEd = \frac{1}{2}QV$  となる。

— 極板に働く力が  $QE$  でない理由 —

電場の定義である  $\vec{F} = q\vec{E}$  からすると、なぜこの極板間の引力に  $\frac{1}{2}$  がつくのか、不思議に思う人もいるかもしれないが、これにはいろいろな説明ができる。

まず、 $\vec{F} = q\vec{E}$  という式は、電場の中にどっぴりと電荷が浸かっている場合の式であるが、コンデンサの場合、電荷の内側にしか電場はない。これが半分になる理由である。

もう一つの説明としては、極板間の電場  $E$  というのは実は、プラス電荷の作った  $\frac{1}{2}E$  とマイナス電荷の作った  $\frac{1}{2}E$  の和である。プラス電荷はマイナス電荷の作った電場だけを感じるのである。



### 3.7 電場の応力

電気力線には「短くなるとうとする」「混雑を嫌う」という性質があることを何度か話してきた。この二つの性質は、どちらも、「電場のエネルギー  $U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 d^3x$  を小さくしようとする」という統一した見方で考えることができる。

#### 3.7.1 電気力線は短くなるとうとする 電場の張力

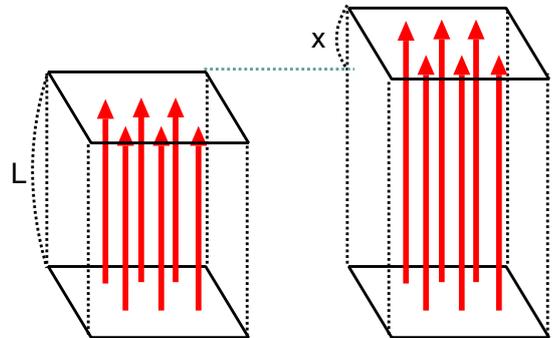
図のように電気力線が（密度を変えずに）短くなるとうところを想像する。こうなることで電気力線の存在する場所の体積が小さくなる。電気力線の密度は変わらないから、電場  $\vec{E}$  は変わらないが、体積が減れば積分  $U$  の値は小さくなる。つまり「電気力線が短くなるとうとする」ということは「電場の存在する空間を狭くしようとする」ということに他ならない。ここで今仮想的に考えたチューブの底面積を  $S$  とし、長さを  $L$  とすると、このチューブ内の電場の持つ静電エネルギーは  $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 SL$  である。  $L \rightarrow L+x$  と増えることによるエネルギーの増加は

$$\Delta U = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 Sx \tag{3.78}$$

となるから、

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 S \tag{3.79}$$

である。単位面積あたり  $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$  の力で張力が発生していることがわかる。この力の式に - 符号がつくのは「 $x$  が増える方向の反対」を意味する。つまり引っ張る力である。



### 3.7.2 電気力線は混雑を避ける 電場の圧力

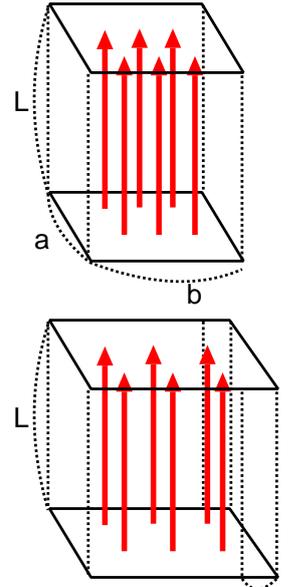
今度はこの仮想的チューブが長さを変えずに面積を増大させたとする。簡単のためチューブの底面を縦  $a$ 、横  $b$  の長方形として、横を  $y$  だけ増やしてみよう。この時、電気力線の本数が変わらずに面積が増えるので、電場（単位面積あたりの電気力線）が減ることになる。そこで今度は  $\vec{E}S$  が定数になると考える。すると、 $U = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}S|^2 \frac{L}{S}$  となる。これを（ $\vec{E}S$  はこの組み合わせで定数なので微分せずに！） $S$  が  $\Delta S$  だけ変化するとすると、

$$\Delta U = -\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}S|^2 \frac{L}{S^2} \Delta S = -\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 L \Delta S \tag{3.80}$$

という結果が出る。今の場合、 $\Delta S = ay$  であるからこれを代入して両辺を  $y$  で割れば、

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 La \tag{3.81}$$

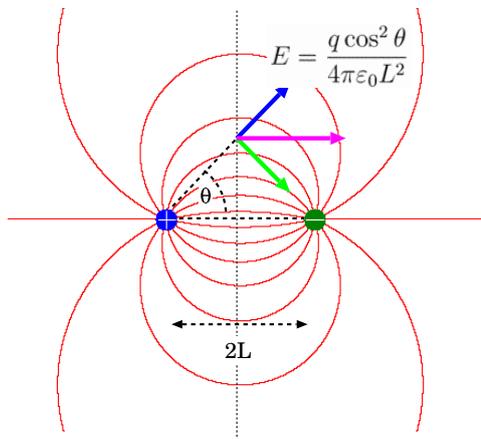
が出る。これは側面にかかる力であるから、単位面積あたりにするには  $La$  で割ればよい。つまり、電気力線が広がろうとする圧力が  $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$  だけ働いていることがわかる。



### 3.7.3 応力から考える静電気力

張力・圧力などの力が面に働く時、まとめて「応力 (stress)」と呼ぶ。今、ある微小面積  $d\vec{S}$  がある時、その面にどんな力が働くことになるかを式で表そう。もし、 $d\vec{S}$  と  $\vec{E}$  が平行ならば、この面には  $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 d\vec{S}$  の力が働く。一方、 $d\vec{S}$  と  $\vec{E}$  が垂直ならば、 $-\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 d\vec{S}$  の力が働く（水平でも垂直でもない場合についてはこの節の最後を見よ）。

実際にこれがクーロン力を表現していることを確認しておく。次の図は二つの電荷（電気量は  $q$  と  $-q$ ）が距離  $2L$  離れている状態を描いたものである。



二つの電荷のちょうど中間にあたる位置に面（図の点線）を考えて、その面に働く張力を考える。図に書き込んだように、二つの電荷を結ぶ直線から角度  $\theta$  だけ離れた面を考えると、その場所に一方の電荷が作る電場は  $\frac{q \cos^2 \theta}{4\pi\epsilon_0 L^2}$  となる（電荷からこの点までの距離が  $\frac{L}{\cos \theta}$  となることに注意。合成電場は二つの電荷の作る電場をベクトル的に足すことで得られるから、

$$2 \times \frac{q \cos^2 \theta}{4\pi\epsilon_0 L^2} \times \cos \theta = \frac{q \cos^3 \theta}{2\pi\epsilon_0 L^2} \tag{3.82}$$

となる。これを自乗して  $\frac{1}{2} \epsilon_0$  をかけたもの

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{q \cos^3 \theta}{2\pi\epsilon_0 L^2} \right)^2 = \frac{q^2 \cos^6 \theta}{8\pi^2 \epsilon_0 L^4} \tag{3.83}$$

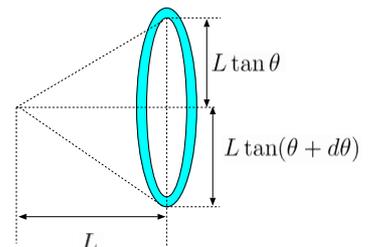
が電場の（単位面積あたりの）張力である。

これに面積をかけて積分することで、今考えた面全体に働く張力を求めよう。角度が  $\theta$  から  $\theta + d\theta$  までの範囲を考えると、その範囲に入っている微小面積は

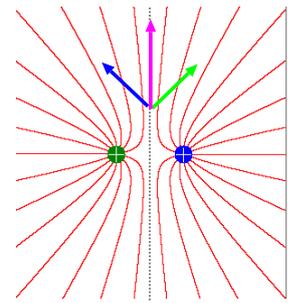
$$\pi (L \tan(\theta + d\theta))^2 - \pi (L \tan \theta)^2 = 2\pi L^2 \tan \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \tag{3.84}$$

となる（図参照）。先に計算した電場に面積をかけてこの面全体で積分する（つまり、 $\theta = 0$  から  $\theta = \frac{\pi}{2}$  まで積分する）と、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q^2 \cos^6 \theta}{8\pi^2 \epsilon_0 L^4} \times 2\pi L^2 \tan \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q^2 \cos^3 \theta}{4\pi\epsilon_0 L^2} \times \sin \theta d\theta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} \left[ -\frac{\cos^4 \theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 L^2} \tag{3.85}$$



これは、距離  $2L$  離れた電気量  $q$  と  $-q$  の電荷に働くクーロン引力  $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2L)^2}$  そのものである。



なお、+ 電荷どうしの斥力も同様の計算で求めることができる。この場合は電場の圧力を積分すればよい。

以上のように、空間の各点各点に分布している電場が、そのとなりの電場との間に張力や圧力を及ぼすということが静電気現象で起こる力全ての源泉であるというふうに考えられることになる。近接作用論をとらえた時、ファラデーは目に見えない「電場」や「電気力線」の力の及ぼし合いが本質であることを見抜いていたのである。

電場はもちろん「物質」とは違うが、このように押し合い引き合いしながら力を伝えたりエネルギーをたくわえるすることができる。この意味では、立派な物理的実体のある存在なのである。

以上で出てきた応力を、後で出てくる、磁場による応力とまとめて、「マックスウェル応力」と呼ぶ。

【補足】この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

### 3.7.4 応力テンソル

この微小面積に働く力  $d\vec{F}$  は

$$d\vec{F} = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{E} \cdot d\vec{S}) - \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 d\vec{S} \quad (3.86)$$

とまとめることができる。この式は、 $\vec{E}$  と  $d\vec{S}$  が平行な時は  $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 d\vec{S}$  となり、 $\vec{E}$  と  $d\vec{S}$  が垂直な時は  $-\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 d\vec{S}$  となる。つまり電気力線と平行な方向には張力、垂直な方向には圧力が働く式になっているわけである。

この式を成分で書くと、

$$\begin{aligned} dF_x &= \epsilon_0 E_x (E_x dS_x + E_y dS_y + E_z dS_z) - \frac{\epsilon_0}{2} ((E_x)^2 + (E_y)^2 + (E_z)^2) dS_x \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} ((E_x)^2 - (E_y)^2 - (E_z)^2) dS_x + \epsilon_0 E_x E_y dS_y + \epsilon_0 E_x E_z dS_z \\ dF_y &= \epsilon_0 E_y (E_x dS_x + E_y dS_y + E_z dS_z) - \frac{\epsilon_0}{2} ((E_x)^2 + (E_y)^2 + (E_z)^2) dS_y \\ &= \epsilon_0 E_y E_x dS_x + \frac{\epsilon_0}{2} (-(E_x)^2 + (E_y)^2 - (E_z)^2) dS_y + \epsilon_0 E_y E_z dS_z \\ dF_z &= \epsilon_0 E_z (E_x dS_x + E_y dS_y + E_z dS_z) - \frac{\epsilon_0}{2} ((E_x)^2 + (E_y)^2 + (E_z)^2) dS_z \\ &= \epsilon_0 E_z E_x dS_x + \epsilon_0 E_z E_y dS_y + \frac{\epsilon_0}{2} (-(E_x)^2 - (E_y)^2 + (E_z)^2) dS_z \end{aligned} \quad (3.87)$$

となり、行列を使ってまとめると、

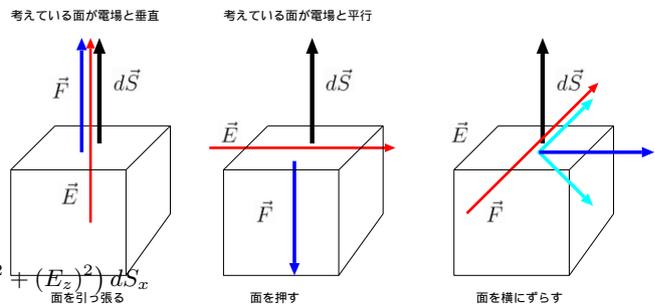
$$\begin{pmatrix} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

となる。ただし、 $\mathbf{T}$  は

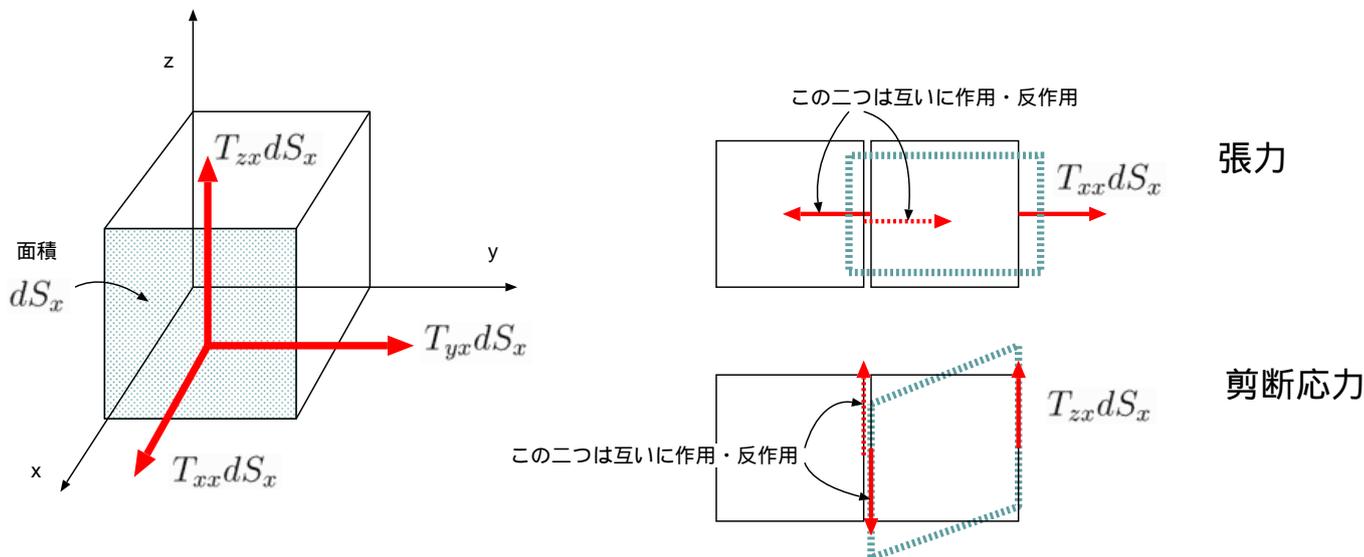
$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \\ &= \epsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_x)^2 - \frac{1}{2}(E_y)^2 - \frac{1}{2}(E_z)^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_x E_y & -\frac{1}{2}(E_x)^2 + \frac{1}{2}(E_y)^2 - \frac{1}{2}(E_z)^2 & E_z E_y \\ E_x E_z & E_y E_z & -\frac{1}{2}(E_x)^2 - \frac{1}{2}(E_y)^2 + \frac{1}{2}(E_z)^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.89)$$

である。この  $3 \times 3$  行列の各成分  $T_{ij}$  ( $i, j$  は  $x, y, z$  のどれか) を「応力テンソル」<sup>19</sup> と呼ぶ。「テンソル」とは上の行列のように、「 $x$  成分、 $y$  成分、 $z$  成分」を意味する添字  $x, y, z$  を持つ量のことである。

応力テンソルの一個一個の成分の意味は以下の通りである。



<sup>19</sup> 「テンソル」はもともと「張力 (tension)」が語源。



$T_{xx}$  は  $x$  方向に垂直な平面 (面積  $dS_x$ ) にかかる  $x$  方向の力 (ただし、単位面積あたり) を意味する。これは (右にある横から見た図でわかるように) 今考えている物体を引き延ばす「張力」である。一方  $T_{zx}$  は同じ面にかかる  $z$  方向の力 (やはり単位面積あたり) を意味する。これは物体をずらすように変形させる力 (剪断応力と呼ぶ) となる。 $T_{ij}$  の対角成分  $T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}$  は張力を表し、非対角成分は剪断応力を表す。たいていの場合、 $\mathbf{T}$  は対称行列である ( $T_{ij} = T_{ji}$ )。

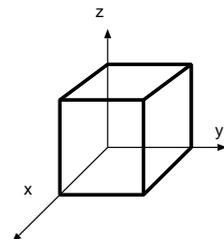
【補足終わり】

### 3.8 章末演習問題

【演習問題 3-1】

3次元空間に  $V = kx^2$  で表される電位があったとする。

- (a) 電場を求めよ。
- (b) 図のような一辺  $a$  の立方体の中には、どれだけの電荷が入っているか 2通りの計算方法で計算せよ。



【演習問題 3-2】 以下のような静電場は存在できるか?—存在できない場合はその理由を記せ。存在できる場合はその電位と、電荷分布を求めよ。

- (a)  $E_x = kx, E_y = ky, E_z = 0$
- (b)  $E_x = ky, E_y = kx, E_z = 0$
- (c)  $E_x = -ky, E_y = kx, E_z = 0$
- (d)  $E_x = k(x^2 + y^2), E_y = 2kxy, E_z = 0$

【演習問題 3-3】 演習問題 2-3 を、電位を使って解き直す。

円筒座標の場合のラプラシアン

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を使って、ポアソン方程式  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  を解くと電位が求められる。電荷密度は  $r_1 < r < r_2$  で  $\rho$ 、それ以外の場所では 0 である。境界条件は、 $r = 0$  で  $V = 0$  とせよ。

電位から  $\vec{E} = -\text{grad}V$  を使って電場を求めると、演習問題 2-3 の答と一致することを確認せよ。

【演習問題 3-4】 「電荷のない空間では、電位が極大値もしくは極小値になることはない」という法則がある。この法則が成立しなかったと仮定すると (すなわち、電荷のない空間に電位の極大値もしくは極小値があったと仮定すると)、ガウスの法則が成立しないことを説明せよ。

【演習問題 3-5】 厚みの無視できる半径  $R$  と半径  $r (R > r)$  の球殻を、中心を揃えて配置し、外側に電荷  $Q$ 、内側に電荷  $-Q$  を与えた。電荷は球殻上で球対称に分布したとして、

(a) 電場と電位はどのようになるか？—電位の基準は好きに選んでよい（注：この場合、薄い球殻の中に電荷が集中して存在するため、電場はなめらかにつながらない。）

(b) この系が蓄えている静電エネルギーはいくらになるか？—電荷と電位で表現する式  $\frac{1}{2}qV$  から求めよ。

(c) この系が蓄えている静電エネルギーはいくらになるか？—エネルギー密度の式  $\frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2$  から求めよ。

【演習問題 3-6】 電気双極子の作る電位  $V(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  が（原点を除き）ラプラス方程式の解であることを確認せよ。

また、この電気双極子を 90 度回転して、双極子モーメントのベクトルが  $x$  方向を向くようにしたとすると、電位  $V(r, \theta, \phi)$  はどうなるか（この時の電位は  $\phi$  の関数でもあることに注意）を求めよ。さらに、この式もまた原点を除いてラプラス方程式の解となることを確認せよ。

【演習問題 3-7】 3.7.3 節の計算を参考にして、二つの正電荷（ともに電気量  $q$ ）が  $2L$  離れている時に二つの電荷の間に働く力は  $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2L)^2}$  の斥力であることをマックスウェル応力から計算せよ。

【演習問題 3-8】 今、二つの点電荷（電気量は  $q$  と  $q'$ ）があるとする。 $q$  の作る電場を  $\vec{E}$ 、 $q'$  の作る電場を  $\vec{E}'$  とすれば、

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}_q|^3} (\vec{x} - \vec{x}_q)$$

$$\vec{E}'(\vec{x}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}_{q'}|^3} (\vec{x} - \vec{x}_{q'})$$

である（ $\vec{x}_q, \vec{x}_{q'}$  は電荷  $q, q'$  のいる位置）が、実際にできる電場はもちろん、この二つの重ね合わせである  $\vec{E} + \vec{E}'$  となる。この電場の持つエネルギーは

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 (\vec{E} + \vec{E}') \cdot (\vec{E} + \vec{E}') = \frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}'|^2 + \epsilon_0\vec{E} \cdot \vec{E}'$$

となる。このうち  $\frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2$  は「電荷  $q$  だけが存在した場合の電場のエネルギー」であり、 $\frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}'|^2$  は「電荷  $q'$  だけが存在した場合の電場のエネルギー」であるから、残った  $\epsilon_0\vec{E} \cdot \vec{E}'$  は「両方の電荷が存在して始めて生まれるエネルギー」であり、つまりはこれこそが「二つの電荷の相互作用によって生まれるエネルギー」であると考えられる。

適当な座標系を考えて  $\epsilon_0\vec{E} \cdot \vec{E}'$  を全空間で積分し、結果が  $\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}_q - \vec{x}_{q'}|}$  となること（つまり、これが静電気力の位置エネルギーそのものであること）を確認せよ。

(hint: 一方を原点に置き、もう片一方を  $z$  軸上に置く、あるいは二つを  $(L, 0, 0)$  と  $(-L, 0, 0)$  に置くなど、自分が計算しやすい配置で考えるとよい。)



## 第4章 導体と誘電体

ここまでは、真空中（せいぜい、電荷が存在する程度）の静電場を扱った。水中、空気中、あるいは木や金属などの固体の中など、物質がある場合には静電場はどのように変わるだろうか。

### 4.1 導体と電場・電位

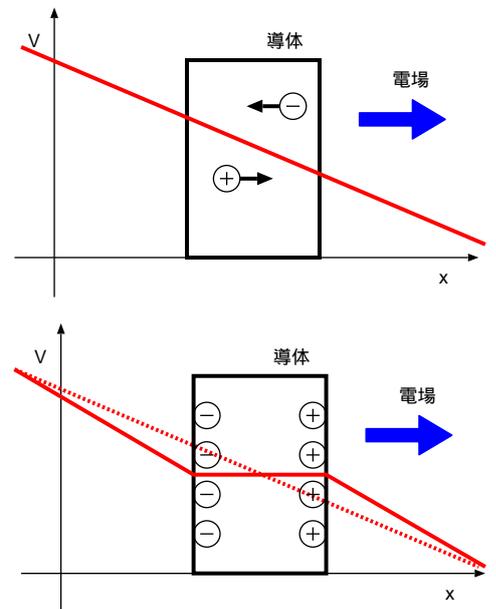
導体とは、内部に電荷が存在し、その電荷が自由に移動できるような物質である。例えば金属では、電子の一部が「自由電子」となって金属内を移動することができる。このような状況では静電場はようになるだろうか？

金属の場合で考えよう。自由電子は（マイナスの電荷を持つから）電場と逆向きに力を受け、その方向に動き出すであろう。そして、電位の高いところに集まる。もし自由に動けるプラス電気があれば、それらは電位の低い方向に集まるだろう。

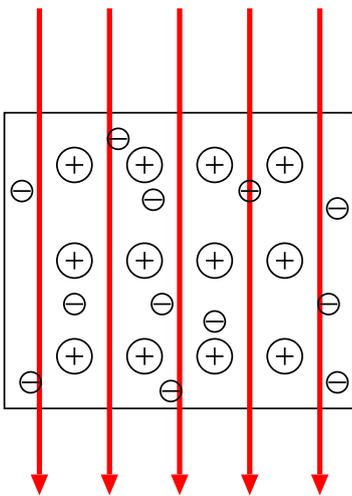
プラス電気が集まるとその場所の電位は高くなるし、マイナス電気が集まればその場所の電位は低くなる。つまり、この電荷の移動は「電位の平均化」を引き起こす。そして、導体内部では電位が平坦に近づく。

最終的にどうなったら電荷の移動が止まるかという、結局は電場が0、すなわち電位が一定値になってしまうと、電荷はもう動かない。我々が今扱っているのは静電場なので、この「電荷がもう動かない」状態になってしまった後のみを考えることにする。すると、金属などの自由に電荷が移動できる導体中では、電場は0すなわち電位一定となることがわかる。

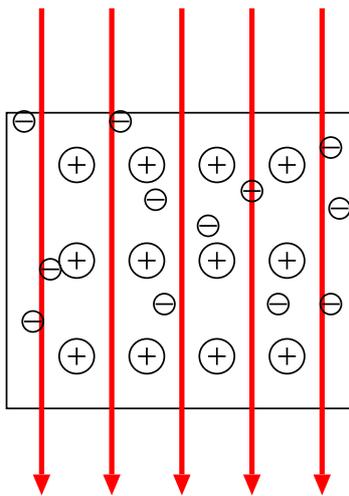
電荷の動きを模式化して表したのが下の図である。



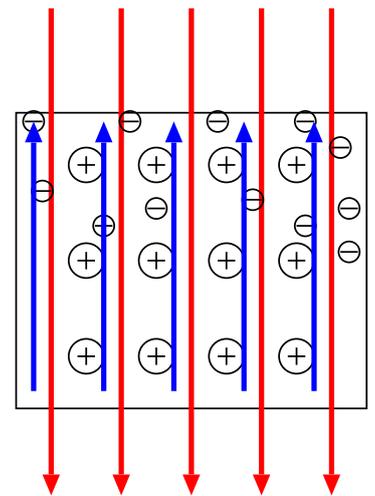
電場をかけると、



電子が移動して、



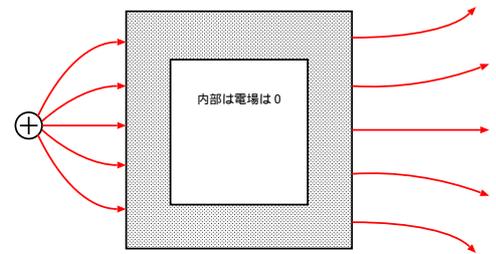
移動した電荷によって作られた電場は外部からの電場を打ち消す



電場がかかることによって、導体内の電荷が移動し、上の方にプラス電荷、下の方にマイナス電荷が整列する。この結果導体内には外部からかけられた電場の他に、この整列した電荷による電場ができることになる。この二つの電場が重ね合わされて導体内の電場が消える（正確に言えば、導体内の電場が0になる状態になるまで電荷が移動する）。こうして導体内では電場が消えるのである。この現象は「静電遮蔽」と呼ばれる。

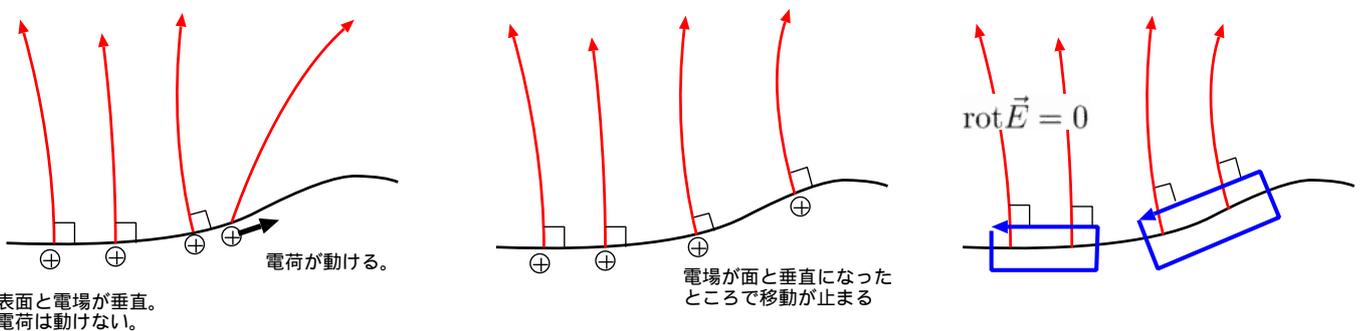
上の図では導体がびっしりつまっている場合を考えたが、実は電荷が自由に移動することさえできれば、間の部分の導体がなくても同じようにして電場は消えてしまう。導体内にできた空洞では電場は0になる。

電場がないところでは電位は変化しないから、導体表面、導体内部、そして導体内部の空洞は全て等電位となる。



#### 4.1.1 導体表面の電場

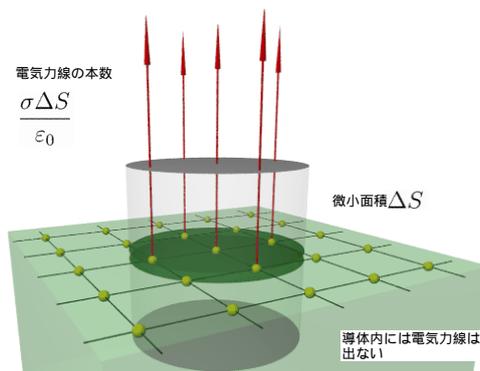
導体内部には電場はなくなるということは、導体内に電荷が存在するとしたら導体表面しかあり得ず、しかも電気力線は導体外に向けてしか出ることにはできない。



さらにもう一つ電場には、導体表面に垂直でなくてはならないという条件がつく。もし垂直でなかったら、その水平成分の分だけ、表面電荷を横に動かそうとする力が働いてしまう。それでは平衡状態にならない。したがってその状態では電荷の移動が起こり、最終的には必ず電場は面に垂直となる<sup>1</sup>。

電場の面に平行な成分が0になることは、静電場の場合の式  $\text{rot} \vec{E} = 0$  からわかる。 $\text{rot} \vec{E} = 0$  ということは微小な面積を回るように試験電荷を動かした時、電場のする仕事が0だということである。

その微小面積を図のように導体表面の外側をなぞるように取る。導体の内側では電場は0だから、導体内部ではどんな経路を取るかに関係なく、電場は仕事をしない。導体外側には電場が存在するが、この電場が仕事をしなすまわらないようにするためには、電場は表面に垂直でなくてはならない。

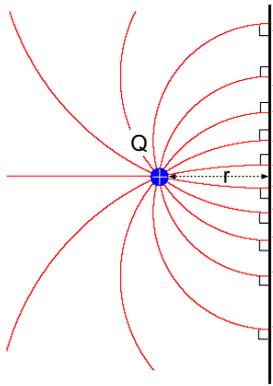


では、この電場の強さはどれだけになるか。これはガウスの法則から計算できる。導体表面上の微小な面積  $\Delta S$  を含むように微小体積を取る。もし表面における電荷の面積密度が  $\sigma$  であるとすれば、この微小体積内には  $\rho \Delta S$  の電荷がいる。この電荷は  $\frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$  の電気力線を出し、その電気力線は外にだけ抜けるから、 $\Delta S$  という面積を通り抜ける。ゆえに電場の強さは  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  である。面の法線ベクトルを  $\vec{n}$  とすると、 $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$  と書くことができる。前に考えた無限に広い板の場合には電場がこの  $\frac{1}{2}$  になっていたが、それは電気力線が上下両方に分配されていたからである。導体表面の場合、内側（図の下側）には電気力線が出ないので、電場の強さは2倍になる。

<sup>1</sup>なお、電場が十分強いと、電荷は導体の外に出る。これが放電という現象で、雷もその一例である。

## 4.2 導体付近の電場

### 4.2.1 点電荷と平板導体



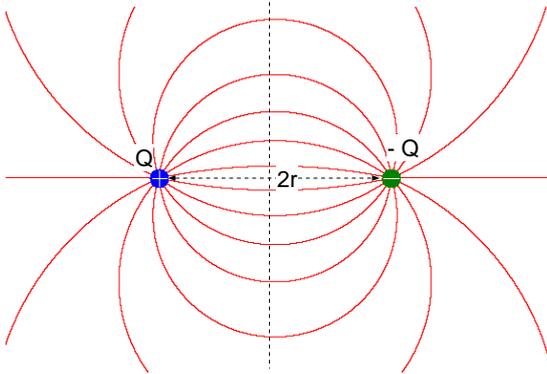
点電荷  $Q$  が無限に広い平板導体から距離  $r$  の場所に置かれたとしよう。すると平板上には負電荷が現れる。負電荷が現れることによって  $Q$  から発した電気力線が導体内に進入することを防ぐわけである。現れる負電荷はトータルで  $-Q$  である（これで電気力線が全部吸い取れることになる）。平板導体の持つ電荷のトータルが  $0$  なのであれば、その分だけ無限遠に電荷  $Q$  が現れていることになる。

さてこの電荷がどのように配置されることになり、結果としてどのような電場ができるのかを考えてみよう。条件としては、この面の上では電場が面に垂直な方向（図で言えばまっすぐ右）を向いていなくてはならない。点電荷  $Q$  の作る電場は面に平行な成分を持っているから、平板導体の表面に配置された負電荷のつくる電場が、ちょうどこの面に平行な成分を打ち消すことになるように電荷を配置すればよいことになる。

あるいは電位を使って表現するならば、導体表面が等電位になるようにする。無限遠の電位を  $0$  とするという境界条件で考えると、導体表面は無限遠まで続いているのだから、導体表面も電位は  $0$  である。つまり、無限遠と  $x = 0$  で  $V = 0$  という境界条件でラプラス方程式  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  を解けばよい（電荷は導体表面にのみ存在するから、 $\rho$  は  $x = 0$  面上でのみ、 $0$  でない値を持つ）。

しかし、これを計算で求めるのは少々ややこしい。

そこで、楽をして求める方法としては、「鏡像法」（または「電気映像法」）という方法がある。



この電気力線の様子が、 $+Q, -Q$  の  $2r$  離れて存在している時の電気力線の様子を思い浮かべる（左の図）。この図の半分を取り出すと求めたい状態とぴったり同じであることがわかるのである。

鏡像法と呼ぶ理由は明らかであろう。まるで平板導体が鏡であるかのごとく考えて、正電気のちょうど反対側に負電荷の鏡像が現れると考えれば、まさにこの形なのである。

ここまでわかれば、後は電位を使って計算するのが簡単である。図の横方向に  $x$  軸を取ることにして、正電荷がいる場所を  $(-r, 0, 0)$ 、負電荷のいる場所を  $(r, 0, 0)$  とすると、鏡像負電荷があると考えると場所  $(x, y, z)$  における電位は

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x+r)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-r)^2 + y^2 + z^2}} \right) \quad (4.1)$$

となる。実際にできる電位の場合、負電荷は存在しないかわり、 $x > 0$  の領域は導体内部なので等電位であり、

$$V(x, y, z) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x+r)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-r)^2 + y^2 + z^2}} \right) & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

となる。電場をこれに  $-\vec{\nabla}$  をかければ得られる。

**【補足】** この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでください。

ここで、無限遠と  $x = 0$  で  $V = 0$  になるという境界条件で電位を求めたわけであるが、さてこの解は唯一のものであるか（別解があったりはしないか？）という疑問が湧くかもしれない。そこで、境界条件を満たすポアソン方程式  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  の解は唯一性が保証されなくてはならない<sup>2</sup>。そこを調べよう。 $\Delta V_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \Delta V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  と二つの解が見つかったとして矛盾を示す。この二つの式が両立したとすると、

$$\Delta (V_1 - V_2) = 0 \quad (4.3)$$

という式になることからわかる。この式は  $V_1 - V_2$  というポテンシャルに対するラプラス方程式のようなものである。適切な境界条件でこの方程式を解いたとする。たとえば上の場合、 $V_1$  も  $V_2$  も「無限遠と導体表面上 ( $x = 0$ ) で電位は  $0$ 」という境界条件になってい

<sup>2</sup>今解いているのは微分方程式なので、境界条件を指定しなければ解は無数にある。

る。この方程式はラプラス方程式 (= 真空中のポアソン方程式) であるから、どこにも極大値も極小値もない。どこにも極大も極小もないのに境界で0になるということは全て0しかあり得ないので、 $V_1 = V_2$ 。つまり、二つの解が見つかることはあり得ない。

【補足終わり】

最後に平板上に現れる電荷を求めておこう。まず電場の  $x$  方向成分を計算しておく、

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x} V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x+r}{((x+r)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x-r}{((x-r)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (4.4)$$

平板の表面  $x=0$  では、電場は  $x$  方向を向いている。 $x=0$  を代入すると、 $E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2r}{(r^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$  である。导体表面では電荷の面積密度を  $\sigma$  とした時、 $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$  が成立していたので、この表面での電荷密度は

$$\sigma = -\frac{Q}{2\pi} \times \frac{r}{(r^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.5)$$

となる。マイナス符号がつくのは、今の場合電場は面の法線ベクトル  $\vec{n}$  と逆を向いているからである。

なお、この  $\sigma$  を全导体表面で積分 ( $\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz$ ) するとちゃんと  $-Q$  になる<sup>3</sup>。

#### 4.2.2 平行電場内に置かれた导体球

$z$  軸正の方向に強さ  $E$  の電場があるような場所に、半径  $R$  の导体球を置いてみる。この球は上半球に正電荷が、下半球に負電荷が現れて、导体内部の電場を0にする。この時の電荷分布と電場について考えてみよう。

この時も同様に、「誘導された電荷による電位を別のもの置き換える」という方法で考えよう。具体的には、球面  $r=R$  の上で電位が定数になるようにすればよい。外部から与えられた電場の電位は  $V_{\text{外}} = -Ez = -Er \cos \theta$  である。球面上では  $r=R$  なので、 $V_{\text{外}}|_{r=R} = -ER \cos \theta$  である。よって、 $r=R$  において  $V_{\text{球}} = ER \cos \theta$  になるようなもう一つの真空での電位の式を持ってきて足せばよい。これは電気双極子の作る電位  $V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  において、 $p = 4\pi\epsilon_0 ER^3$  とすればちょうどよい。故に

$$V = V_{\text{外}} + V_{\text{内}} = -Er \cos \theta + \frac{ER^3 \cos \theta}{r^2} = \frac{E(R^3 - r^3) \cos \theta}{r^2} \quad (4.6)$$

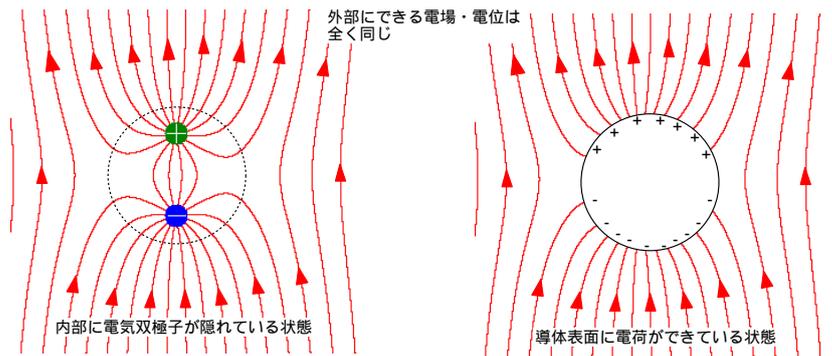
が解である。导体球の内部では電位は一定になるので、

$$V(r, \theta) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq R \\ \frac{E(R^3 - r^3) \cos \theta}{r^2} & R < r \end{cases} \quad (4.7)$$

とまとめることができる ( $R=r$  でちゃんと二つの式が接続されることに注意)。この場合、导体球の表面に現れた電荷の代わりに、原点に電気双極子を置いて電位を表現したことになる。この電位に対応する電場は、

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\vec{\nabla} V &= -\left( \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \underbrace{\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}} \right) \frac{E(R^3 - r^3) \cos \theta}{r^2} \\ &= -\vec{e}_r \left( -3E \cos \theta - \frac{2E(R^3 - r^3) \cos \theta}{r^3} \right) - \vec{e}_\theta \frac{E(R^3 - r^3) \sin \theta}{r^3} \end{aligned} \quad (4.8)$$

<sup>3</sup>実際の積分は平面上の極座標を使った方が楽である。



である。表面に現れる電荷を計算するには、まず上の式に  $r = R$  を代入し、

$$\vec{E}|_{r=R} = 3E \cos \theta \vec{e}_r \quad (4.9)$$

となる。なお、当然であるがこの電場は球面に垂直 ( $\vec{e}_r$  方向) を向いている。ゆえに現れる電荷密度は

$$\sigma = 3\epsilon_0 E \cos \theta \quad (4.10)$$

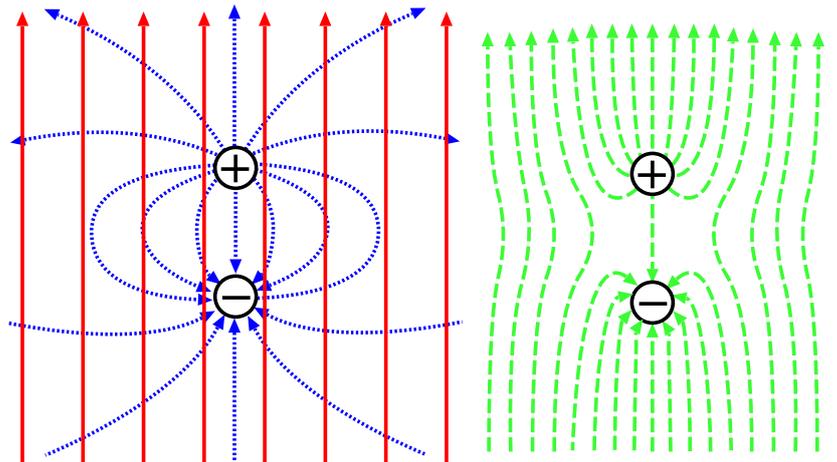
ということになる。球の上半分  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  には正電荷が、下半分  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$  には負電荷が現れる。

## 4.3 誘電体と分極

### 4.3.1 分極

「誘電体 (dielectrics)<sup>4</sup>」とは何かというと、より世間でよく使われる言葉で言うならば「絶縁体 (insulator)」である。つまり、電気を流さないような物質である。誘電体は電流は流さないが、電場に対して反応しないというわけではない。原子というのはプラス電気を帯びた原子核と、そのまわりにある、マイナス電気を帯びた電子で構成されている。金属などの導体の場合は、電子が原子核を離れて自由に動けるようになっていたがゆえに、外部からの電場を完全に打ち消すことができた。誘電体では電子は自分の所属する原子から離れることはできない。離れることはできないが電場から力を受けるには違いないので、外部から電場をかけられるとこの原子に「分極 (polarization)」という現象が起こる。分極とは、原子のうちプラス電気を持っている部分が電場の方向に、マイナス電気を持っている部分が電場と逆方向にひっぱられて、原子の電荷分布に偏りが生じることである。

右の図は、分極した電荷の近くの電場を描いたものである。電場が場所によって全く違う大きさ、違う向きになっていることがわかるであろう。現実的に考えれば分子一個一個は複雑な運動をしているだろうし、分子の状態も刻一刻と変化するだろう。そういう意味では、ミクロな目で見ると状況は図のような静的なものではないしすっきりしたものではない。しかしそんなものをまじめに計算するのはたいへんなので、以下では言わば「遠くから目を細めて見る」ようなことをする。つまり「空間的にも時間的にも複雑な変化をしているものの平均をとってその場所にある電場を代表させる」のである。



たとえばこの誘電体が油のような液体だとして、その液体中に試験電荷を置いたとする。試験電荷がこの図に書き込める程度に小さいならば、右の図の破線の密度に従って力を受けるだろう。しかし試験電荷自体がある程度の広がりのある物体であるならば、受ける力はその「場所によって違う力」の足し算となるだろう。誘電体がない場合は電気力線は実線のようになっており、平均をとるまでもなく電場の強さが決まる。一方、誘電体がある場合の電気力線は破線の線であり、この平均をとって考えると、電場は誘電体がない場合に比べ、弱くなっているのである。

通常我々が「誘電体中の電場」と言う時、それは上の「実在する微視的な電場の平均」を意味する。ミクロな(原子レベルの)目で見れば、電場は場所によってまたは時間によって激しく変化している<sup>5</sup>。それを平均化した(ならした)ものを「電場」と呼んでいるわけである。実際に試験電荷をつこんで測定することができる電場は平均の電場の方(ミクロなレベルより小さい試験電荷に働く力を測定することなどできない!)なので、実用上このように定義しておくしかないだろう。

実在する電場の平均は、単純に考えると、

$$\overrightarrow{\text{実在する電場の平均}} = \overrightarrow{\text{誘電体が存在しない場合の電場の平均}} + \overrightarrow{\text{分極による電場の平均}} \quad (4.11)$$

<sup>4</sup>'dielectrics' というのは「電場を通すもの(電気を通すものではない!)」という意味合いの言葉である。「電場は真空中でも伝わる」ということを知っている現代の眼から見ると奇妙なことだが、昔は真空中にもエーテルという物質が詰まっていたこれが「電場を伝えている」と考えていた。つまり真空も一つの「誘電体(電場を通すもの)」であった。

<sup>5</sup>今は静電場を考えているので時間的変化はあまり重要ではないが、一般的な状況ではもちろん、たいへん重要である。

という関係式が成立する。実際には分極の存在によっていろいろな変化が起こることになるので事は単純ではないが、それは後で具体的に考えていくことにしよう。

なお、ここまでの話は物質を構成する分子などは分極はしても、イオン化したり化学変化をしたりはしないとして考えている。たとえば電場が  $3 \times 10^6 \text{V/m}$  ぐらいになると、空気は電離してイオンになってしまう（分極が強すぎて引きちぎられてしまう）。

### 4.3.2 分極と電気双極子モーメント

前節ではおおざっぱに「電場が弱くなる」などと書いたが、どのようにどの程度弱くなるのかは、具体的に分極が起こっている様子を考察していかななくてはわからない（そもそも、前節の具体的な図を見たら、電場が弱くなっている部分もあれば強くなっている部分もあるので、実際のところどうなのか即答はできない）。

そこでまず、分極という物理現象の強さ（大きさ）を測るための物理量を用意しよう。

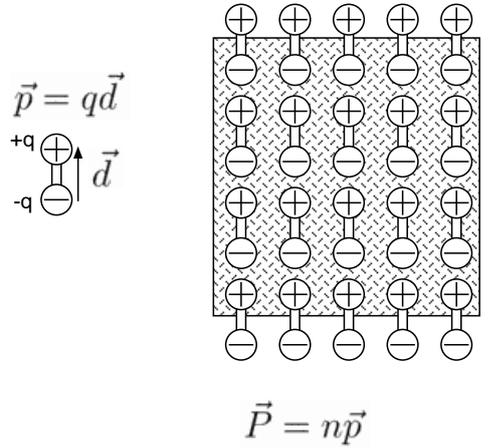
分子一個の分極を測るならば、それは電気双極子モーメントを見ればよい。電気双極子モーメントは、電気のない状態から正電荷  $+q$  と負電荷  $-q$  に分離するようなことが起こった時、その負電荷から正電荷に向かうベクトル  $\vec{d}$  に  $q$  をかけて、 $\vec{p} = q\vec{d}$  と定義されている。

分子一個一個が分極した時、単位体積あたりに  $n$  個の双極子モーメント  $\vec{p}$  が現れたとしたら、単位体積内の双極子モーメントの和  $n\vec{p}$  を分極  $\vec{P}$  の定義としよう。実際には各々の分子が持つ双極子モーメントは同じではないので、

$$\sum_i \vec{p}_i = n \langle \vec{p} \rangle = \vec{P} \tag{4.12}$$

と考えた方がいいだろう。 $\langle \vec{p} \rangle$  は  $\vec{p}_i$  の平均である。双極子モーメントの単位は  $[\text{C}\cdot\text{m}]$  なので、分極の単位はこれを体積  $[\text{m}^3]$  で割って、 $[\text{C}/\text{m}^2]$  となる。

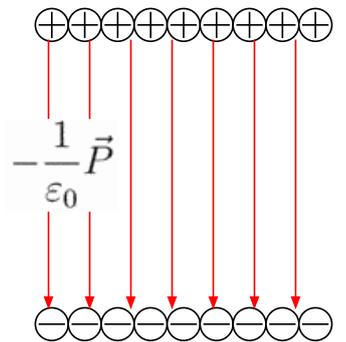
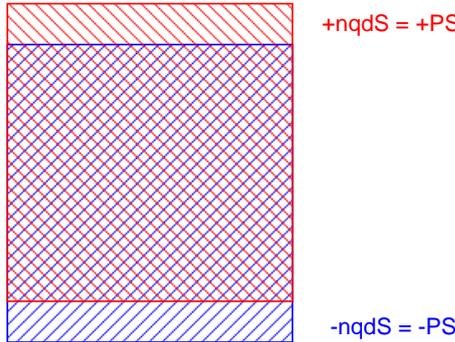
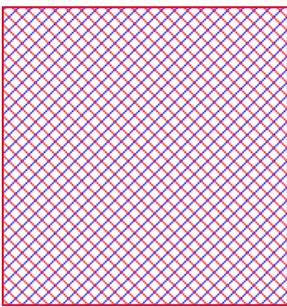
実際には分子ごとにいろいろな双極子モーメントを持っているはずだが、それをならして考えて単位体積あたりとしたのが分極  $\vec{P}$  である。すると、ここには電荷密度  $nq$  の正電荷の集まりと電荷密度  $-nq$  の負電荷の集まりがあり、正電荷の集まりの方だけが  $d$  だけずれたと考えればよい。断面積  $S$ 、高さ  $d$  の角柱を考えて、その角柱内に一樣な分極  $\vec{P}$ （向きは断面の法線に等しいとしよう）ができていたとすると、その天井からは  $qd \times S = PS$  の正電荷が飛び出し、床の部分には  $-qd \times S = -PS$  の負電荷が取り残されていることになる。つまり、分極ベクトル  $\vec{P}$  は、単位面積あたりどれだけの電荷が面から浸み出してくるか、という量だと考えてもよい。



分極していない時は、正電荷と負電荷の分布は完全に一致。トータルの電荷は0で、（マクロな）電場はどこにもない。

分極している時。正電荷と負電荷の分布が距離  $d$  だけずれる。

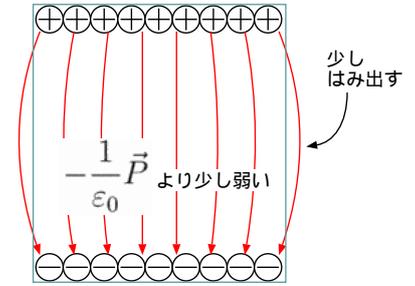
結局、端っこに電荷が並んでいるのと同じこと。



⊕ の存在する範囲。電荷密度は  $+nq$       ⊖ の存在する範囲。電荷密度は  $-nq$

この飛び出したり取り残されたりする電荷は、図の下向きに  $\frac{P}{\epsilon_0}$  の電場を作る。なお、ここでは分極によってできる電場を  $-\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}$  と考えたが、たとえばコンデンサによってできる電場が  $\frac{Q}{\epsilon_0 S}$  という式が厳密には正しくなかった（コンデンサの端の部分で電気力線が外に漏れるため、電場が弱まった）のと同様、厳密にはこの電場の式は正しくはない。

分極ベクトルと、分極によって作られている電場の比は、誘電体の形状によって、そして場所によって異なるのである。ただし、次の節で考える誘電体中の電束密度を定義するにおいては、その部分の実際の電場との差は無視して  $-\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}$  という式を使う。



#### 4.4 誘電体中の電束密度

以上のように、分極  $\vec{P}$  が存在している場合、分極電荷が発生させる電場は（平均しつつおおざっぱに見積もると）  $-\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}$  と表現できることがわかった。ここで、実際の電場  $\vec{E}$  から、分極による電場を取り去ってしまったものを考える。それを  $\frac{1}{\epsilon_0}\vec{D}$  と書くことにすると、

$$\underbrace{\vec{E}}_{\text{実際の電場の平均}} = \frac{1}{\epsilon_0}\vec{D} - \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}}_{\text{分極による電場の平均}} \quad (4.13)$$

となる。言わば、電場（の平均）を分極によって起こった部分とそれ以外による部分に分けていると考えてもよい。

電束密度の定義

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad (4.14)$$

を「電束密度 (electric displacement または electric flux density)<sup>6</sup>」と呼ぶ。

電束密度を測る単位は電場の単位とは (SI 単位系では)  $\epsilon_0$  倍違う。電場の単位は [V/m] であるし、電束密度は上の式からわかるように分極と同じ単位 [C/m<sup>2</sup>] を使って表す。上の電束密度の定義式は「誘電体中の電場は分極が存在する分だけ、電束密度の  $\frac{1}{\epsilon_0}$  倍より弱くなる」と読んでもいいし、「電束密度は電場の  $\epsilon_0$  倍に分極を足したものと定義する」と読んでもいい (後者の方が厳密な定義として正しい)。

電束密度にそれに垂直な面積をかけたものが「電束」である。単位は [C] となり、1C の電荷から 1C の電束が出る。

真空中ならば  $\vec{P}$  がないので  $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$  となり、 $\vec{E}$  と  $\vec{D}$  は定数倍されるだけで同じ方向を向いたベクトルとなる。真空中に一個の点電荷  $Q$  が置かれている場合の電場は  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$  であったから、この場合  $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{e}_r$  である。真空中での電束密度を考えると、電場に比べて単純に  $\epsilon_0$  で割るという操作をしなくてよい、というだけの違いとなる (真空中では、 $\vec{E}$  と  $\vec{D}$  の両方を考える意味はあまりない)。

真空中でなくても、多くの物質では、 $\vec{P}, \vec{D}, \vec{E}$  はみな同じ方向を向く<sup>7</sup>。その場合は、(4.14) の右辺はやはり  $\vec{E}$  に比例するので、その比例定数を  $\epsilon$  (添字 0 が無いのに注意) とおいて、

線型な媒質の場合の  $\vec{D}$  と  $\vec{E}$  の関係

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad (4.15)$$

とまとめることができるだろう (こうまとめられる場合、その物質を「線型な媒質」と呼ぶ)。  $\epsilon$  は  $\epsilon\vec{D} = \epsilon_0(\vec{D} - \vec{P})$  によって定義される定数であり「誘電率」と呼ぶ ( $\epsilon_0$  は「真空の誘電率」であった)。

点電荷のまわりに誘電体を置いた時、誘電体が線型な媒質であれば、電場は真空の場合の  $\frac{\epsilon_0}{\epsilon}$  倍になる。真空中であれば距離  $r$  の場所での電場は  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$  であったから、誘電体中ならば、 $\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\vec{e}_r$  となる ( $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$  という置き換えを行った形になっている)。

結局、ミクロな目で見ると、「分極によって作られた電場が元の電場を打ち消して、電場を弱くしている。その弱くなる度合いは物質によって違い、その違いが誘電率  $\epsilon$  の差である」と考えることができる。与えられた電場によってどの程度分極が起こるかは物質の性質で決まるので、誘電率も物質によって違う。物質の誘電率と真空の誘電率との比  $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r$  を「比誘電率」と呼ぶ。

<sup>6</sup> 「electric displacement」は直訳すれば「電気変位」となるが、この呼び名は日本ではあまり使われない。これが「変位」と呼ばれる理由は誘電体の分極によって起こった電荷の移動 (変位) に関連するからである。そういう意味では真空中で  $\vec{D}$  を考えるのはおかしいのだが、昔は真空も一種の誘電体と考えられていたのである。 $\vec{D}$  の記号が D なのは displacement からくる。

<sup>7</sup> 一般の誘電体では、 $\vec{P}$  は  $\vec{E}$  と同じ方向を向くとは限らない。そのような場合は「異方性の誘電体」と言う。

	空気	水	エタノール(液体)	ガラス	大理石	紙	酸化チタン
比誘電率	ほぼ 1	80	24	4	8	3	100

いろいろな物質の比誘電率のおおまかな値は上の表の通り。

【FAQ】「外部からきた電場を分極による電場が打ち消すのだとすると、その結果電場が弱くなるから分極も弱くなる。そういうふうに考えると鶏と卵のようにいつまでも互いに影響し合って、話が終わらないのではないか？」

ごもっともな疑問であるが、上の関係  $\epsilon \vec{E} = \vec{D}$  は、そういう影響の及ぼしあいが起こった結果、このような状態で落ち着いていると考えるべきである。つまり、 $\epsilon \vec{E} = \vec{D}$  は因果関係を示す式ではなく、最終の状態が満たすべき関係である。

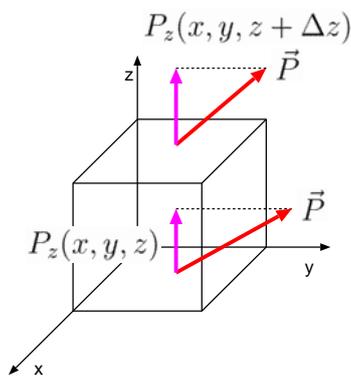
では、変化が落ち着く前に電場がさらに変化すればどうなるのか、という疑問を持った人もいるかもしれない。これはたいへんよい疑問である！

変動する電磁場(電磁波など)をかけた時、分極がついていけないというようなことも起こり、その場合は誘電率が一定電場をかけた時とは変わってくる。つまり、誘電率が電磁波の振動数の関数になったりするのである。この章で述べたことはあくまで静電場に対する話であり、変動する電磁場についてはより深い考察が必要になるということになる。これについては後でまた考えよう。

なお、ここまで述べた状況はかなり理想化されたものだということに注意しなくてはならない。まず分極が電束密度に比例するとは限らない。電束密度が分極に比例するということはつまり「外部からかけた力に比例した距離だけ電荷が移動する」ということであって、そうなるのは原子のプラス電荷とマイナス電荷を引き留める力がちょうどフックの法則を満たしている場合だけである。ただ、たいていの現実的な力でも平衡点の周りの短い距離の近似としてならフックの法則が成立する場合が多いので、近似計算としては正しい。

また、分極によって生じる外部電場と逆向きの電場を、ここでは  $-\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$  であるとして考えたが、実はこの考察も厳密には正しくないことは既に述べた通りである。

分極があってもトータルの電荷は0であると述べたが、分極の大きさが場所によって変わる場合、そうとは限らない。誘電体がもともと電荷を持っていなかったとしても、場所によって違う分極を持っていると、結果として電場を持つことになる。例によって微小な直方体を考えると、その6つの面のそれぞれを通して分極により電荷が進入してくることになる。



たとえば  $z$  方向の成分(図の天井と床での電荷の出入り)を考えると、天井から  $P_z(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y$  の電荷が抜け、床から  $P_z(x, y, z) \Delta x \Delta y$  の電荷が入ってくる。差し引きすると、 $\frac{\partial P_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$  の電荷が出て行くことになる。 $x, y$  方向も考えると結局、

$$\rho_P \Delta x \Delta y \Delta z = - \left( \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.16)$$

の電荷がこの直方体の中に入っていることになる。

よって、分極による電荷の電荷密度  $\rho_P$  は  $-\text{div} \vec{P}$  と書くことができる。 $\rho_P$  を分極電荷密度と呼ぶ。分極とは関係ない電荷の電荷密度を  $\rho_F$  と書こう。添字 F は自由 (free) に動き回る、という意味で、分極による電荷が双極子モーメントから遠く離れることはできないことに対比させた名称である。「真

電荷」という言い方をすることもある。

静電気の基本公式  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  は

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_F + \rho_P) \\ \epsilon_0 \text{div} \vec{E} &= \rho_F - \text{div} \vec{P} \\ \text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) &= \rho_F \end{aligned} \quad (4.17)$$

と書き直される。

ここで、 $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$  とすることで、

媒質中の静電気学の基本公式

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (4.18)$$

が導ける。この電荷密度  $\rho$  には分極による電荷密度は含まない(真電荷のみである)。逆に真空中で成立していた  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  は(分極が存在する分だけ)成立しなくなる。なお、この式を見て、「 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  なのだから、これは  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$  ということだな」と早とちりしないように注意すること。誘電率  $\epsilon$  はそこにある物質によって違うのだから、微分 ( $\text{div}$ ) の外に出せない可能性もある。

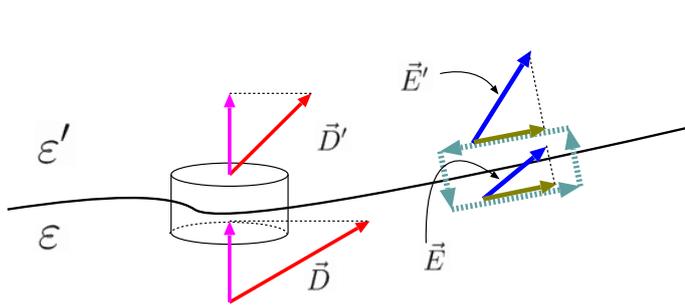
電場  $\vec{E}$  に対して「電気力線」を定義したように、電束密度  $\vec{D}$  に対して「電束線」を定義すると、電束線は電気力線同様、途切れたり分裂したり合流したりしないし、正電荷(または無限遠)で始まり負電荷(または無限遠)で終わる。ある閉曲面から出る電束線の本数は、その閉曲面内に含まれている電気量に等しい(ガウスの法則)。 $\vec{E}$  と  $\vec{D}$  では単位が変わっているのだから、真空中の電場に関するガウスの法則では必要であった  $\frac{1}{\epsilon_0}$  は、電束密度に関する法則においては必要ない。

.....  
 【FAQ】「 $\vec{E}$  と  $\vec{D}$  と電場を表現するものが二つありますが、どちらが本質的なんですか？」

実際のところ、実在するのは  $\vec{E}$  でも  $\vec{D}$  でもない、「ミクロな電場」である。そのミクロな電場は場所によって、時間によって激しく(つまりミクロなレベルで)変動している。しかしこの実在するミクロな電場はあまりに激しく変化しすぎて(たとえば原子の右側と左側で違うのだ)、何かを計算する時の使い勝手が悪い。そこで平均を取った結果が「マクロな電場」 $\vec{E}$  であると考えればよい。これに対し、ミクロな電場から、物質が存在することに起因する乱れの部分をとっばらっておいてから平均したものが  $\epsilon_0 \vec{D}$  である。どちらが本質的かという比較で言えば、物質の影響を取り去るという作業をしていない分だけ  $\vec{E}$  の方が本質的であろう。

$\vec{D}$  は、誘電体中の電場を表現する時に便利になるように作った人工的な量であると考えられる(歴史的には物質が原子や分子でできていることがわかる前から  $\vec{D}$  は使われていた)。

では本質的でないのに  $\vec{D}$  を使うのはなぜかという、たとえば  $\text{div} \vec{D} = \rho$  という式が成立することからわかるように、ガウスの法則を使うことができるのは  $\vec{D}$  に対してであるからであり、数式的表現の上では簡素になるからである。



途中でまわりにある物体の誘電率が変わると、電場や電束密度はそれに応じて変化することになる。真電荷がない場合、誘電率が変わる境界面ではどのような条件がつくのかを確認しておこう。本質的には基本法則である  $\text{div} \vec{D} = \rho, \text{rot} \vec{E} = 0$  を考えればよい。真電荷がないならば、 $\text{div} \vec{D} = 0$  であるから、左図のような境界面を含むような微小な円柱を考えると、天井から抜ける電束と床から抜ける電束は等しい。よって、 $\vec{D}$  のうち、境界面に垂直な成分は同じでなくてはいけない。

一方、 $\text{rot} \vec{E} = 0$  から、境界面に平行な電場は等しくなくてはいけない(上の図参照)。

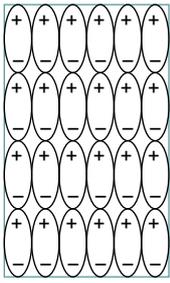
以上をまとめると、「電場の面に平行な成分と、電束密度の面に垂直な成分が接続される」ということになる。

## 4.5 強誘電体と自発分極

ここまでは、外部から電場がかかれたことによって誘電体が分極する、という話をした。ところが物質の中には、外部から電場がかからなくても勝手に分極している物質もある。そのような状態を「自発分極している」と言う。自発分極するような性質を持つ物質を「強誘電体」と言う。

自発分極している場合で同様の図を書いてみると、電場  $\vec{E}$  と電束密度  $\vec{D}$  は下の図のようになる。

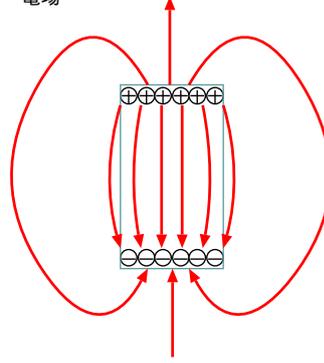
自発的に分極している状態



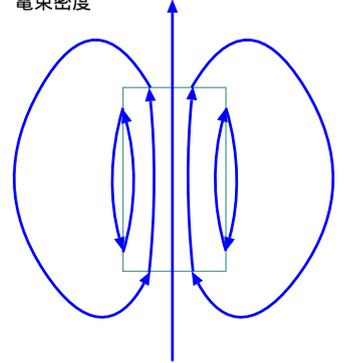
有効な電荷の分布



電場



電束密度



この場合、真の電荷（自由な電荷）はどこにもないので、 $\vec{D} = 0$  が成立する。つまり、電束線（電気力線の  $\vec{D}$  版）は途切れることなく一周する<sup>8</sup>。電場の方は分極によって生じた正電荷から発して負電荷に入る。特に誘電体内部では、電場と電束密度の方向は全く逆を向いていると言ってよい。

強誘電体は日常ではあまりなじみがなくぴんとこないと思う<sup>9</sup>が、後で出てくる強磁性体（つまり、同様のことが電場ではなく磁場で起こっている物質）はなじみがあると思う。つまりそれが永久磁石というものである。永久磁石の中でも  $\vec{E}, \vec{D}$  に対応する  $\vec{H}, \vec{B}$  が上と同様に完全に逆を向いてしまったりする。

#### 4.6 誘電体中の静電場の持つエネルギー

真空中の静電場は単位体積あたり  $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$  のエネルギーを持っていた。誘電体中ではどうなるだろうか??

そもそも  $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$  を出す時には、 $\frac{1}{2} \int \rho V d^3\vec{x}$  から出発して、 $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  を使って書き直した。誘電体中では、 $\text{div} \vec{D} = \rho$  が成立するのだから、

$$\frac{1}{2} \int \rho V d^3\vec{x} = \frac{1}{2} \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) V d^3\vec{x} = -\frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{\nabla} V d^3\vec{x} = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d^3\vec{x} \quad (4.19)$$

となる。つまり、

誘電体中の電場の持つエネルギー

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d^3\vec{x} = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 d^3\vec{x} + \frac{1}{2} \int \vec{P} \cdot \vec{E} d^3\vec{x} \quad (4.20)$$

が成立する。ここで、真空中との違い  $\frac{1}{2} \int \vec{P} \cdot \vec{E} d^3\vec{x}$  に注目しよう。 $\vec{P}$  が  $nq\vec{d}$  と書き直せることを使うと、

$$\frac{1}{2} \int \vec{P} \cdot \vec{E} d^3\vec{x} = \frac{1}{2} \int nq\vec{d} \cdot \vec{E} d^3\vec{x} = \frac{1}{2} \int n\vec{F} \cdot \vec{d} d^3\vec{x} \quad (4.21)$$

となる。 $\vec{F} = q\vec{E}$  は電場から双極子の電荷  $q$  に働く力である。この力がフックの法則にしたがっていたとすると、 $\vec{F} = K\vec{d}$  となり、この式は

$$\frac{1}{2} \int nK|\vec{d}|^2 d^3\vec{x} \quad (4.22)$$

となり、まさに弾性力の位置エネルギーそのものとなる。一個あたり  $\frac{1}{2}K|\vec{d}|^2$  のエネルギーと考えて、双極子モーメントの数  $\int n d^3\vec{x}$  をかけているのである。つまりこのエネルギー密度  $\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$  という式の中には、分極している物質がたくわえているエネルギーも含まれていることになる。

<sup>8</sup>  $\text{rot} \vec{E} = 0$  という法則はあるが、 $\text{rot} \vec{D} = 0$  という法則はないことに注意。一般に  $\text{rot} \vec{P} \neq 0$  だからである。

<sup>9</sup> ガスの火をつける時に使うカチッと音が出て火花が散るタイプのライターは、強誘電体に圧力をかけると高電圧が発生するという性質を利用して、

## 4.7 章末演習問題

【演習問題 4-1】真空中では、 $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  と  $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  からポアソン方程式  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  を導いた。分極  $P$  が存在している誘電体内ではこの式はどうか？

【演習問題 4-2】半径  $R$  の球形をした強誘電体が、ある一方向に一様に  $\vec{P}$  の分極をしている。この時の球の内部・外部それぞれについて、 $\vec{E}, \vec{D}$  を求めよ。

(ヒント：この時、表面電荷密度は  $|\vec{P}|\cos\theta$  となる。 $\theta$  は  $\vec{P}$  の向きと、球の中心から考えている表面へと向かうベクトルのなす角)



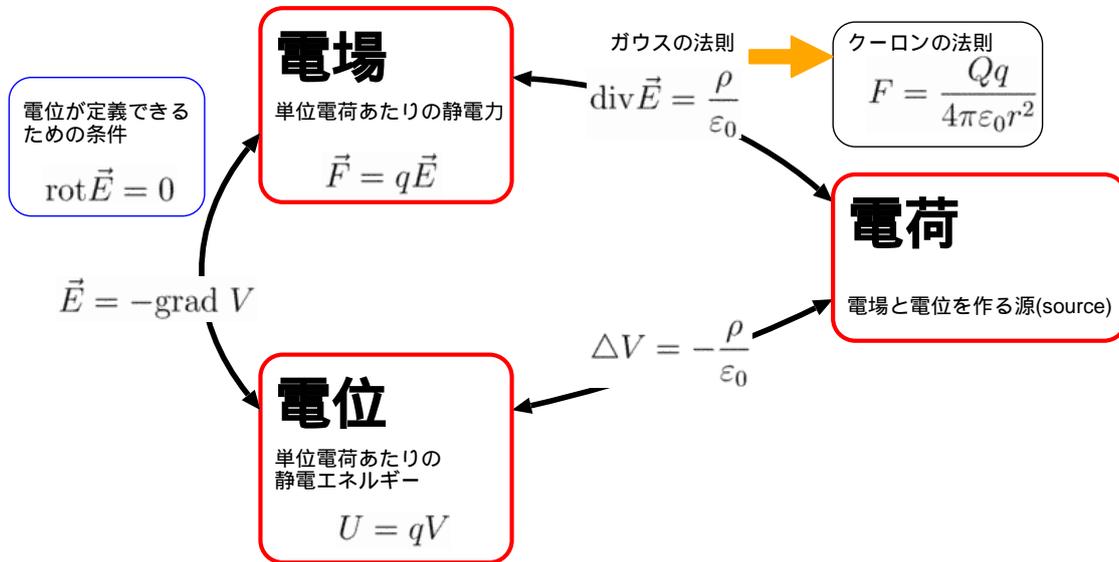
## 第5章 静電場から静磁場へ

電磁気 I では、電場および電荷に関する物理法則を学んできた。電磁気 II では磁場と電流に関する物理法則を学ぶ。ただし、この章からしばらくは電流および磁場は時間的に変動しないものとする。

以下この章では、静磁場の持つ性質を定性的に扱う。具体的な計算などは次の章以降にまわす。

### 5.1 電磁気学 I の復習

静電気の法則をざっと図表にまとめると以下のようなになる。



大事なことは「場」の概念（つまり「近接作用」の概念）である。電荷と電荷の間に力が働くことは実験事実であるが、その力が直接伝わる（「遠隔作用」）のではなく、電荷が電場（電位）を作り、その電場（電位）の中にある電荷は力を受ける。

電荷は

- 電場を作るという能動的役割
- 電場によって力を受けるという受動的役割

の両方を持っていることになる。場に対してこのような性質を持つものを「源 (source)」と呼び、以上のような作用を「場と源の相互作用」と言う。今後、磁場が加わるが、磁場には磁極もしくは電流という源がある<sup>1</sup>。

なお、物質中の静電気現象を考える時には、

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (5.1)$$

で表される「電束密度  $\vec{D}$ 」も大事な物理量となる。 $\vec{P}$  は「分極」と呼ばれる量で、物質を構成する原子がどの程度の双極子モーメントを持っているかを表す量である。物質中では上に書いた法則のうち、ガウスの法則が

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \text{div}\vec{D} = \rho \quad (5.2)$$

<sup>1</sup>現代物理では全ての力が場との相互作用の形で記述されている。電磁場の相互作用を量子力学的に考えたものが量子電磁力学である。

と修正される。

## 5.2 磁場とは何か

### 5.2.1 磁石の作る磁場

磁場というものを直観的に感じることができるのは磁石である。磁石を人類が発見したのはかなり古く（電荷よりも古い）そして、磁石に働く力は静電気と似た性質をたくさん持っている。まず、N極とN極など、同種の極が反発し、N極とS極つまり異種の極は引き合う。これは同種電荷が反発し異種電荷が引き合うのと同じである。また、実験によりこの力にもクーロンの法則が成立することがわかっている。そこで、「電荷」に対応するものとして「磁極」を定義し、N極を「プラスの磁極」、S極を「マイナスの磁極」と呼ぶ。単位としてWb（ウェーバー）<sup>2</sup>を使って測定した場合、二つの磁極（それぞれ  $m_1$ [Wb] と  $m_2$ [Wb]）が距離  $r$ [m] 離れている時に、

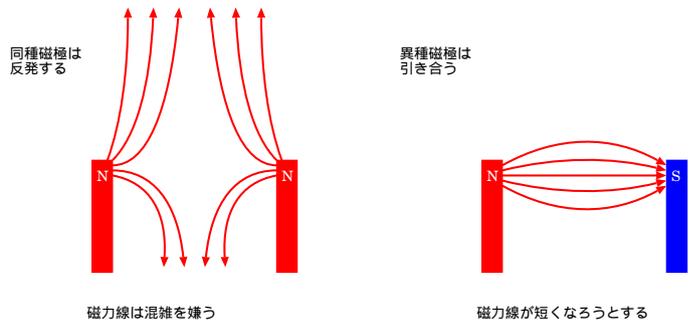
$$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu r^2} \quad \text{真空中なら } F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^2} \quad (5.3)$$

という式で力を表すことができる。 $\mu$  は透磁率と呼ばれる量で、誘電率と同様にまわりの物質によって決まり、特に真空中の値を  $\mu_0$  と書く。MKSA 単位系では  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  という値であるが、こういうぴったりした数字になるのは、MKSA では電流の単位 [A] をこの式で定義しているからである<sup>3</sup>。静電気力に対応して「電場」 $\vec{E}$ [N/C] という場を考えたように、「磁場」 $\vec{H}$ [N/Wb] を考えることもできる。

以上のように「磁場」を考えていく方法もある。これは電場との対応が単純になる。表にすると以下のようなになる。

	源	定義式	クーロンの法則	源の単位	単位
電場	電荷 $q$	$\vec{F} = q\vec{E}$	$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	[C]	[N/C] または [V/m]
磁場	磁極 $m$	$\vec{F} = m\vec{H}$	$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^2}$	[Wb]	[N/Wb] または [A/m]

電場と磁場の類似点はこれだけではなく、重ね合わせの原理が使えるところも同じである。また、電気力線に対応する磁力線は電気力線と同様の性質（混雑を嫌がり、なるべく短くなるとうとする）を持ち、磁力をこの磁力線の力学的性質から説明することもできる。これは、電場の基本法則と磁場の基本法則であるクーロンの法則が同じ形をしているので当然と言えば当然ではある（しかし、面白い）。



### 5.2.2 電流の作る磁場

ここまでの話だと、電場と磁場は二つの全く別々のもので、たまたまその性質が似ているというふうに感じられるかもしれない。実際、電氣的現象と磁氣的現象が科学的に研究されるようになった1600年から200年近くの間、科学者たちは電場と磁場の間の直接的関係を見つけられずにいた。この認識に大きな変化が現れたのは、エールステッド（Oersted）が「電流が磁場によって力を受けること」を発見した1820年である<sup>4</sup>。同じ年にアンペール（Ampere）<sup>5</sup>が「電流と電流の間に力が働くこと」を発見し、さらに電流と磁場の間の関係を深く研究している。

<sup>2</sup>まず後で述べる方法で電流の単位 A（アンペア）を定義し、電流が作る磁場の大きさから磁場の単位 A/m を定義し、その磁場が磁極に及ぼす力が  $\vec{F} = m\vec{H}$  となるように磁極の単位 Wb を定義する。そういうわけで今の段階では単に「そういう単位がある」としておいて欲しい。

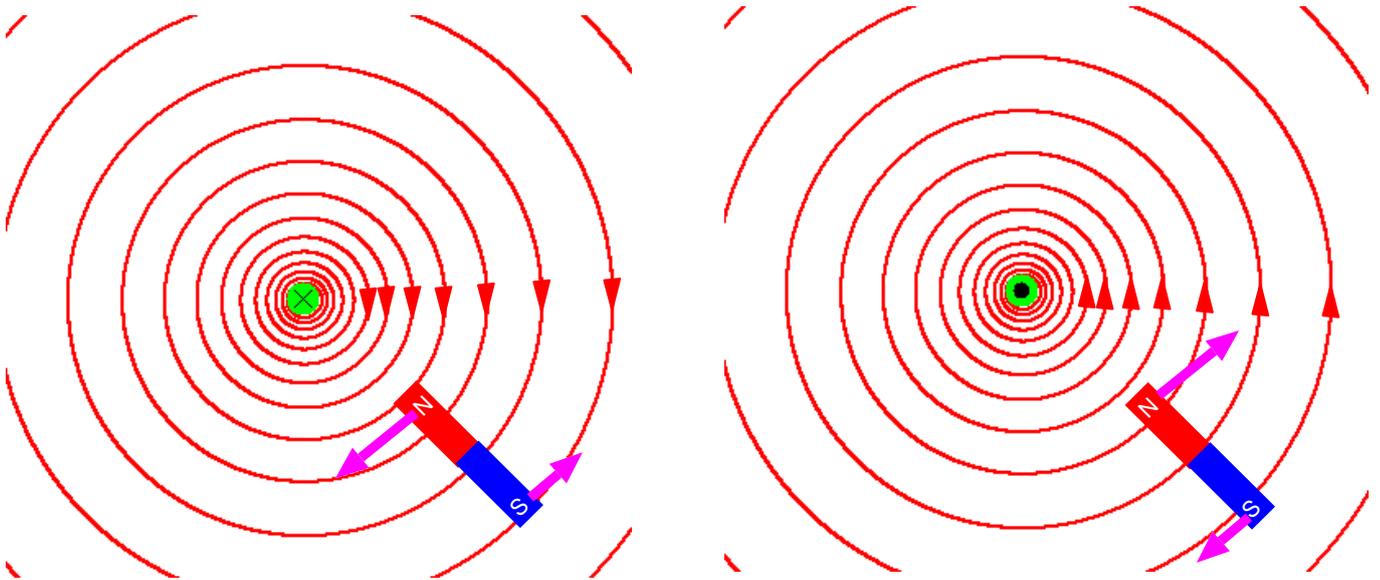
<sup>3</sup>「ぴったりした数字」と言いながら、なんで  $4\pi$  やら  $10^{-7}$  やらがつくんだよ？と思うかもしれない。この辺も歴史的事情がいろいろある。

<sup>4</sup>エールステッドは授業中に実験装置の磁針が近くの電流の ON/OFF によって向きを変えることに気づいたと言う。

<sup>5</sup>電流の単位アンペアは、彼の名にちなむ。ちなみにエールステッドの方も cgs 単位系の磁場の単位になっているのであるが、cgs 単位系は最近使われることが少なくなっている。

アンペールたちの研究により、電流がどのように磁場を作るかという法則（経験則）が得られたわけであるが、ここでは式で説明するのは後に回し、どのような形の磁場ができるのかだけを説明しておく。

電流によって作られる磁場の向きは「右ネジの法則」で決まる。すなわち、電流が流れていると、その電流の周りを回るような磁場が生まれる。



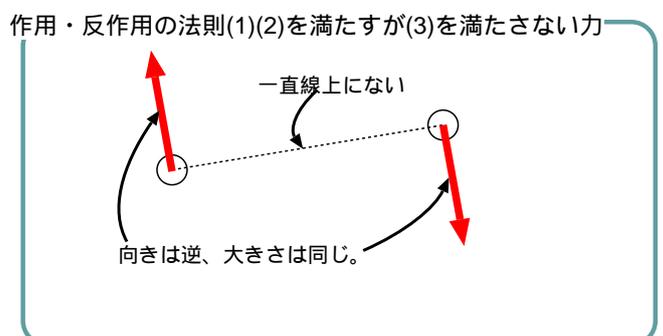
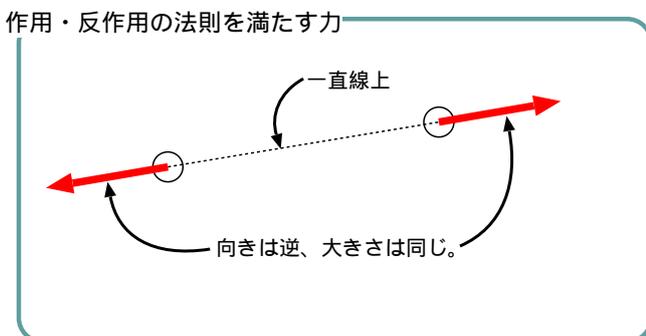
図の の中に x が書かれたマークは「紙面の表から裏へ抜ける方向」を意味する。この方向に紙面を電流が貫いている時、図のように電流の周りに同心円状の磁場が発生する。逆に「紙面の裏から表へ抜ける方向」は の中に小さなを入れたマークで表現する

footnote これは飛んでいる矢を前後から見た時の見え方を示しているのだそうだ。xは矢羽根なのである。。この場合は電流の向きが逆転したのだから、磁場の向きも逆転する。「右ネジの法則」と呼ばれるのは、右ネジ<sup>6</sup>を回転させる方向を磁場の向きと考えた時、ネジがそれによって進む方向が電流の向きに対応しているからである。

電流の作る磁場に関して、アンペールら発見者を大いに驚かせたのは、電流によって作られる磁場が磁極に及ぼす力がクーロン力のような中心力ではなかったことである。二つの電荷の間に働くクーロン力は、（引力の場合も斥力の場合も）二つの電荷を結ぶ線の上にあった。ところが磁場が電流に及ぼす力は、磁場とも電流とも垂直な方向を向くのである。それゆえ、通常のと違って、作用反作用の法則を満足しない。作用反作用の法則は、作用と反作用が

- (1) 逆向きであること
- (2) 大きさが等しいこと
- (3) 一直線上にあること

を要求する。(3)は教科書などでは省略されていることも多い<sup>7</sup>が、角運動量保存則を導くためには必要である（下の図を見れば、(3)を満たしてないと角運動量が保存しないことが理解できるだろう）。



<sup>6</sup>市販されているネジのほとんどは右ネジであるので「普通のネジ」とっておけばよい。回転する部品（扇風機など）には左ネジと右ネジが両方使われて、ネジが自然に抜けないように工夫されている。

<sup>7</sup>ニュートンの「プリンキピア」冒頭にある力学の第3法則の中には書かれていない。

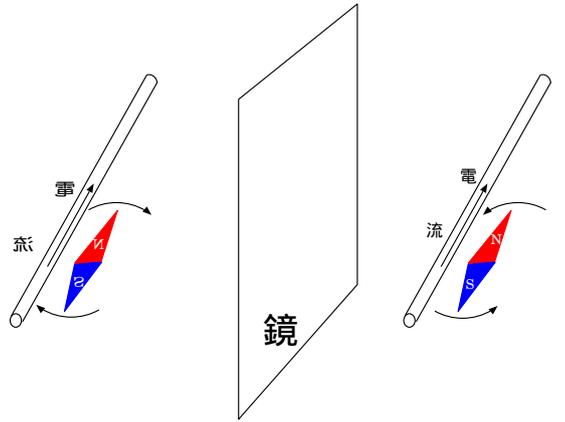
電流と磁極の間に働く力の場合、一見(3)が満足されない。より細かく調べると、電場や磁場も運動量や角運動量を持ち、電磁場も含めた系で考えるとちゃんと作用反作用の法則が満足されることがわかる(後述)。

余談ながら、アンペールがもう一つ不可解に思ったのは、この力が左右対称に見えないということである。次の図のように、磁針の上に導線が通っているところを考える。これを鏡に映したと考えると、鏡の中(鏡像)で起こることは、現実世界で起こることと逆になるように思われる。

ということは、電磁気の法則は左右対称ではないのだろうか???

この時代では、「物理法則というのは左と右を区別しない」と思われていたので、この疑問は実にもっともなものである。

この謎は、後で磁極というものの正体がわかれば氷解することになるだろう。結論を述べると、物理法則の左右対称性は(この段階では)破れていない<sup>8</sup>。実は鏡の中のN極はS極になるのである(このテキストの後の部分を読めば、なぜそうなるのかはわかるはず)。

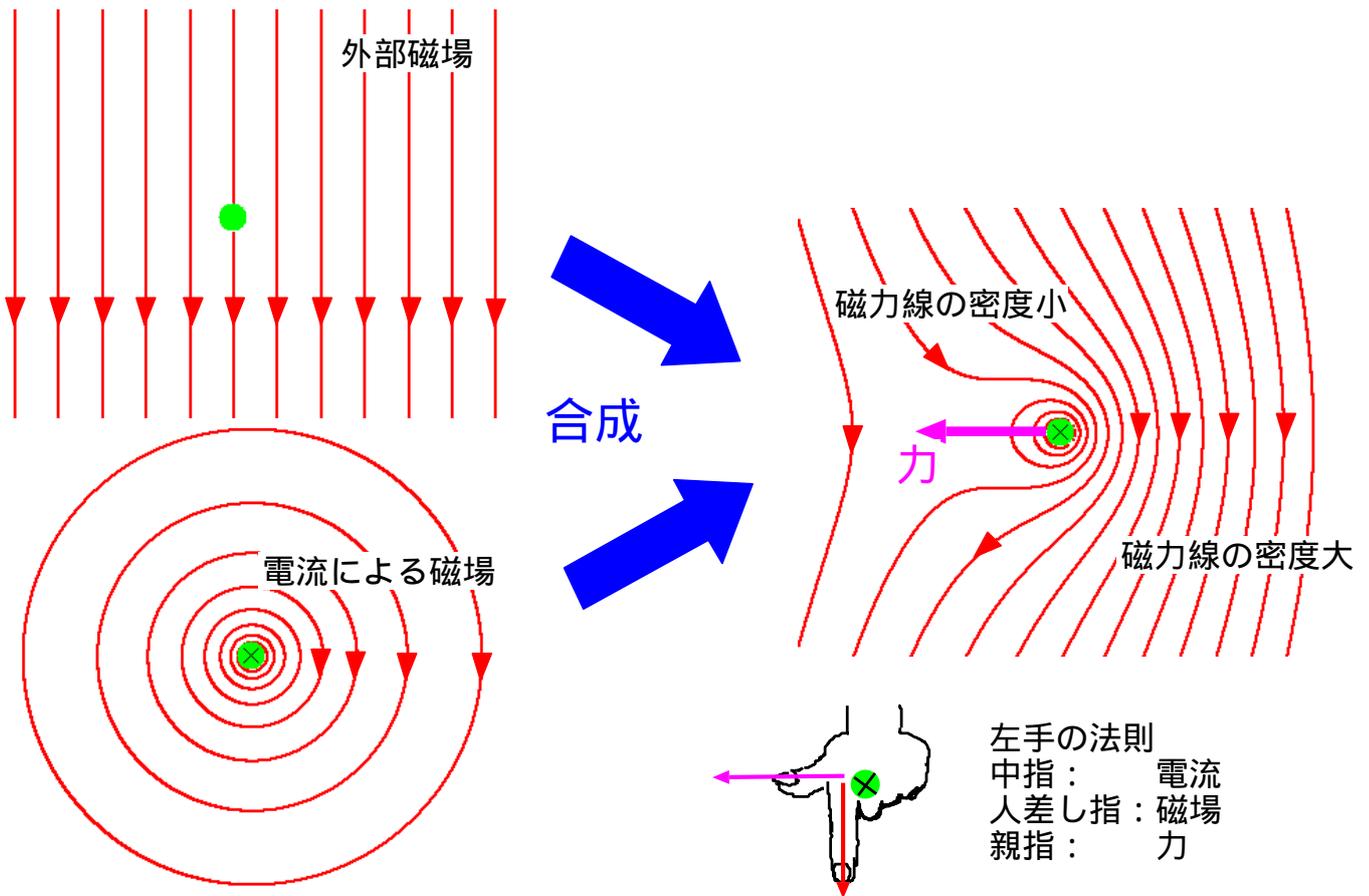


### 5.2.3 磁場中の電流の受ける力

静磁場に関する問題については、電流と磁場の関係は

- 電流が磁場を作る。
- 磁場中の電流は力を受ける。

ということになる<sup>9</sup>。この「磁場中の電流は力を受ける」ということを、磁力線の張力と斥力で説明しよう。



外部から(磁石などにより)上から下へ向かう磁場が存在している場所があったとする(図左上)。ここに電流を紙面表から裏へ流すと、

<sup>8</sup>後に 崩壊という現象の中で、左右対称性が破れていることが発見されるが、これは電磁気学の範囲外である。

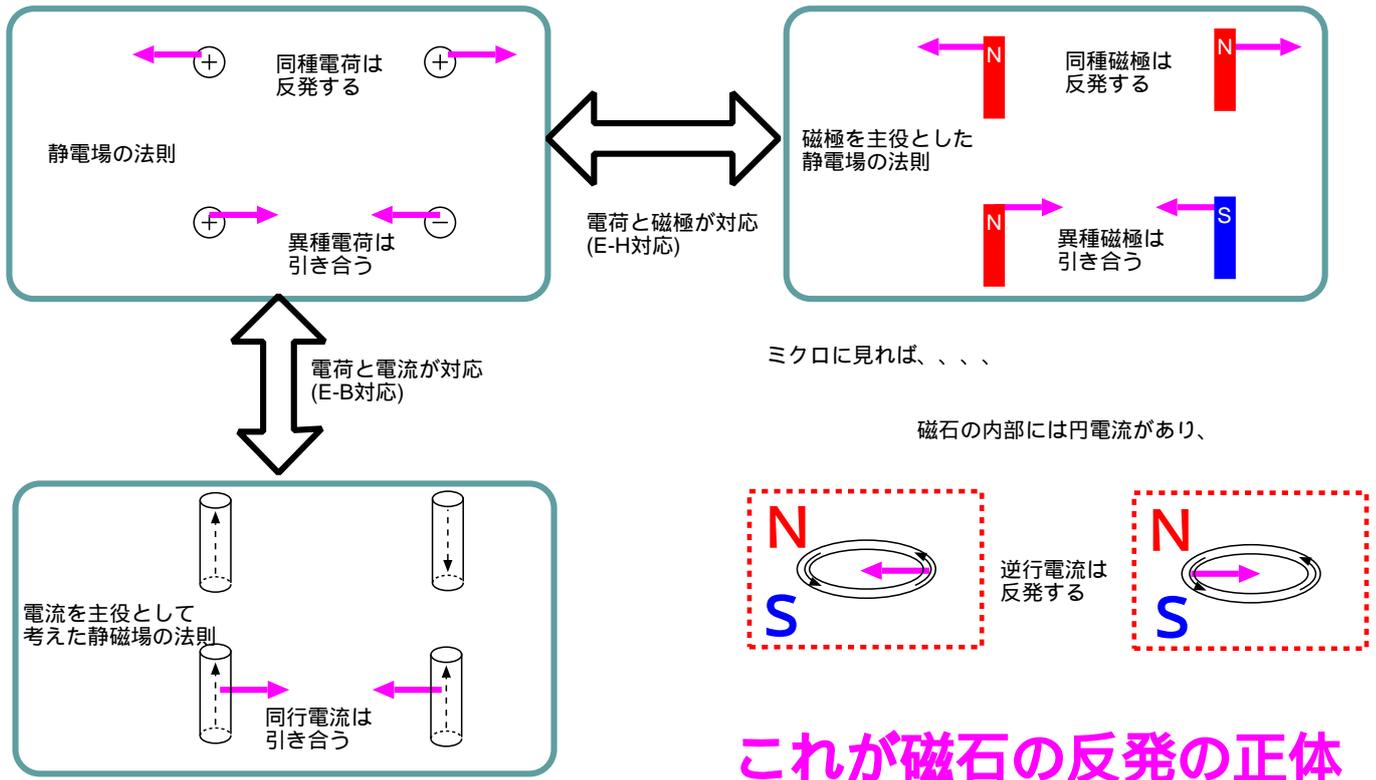
<sup>9</sup>変動する電磁場の場合、「磁場が変化すると電場が発生する(電磁誘導)」という現象が加わる。それは後の章でやろう。

電流の周りを回る磁場ができる（図左下）。この二つが合成された磁場を考えると、電流の右側では二つの磁場が強め合って強い磁場となり、強い磁場の強い圧力によって電流が左に押されることになる<sup>10</sup>。

### 5.2.4 磁極の正体

しかし、実は電荷のように独立した存在としての「磁極」などというものは存在しない。磁場を作るのは電流である<sup>11</sup>。そして、磁場中に置かれた電流が力を受ける。

電磁石はまさに電流の作る磁石である。永久磁石は一見どこにも電流など流れていないように思えるが、実は原子分子レベルで流れている電流がその磁力の源である<sup>12</sup>。「磁極」は実は電流が作っているものなので、磁極どうしに力が働くように見えるわけである。つまり、静電場における「電荷」に対応するものは静磁場では「電流」であると考えべきなのである<sup>13</sup>。



立場としては上の図に示したように「電荷と磁極が対応するという立場（電場  $\vec{E}$  と磁場  $\vec{H}$  が対応するので、E-H 対応と呼ばれることが多い）」と「電荷と電流が対応するという立場（こちらは E-B 対応と呼ばれる）」の二つがある。ミクロに見ると（少なくとも今現在知られている）磁力はすべて電流に由来すると言ってよいので、E-B 対応の方がより本質的だと考えてよいだろう。

そこで、以下では電流の間に働く力を使って「磁場」を定義する方法で考えよう。

問題をややこしくしているのは、電荷と電荷の間の力である静電気力の場合には電荷に向きがない（プラスマイナスはあるが）が、電流には向きがある、ということである。これに関連して、電場が電荷に力を与える場合、その力の方向は電場の方向と一致する（負電荷なら逆を向くが、方向は同じ）が、電流と磁場の場合は電流の方向とも磁場の方向とも違う方向に力が働くという点が少しややこしい。

もう一つややこしいのは、電場を表現する場には、電場  $\vec{E}$  と電束密度  $\vec{D}$  があつたように、磁場を表現する場には磁場  $\vec{H}$  と磁束密度  $\vec{B}$  がある<sup>14</sup>。電流を主役として磁場を定義する場合、最初に定義されるのは  $\vec{B}$  の方である<sup>15</sup>。

<sup>10</sup> なお、図を見ると「磁力線が短くなるとうする」という性質でこの左向きの力を理解することもできる。

<sup>11</sup> 棒磁石などの磁石が作っている磁場は、原子レベルで流れている電流によって作られていると考える。

<sup>12</sup> スピンと呼ばれる、粒子の自転に対応する“運動”も源の一つである。というより、磁石の磁力のほとんどは、電子のスピンに由来する。スピンは量子力学で理解すべき物理量であつて、古典力学的な意味の“運動”ではないので、電荷粒子のスピンを「電流」と呼ぶには語弊がある。しかし電荷のある粒子の持つ角運動量が磁場の源であることには違いない（スピンは角運動量なのである）。このあたりは量子力学を勉強してから考え直して欲しい。

<sup>13</sup> こう考えると、アンペールの疑問に答えることができるのである！

<sup>14</sup> 物理現象を表すための言葉である「電場」「磁場」と、物理量であるところの  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  を表す言葉としての「電場」「磁場」が同じなのはちょっとややこしい（無用な混乱を招くことがある）。文脈で判断しよう。

<sup>15</sup> 磁極を主役として磁場を定義するならば最初に定義されるのは  $\vec{H}$  となる。これがこのような形式を「E-H 対応」と呼ぶ理由である。このテキスト

ではまず、磁束密度  $\vec{B}$  の定義<sup>16</sup>を述べよう。

—  $\vec{B}$  の定義 —

試験電流  $I$  の、 $\vec{x}$  から  $\vec{x} + d\vec{x}$  に至る微小な長さの電流素辺に対して、磁場による力

$$d\vec{F} = Id\vec{x} \times \vec{B} \quad (5.4)$$

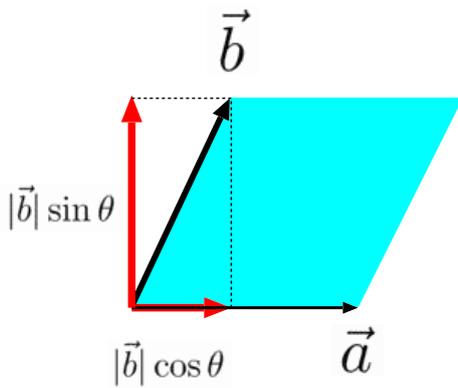
が働く時、そこには磁束密度  $\vec{B}$  の磁場がある。真空中では、磁場  $\vec{H}$  と磁束密度  $\vec{B}$  は  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  の関係がある。

微小辺に働く力の大きさもやはり微小である<sup>17</sup>ので、ここではその微小な力を  $d\vec{F}$  と  $d$  をつけて表現した。

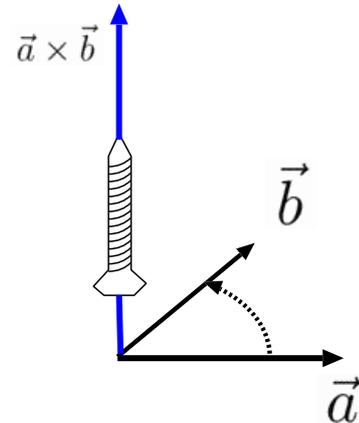
上の式から組み立てるならば、磁束密度  $\vec{B}$  の単位は (電流と長さをかけると力になるので)  $\text{N/A}\cdot\text{m}$  となる。ただし、磁束密度  $\vec{B}$  には T (テスラ) という独自の単位が割り振られている。また、磁極の単位である Wb を使って表すと  $\text{Wb/m}^2$  となる。

記号  $\times$  は外積であり、単なる掛け算ではもちろんない。ベクトル  $\vec{a}$  とベクトル  $\vec{b}$  の外積  $\vec{a} \times \vec{b}$  は  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  ととも垂直な方向を向く。

— 外積の定義 —



この場合、 $\vec{a} \times \vec{b}$  の向きは紙面の裏から表へ向かう向き



二つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  があって、二つのベクトルのなす角を  $\theta$  とすると、その外積  $\vec{a} \times \vec{b}$  の大きさは

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta$$

である。つまり、 $\vec{a}$  に垂直な成分  $|\vec{b}| \sin \theta$  を掛け算する。

この結果は、図に示した平行四辺形の面積となる。

外積の結果はベクトルである。その向きは、 $\vec{a}$  から  $\vec{b}$  の方向へとネジを回した時、ネジの進む方向を向く。

電荷の定義の場合、試験電荷を一個おけば電場  $\vec{E}$  は向きと大きさが全てわかったが、それとは違って、磁場の場合試験電流  $Id\vec{x}$  が1本あるだけでは、 $\vec{B}$  が決定できない。 $Id\vec{x}$  を持ってきて、 $d\vec{F}$  を測定したとして、 $\vec{B}$  は一つに決まらないのである (具体的には、 $\vec{B}$  のうち、 $d\vec{x}$  と平行な成分が決まらない。そういう成分があったとしても、式 (5.4) には効かないからである)。平行でない試験電流が2本以上あれば、 $\vec{B}$  を完全に決定できることになる。

距離  $r$  離れて2本の平行電流 ( $I_1$  と  $I_2$  としよう) が走っている時、互いの電流に単位長さあたり  $\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$  の引力が働くことが実験的に知られている。

これらの力をきちんと計算するためにはまず磁場と電流の間どのような法則が成立するかを数式で表現していなくてはならない。次の章からそれを実行しよう。

トでは E-B 対応で行くので、まず  $\vec{B}$  が定義される。

<sup>16</sup> なお、 $\vec{B}$  の方が本質的であるので、 $\vec{B}$  のことを単に「磁場」と呼ぶ本も中にはある。英語では、 $\vec{B}$  を「magnetic induction」と呼ぶこともある。

<sup>17</sup> 微小辺に微小でない力が働いたら、その微小辺は無限の加速度を持ってしまう。

## 第6章 静磁場の法則その1 — アンペールの法則

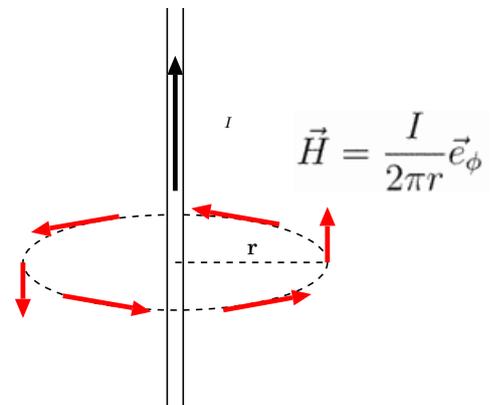
前の章では、電場と電荷の相互作用を考えるのと同様に、磁場と電流の相互作用を考えていくことができることを示した。この章では、磁場と電流の相互作用を記述する法則を具体的に数式で表現していこう。そのために、電流が磁場を作っている状況の中でもっともシンプルである、「無限に長い直線電流による磁場」について考えるところから始めよう。

### 6.1 無限に長い直線電流による磁場

実際には無限に長い直線電流を作ることはできないが、十分長い導線を設置して実験してその磁場を測定することができる（さらに導線の長さによる実験結果の違いを分析すれば、「無限に長い導線ならどうなるか」を推測することも可能であろう）。そうやって実験することで、次のような結果を得ることができる。

#### 無限に長い直線電流による磁場

真空中に無限に長い直線電流  $I$ [A] がある時、その電流から距離  $r$  離れた点での磁場は、 $\frac{I}{2\pi r}$  で、電流と垂直な平面上で、電流からその地点に伸ばした線と垂直な方向で、電流に対して右ネジの方向を向く。



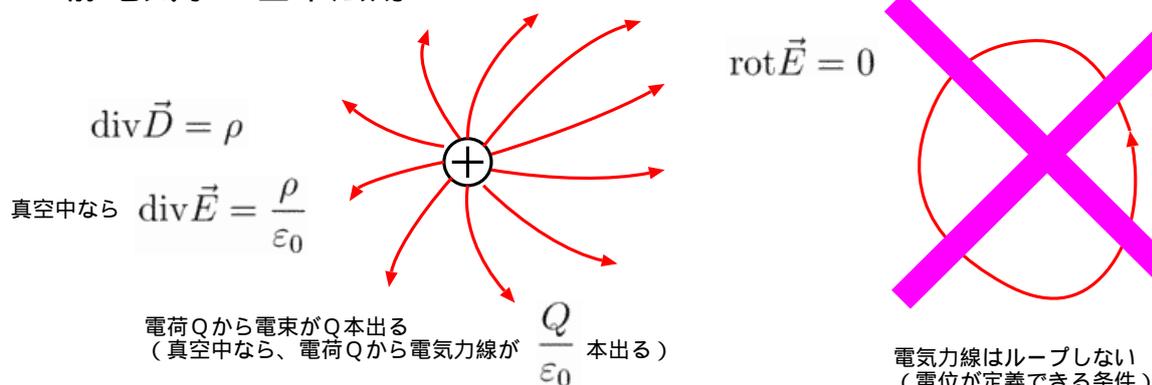
これを円筒座標または極座標を取った時の方位角  $\phi$  方向の単位ベクトル  $\vec{e}_\phi$  を使って表現すれば、

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\phi \quad (6.1)$$

である<sup>1</sup>。  $\vec{e}_\phi$  は各点各点で  $z$  軸周りに回転する方向を向く単位ベクトルである。

ところで、静電場の場合の基本法則は

#### 静電気学の基本法則



のようにまとめられた<sup>2</sup>。

<sup>1</sup>真空中であれば  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\phi$  と書いても同じ。

<sup>2</sup> $\text{rot } \vec{E} \neq 0$  なら電気力線がループする、ということではないことに注意（逆は正しい。ループがあれば  $\text{rot } \vec{E} \neq 0$  である）。前にも述べたが、電気力線がループしなくても  $\text{rot } \vec{E} \neq 0$  になる例はある。

電荷に対応する「磁荷」は実は存在していない<sup>3</sup>ということがわかっているから、 $\text{div}\vec{B} = 0$ という法則<sup>4</sup>が成立する。

一方、磁力線はループすることもあることがわかった。ということは、 $\vec{H}$ については $\text{rot}\vec{H} = 0$ という法則は成立しないということになる。ではどんな法則が成立するのだろうか？—実験的に得られた式の一つである $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\phi$ から予想をたててみよう（あくまで予想であるから、どんな場合でも予想が正しいかどうか、検証することが必要である）。

$\text{rot}$ の意味は「微小な面積を囲む閉曲線にそってベクトル場 $\vec{A}$ を線積分した値を単位体積あたりに直したもの」であった。もっと物理的に表現すると「 $\vec{A}$ を各点各点で場所に依存して働く力だとみなして、微小な面積を囲む閉曲線にそってその力を受けながら動いた物体がどれだけ仕事をされたかを考え、それを単位面積あたりに直すとそれが $\text{rot}\vec{A}$ である」ということになる。

そこで、磁場を力だとみなしてある面積を一周させた時にどれだけの仕事をするかを考えよう。「みなして」などと言わなくても磁場は単位磁極に働く力と定義されているのだから、単位磁極をある面積を回るように一周させた時に磁場がする仕事を計算して単位面積あたりに直せば、 $\text{rot}\vec{H}$ を計算できる。

電流と垂直な面上で電流を中心とする半径 $r$ の円の上を、 $m[\text{Wb}]$ の磁極が運動する場合を考えると、力は一定値 $m \times \frac{I}{2\pi r}$ であり、常に運動方向に働くから、距離をかければ仕事が計算できる。すなわち、

$$m \times \frac{I}{2\pi r} \times 2\pi r = mI \tag{6.2}$$

となる。ここで半径 $r$ に依存しない答が出ていることに注意しよう（遠いところでは磁場が弱くなるが、その分距離が長くなるので、仕事は一定値となる）。

では次に、図のような経路で動かすとどうなるかを考えてみよう。図のA Bでは、磁場は

$$m \times \frac{I}{2\pi r} \times r\Delta\theta = \frac{m\Delta\theta}{2\pi} \tag{6.3}$$

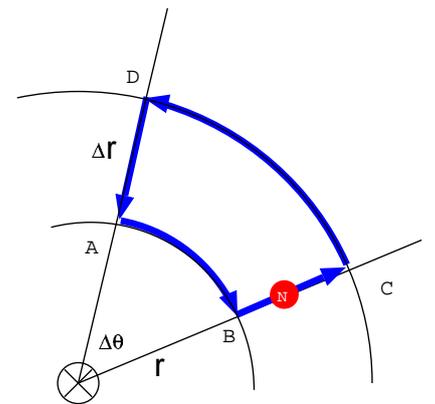
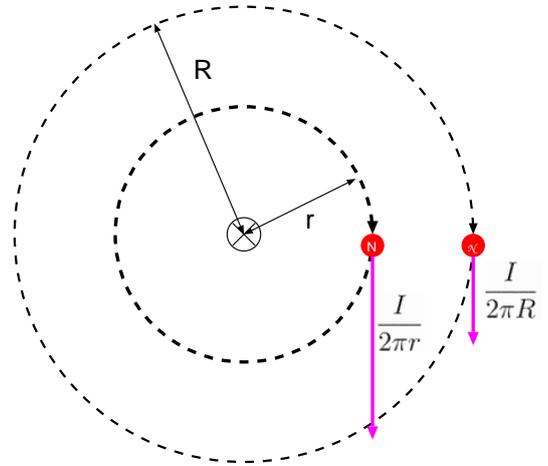
の仕事をする。B Cでは磁場による力と運動方向が垂直なので仕事をしない（これは後のD Aも同様）。C Dでは

$$-m \times \frac{I}{2\pi(r + \Delta r)} \times (r + \Delta r)\Delta\theta = -\frac{m\Delta\theta}{2\pi} \tag{6.4}$$

の仕事がされる（これもまた、半径 $r + \Delta r$ への依存性がなくなったことに注意）。一周分トータルの仕事は0になってしまった。

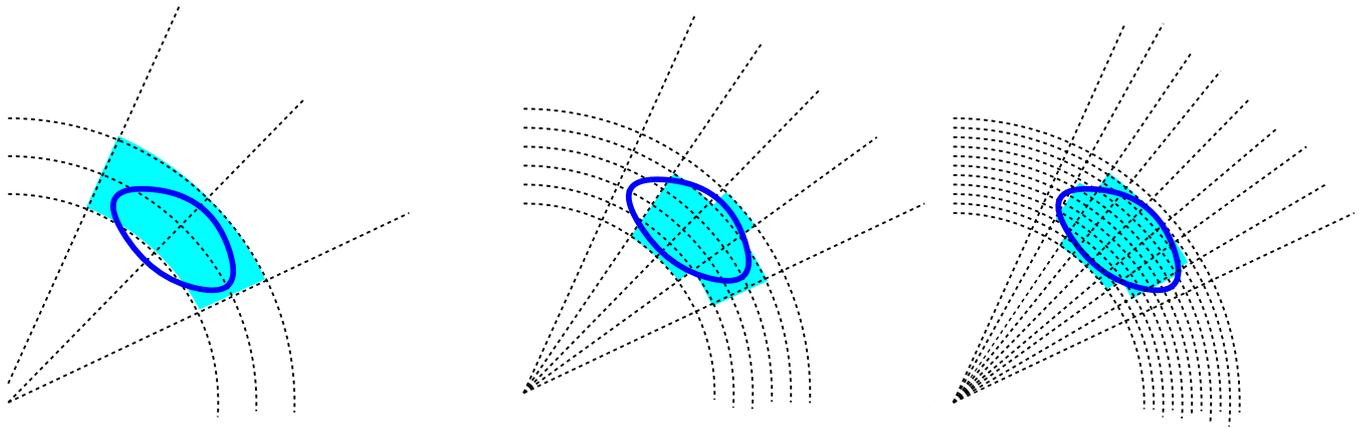
これから「電流を回るように磁極を動かすと仕事は $mI$ となる（電流をまわらないで磁極を動かすと仕事は0）」という法則が成り立つことが予想される。今考えた経路だけではなく、一般の経路でもそうだろうか???

一般の経路で考える時には、再び物理の定石である「細かく分けて考える」という手段を使う。つまり、



<sup>3</sup>もちろん、将来発見されるかもしれない。その時には電磁気の教科書全部に改訂が必要である。

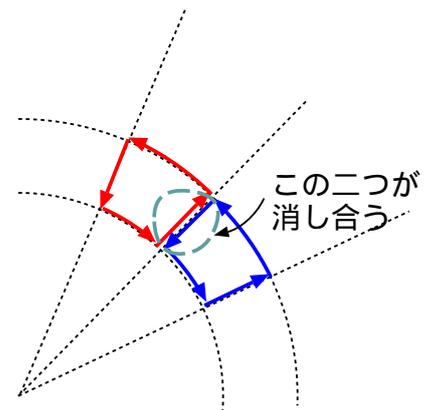
<sup>4</sup>真空中では $\text{div}\vec{H} = 0$ と $\text{div}\vec{B} = 0$ は同じ式であってどっちを使っても差し支えない。物質中では $\text{div}\vec{B} = 0$ だけが正しい。これについては後で述べる。



のように、任意の図形を既に計算した形の小さな図形の集まりと取るのである。右へ行くほどより細かい分割を考えている。最終的に分割のサイズを無限小とした極限で、任意の図形は上で計算した図形の集合として扱うことができる。

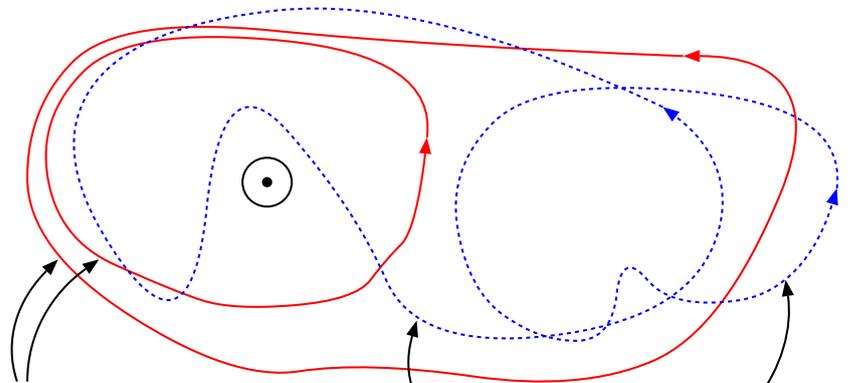
こうやって細かく分けた時、「後でくっつけることができるのかどうか」という点が重要になるが、今の場合、ループの方向を常に同じになるように（「上から見て反時計回り」とか）決めておけば、となり合う微小ループの接する部分については仕事（線積分）の寄与は常に消え「ループの外側部分」だけが残るのである。

なお、実験により、磁場についても重ね合わせの原理が成立することが確かめられているので、電流が一本でなく複数本ある時も同様の計算が成立すると結論してよい。



## 6.2 アンペールの法則

以上をまとめると、次のような結論が出る。右の図に書いた、電流の周りを回っていないループ（破線）の場合は、磁場のする仕事はトータルで0となる。一方電流の周りを回るループ（実線）の場合は磁場のする仕事は磁極の大きさ×電流となる。後者の場合、経路を小さく分割していった時に、一個だけ電流の周りを円を描いて回るという経路が含まれていると考えればよい。



以上から、

磁場が仕事をするループ  
アンペールの法則

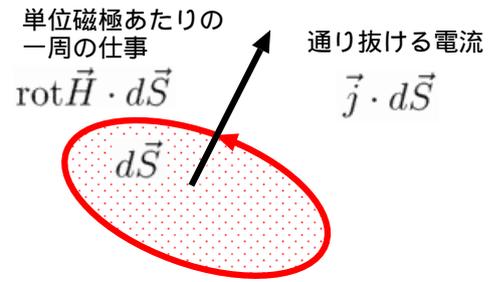
磁場が仕事をしないループ

電流  $I$ [A] の周りを回るように磁極  $m$ [Wb] を周回させると、磁場は一周の間にちょうど  $mI$ [J] の仕事をする。

という法則（「アンペールの貫流則」と呼ぶこともある）があることが結論される。いろんな電流を使って磁場を測定する実験から、この法則を導き出されたわけである<sup>5</sup>

<sup>5</sup> 「アンペールの法則」と言われているが、数式の形でまとめたのはマクスウェルである。

アンペールの法則における周回の軌道を、微小面積  $d\vec{S}$  の周りを回るような経路に設定する。すると、この時の仕事はすなわち、 $m \times \text{rot}\vec{H} \cdot d\vec{S}$  となる<sup>6</sup>。



電流が単位面積あたり  $\vec{j}$  という密度で流れているとすれば、アンペールの法則は

$$m \text{rot}\vec{H} \cdot d\vec{S} = m\vec{j} \cdot d\vec{S} \tag{6.5}$$

という式となり、両辺を  $md\vec{S}$  で割れば<sup>7</sup>、

アンペールの法則の微分形

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} \tag{6.6}$$

という式が作られる。この式は、真空中であれば  $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$  と同じ式である。

ここでは無限に長い直線電流の例に対してのみこの式が成立することを確かめたが、幸いなことにこの式は静磁場の任意の状況で成立することがわかっている。 $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$  と、上に書いた  $\text{div}\vec{B} = 0$  を合わせると、真空中の静磁場の基本法則となる。静電場、静磁場の基本法則は以下のようにまとまる。

	div	rot
電場	$\text{div}\vec{D} = \rho$	$\text{rot}\vec{E} = 0$
磁場	$\text{div}\vec{B} = 0$	$\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$

上の分類では式で div を使ったか rot を使ったかで分けたが、物理法則としての役割を基準に分類するならば、

	源と場の関係	ポテンシャルが定義できる条件
電場	$\text{div}\vec{D} = \rho$	$\text{rot}\vec{E} = 0$
磁場	$\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$	$\text{div}\vec{B} = 0$

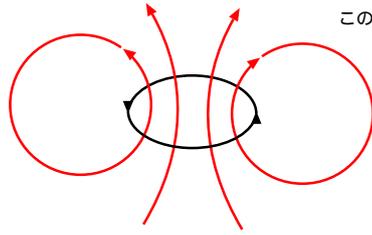
という分類が有効である。静電場において  $\text{rot}\vec{E} = 0$  という式は、電位を定義して  $\vec{E} = -\text{grad}V$  と書くことができることを保証する条件であった。これはベクトル解析における「rot が 0 であるベクトル場はスカラー場の grad で書ける」という定理のおかげである。

$\text{div}\vec{B} = 0$  という式もまた、磁場に対するポテンシャルを定義することができる条件になる。ここで注意しておくべきことは、この「磁場に対するポテンシャル」は電場における「電位」とは全く違ったものになるということである。大きな違いは、このポテンシャルは電流というベクトル量を作るポテンシャルなので、ベクトル量になるということである<sup>8</sup>。ベクトル解析には「div が 0 になるベクトル場はベクトル場の rot で書ける」という定理もあるので、 $\text{div}\vec{B} = 0$  であるところの  $\vec{B}$  は  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  と書くことができる。この  $\vec{A}$  を「ベクトルポテンシャル」と呼ぶ。ベクトルポテンシャルについては、電流と電流の間に働く力について学んだ後で再び触れよう。

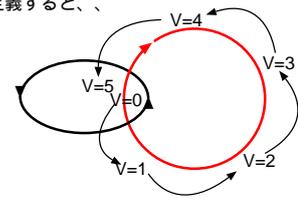
<sup>6</sup>力は  $m\vec{H}$  であり、微小面積  $d\vec{S}$  を回る仕事は  $\text{rot}(m\vec{H}) \cdot d\vec{S}$  ということになるが、定数である  $m$  は rot という微分方程式の外に出してもよい  
<sup>7</sup>というのはもちろん、文字通りの意味で「割る」わけではない。 $(\text{rot}\vec{H} - \vec{j}) \cdot d\vec{S} = 0$  と変形してのち「 $d\vec{S}$  というのは任意のベクトルだから、その任意のベクトルとの内積をとって 0 ということは  $\text{rot}\vec{H} - \vec{j} = 0$  だ、というふう考えていく。  
<sup>8</sup>電荷というスカラー量が源となって作られるポテンシャルである電位はスカラーであった。

## 6.3 磁位

電場  $\vec{E}$  に対して電位  $V$  を考えて  $\vec{E} = -\text{grad}V$  という関係を使って考えることで静電場の計算を簡単にすることができた。ならば、磁場  $\vec{H}$  に対して磁位  $V_m$  (スカラー量) を考えて  $\vec{H} = -\text{grad}V_m$  のように表すことができるのでは、と考えるところである。



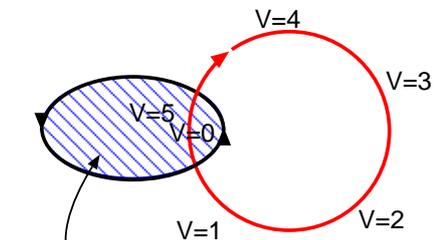
この状況でムリヤリ磁位を定義すると、



のように、一カ所に二つの磁位があることになってしまう。

しかし「磁位」という考え方は問題を含んでいる。  $\text{rot}\vec{H}$  が 0 ではないからである。「磁場は磁位の高いところから低いところに向かう」と考えてみよう (これは「電場は電位の高いところから低いところに向かう」という物理現象の磁場バージョンである)。すると「磁場をさかのぼる方向に進めば、磁位はどんどん上がっていく」ことになる (電位の場合ならば、「電場をさかのぼる方向に進めば電位はどんどん上がっていく」ということになるが、これは全く正しい)。図のような円形電流の場合にこれを適用すると、どんどん磁場をさかのぼっていき、「磁位はどんどん上がっていったのに、元の場所に戻ってきてしまった」ということになるわけである。

ただし、「磁位」というものは全く使えないのかというと、そんなことはない。「一周回ってきても元に戻らない関数<sup>9</sup>」であるということに注意して使えば、じゅうぶん使える。たとえば一例として、空間の一部に「切れ目」を入れて、その部分で磁位が不連続になると考えてもよい。不連続な関数を考えるのはいろいろな問題があるので、その不連続面は問題と関係ないところに来るようにしてややこしい問題を回避するようにする (例えば考えている物体は決してその不連続面を通らないような状況のみを考える)。また、「電流が磁場を作る」という考え方でなく「磁極が磁場を作る」という考え方に立った場合も、磁位は有効である。



この面を越えると、磁位が 5 だけジャンプする

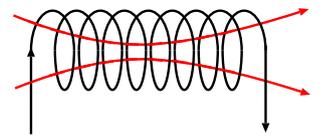
そのような問題点に注意さえ払えば、磁位を使って磁場を計算する方法も有用になる。しかし、このテキストではこれ以上取り上げないことにする。直線電流の場合で磁位を考えるとどのようになるかについては、章末演習問題の 6-3 を見よ。

## 6.4 アンペールの法則の応用例

### 6.4.1 ソレノイド内部の磁場

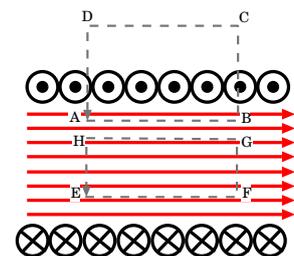
アンペールの法則を使って磁場を求めることができる例として、ソレノイドコイル内部の磁場を考えよう。「ソレノイドコイル」とは、導線をびっちり詰めて巻いたコイルを意味する。

実際のコイルでは磁場は多少は外に漏れることもあるのだが、ここでは理想的状況を考えて、コイルの内側のみ磁場があると考えよう。すると、コイルの中の磁場はコイルの軸方向を向く (少なくともコイルの端以外では)。そのような状況で、右下図のようにループを考えよう。



ループ EFGH は、内部に電流が通っていない。よってこのループに沿って磁極を一周させると、磁場のする仕事は 0 でなくてはならない。F-G と H-E では明らかに磁場は仕事をしない (進行方向と垂直)。よって、E-F での仕事と G-H での仕事がちょうど逆符号とならなくてははいけない。ということは直線 EF 上と直線 GH 上では、磁場の強さが全く同じでははいけない。これはコイルの内側のどこでも成り立つから、コイル内部では磁場の強さは一様となる。

ループ ABCD では、C-D での仕事も 0 である。磁場が仕事をするのは A-B のみである。直線 AB の長さを  $L$  とし、磁場の強さを  $H$  とすれば、磁場が一周です仕事



<sup>9</sup> こういう関数は「多価関数」と呼ばれる。複素関数論でリーマン面に cut が必要な状況に似ている。

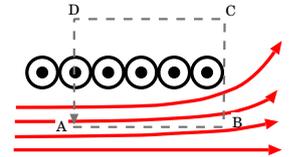
単位磁極に対しては  $HL$  となる。ループ ABCD の中には電流が貫いている。今コイルが単位長さあたり  $n$  回巻きになっているとすると、電流  $I$  が  $nL$  回貫くことになり、全電流は  $nLI$  となる。アンペールの法則により、

$$HL = nLI \quad \text{ゆえに} \quad H = nI \tag{6.7}$$

とソレノイドコイル中の磁場の強さを求めることができた。

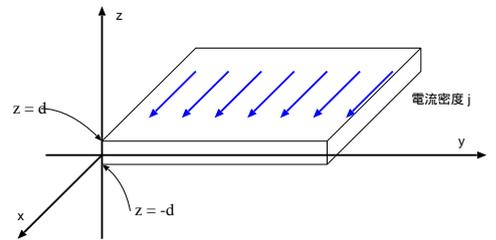
磁場の強さが「巻き数」そのものではなく「単位長さあたりの巻き数」になるのは、電流が遠ざかればそれだけ電流の作る磁場の強さも弱くなるからである。よってコイル内の磁場の強さは「その近辺にどれだけの電流を詰め込むことができるか」によって変わることになるわけである。

この式はコイルの端では成立しないことは言うまでもない。端では磁力線が「混雑を嫌う」という性質によって離れていって、密度が下がるからである。では端の方ではアンペールの法則は成立しないのかというと、もちろんそんなことはない。磁場が広がるということは図の上へ向かう磁場成分があるので、B-Cの部分でも磁場が仕事をすることになり、磁場の仕事は減らないのである。



### 6.4.2 平面板を流れる電流

無限に広い板（厚さ  $2d$  として、 $z$  軸に垂直に配置して、 $z = d$  の面と  $z = -d$  の面が表面になるようにしよう）を考えて、これにある方向に電流密度  $j$  のような電流を  $x$  方向に流す。この板の近所ではどのような磁場ができるだろうか。

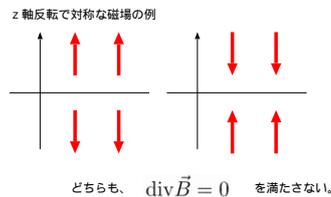


問題を解くためにはこの状況の対称性を手がかりにする。まず、 $x, y$  方向にいくら移動して物理的状況が変わらない（無限に広い板に一樣に電流が流れているので）ということを見ると、できる磁場は  $z$  のみに依存する。

次に、電流が  $x$  方向に流れていることを考えると、磁場はそれに垂直な  $yz$  面内にはできるはずである。

一方、状況は  $z \rightarrow -z$  という反転に関して対称である。ゆえに磁場の  $z$  成分が  $z > 0$  で上向きなら  $z < 0$  では下向きになるだろう（あるいはこの逆）。しかしそれでは  $\text{div} \vec{H} = 0$  にならない（磁場に湧き出しや吸い込みがあることになる）。

よって磁場は  $z$  成分もない。つまり  $y$  成分しかないであろう。 $|z| > d$  の部分（電流の流れていない部分）では  $\text{rot} \vec{H} = 0$  であるから、その部分では  $H_y$  は変化できない。電流のある部分では、 $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$  の  $x$  成分を考えると、



$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j \tag{6.8}$$

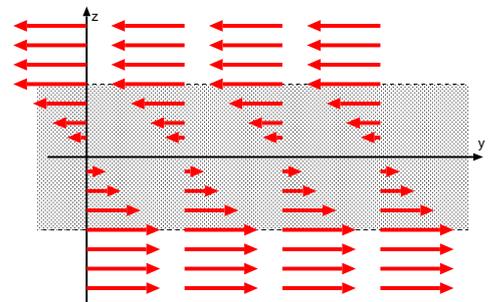
という式が成立しているので、 $H_y = -jz$  というのが解になるだろう。

まとめると、

$$H_y = \begin{cases} -jd & d < z \\ -jz & -d < z < d \\ jd & z < -d \end{cases} \tag{6.9}$$

ということになる。

磁場のできる状況をグラフに書くと右の図ようになる。網掛けした部分が電流が流れている部分で、この部分では  $\text{rot} \vec{H}$  が0ではない。電流が流れていないところでは磁場は一定になり、もちろん  $\text{rot} \vec{H} = 0$  である。

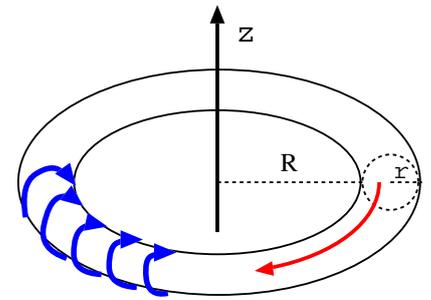


## 6.5 章末演習問題

【演習問題 6-1】無限に長い直線電流による磁場  $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\phi$  を直交座標で表現するとどのようになるか。

その式を使って  $x = 0, y = 0$  の線上を除けば  $\text{rot} \vec{H} = 0$  であることを確認せよ。

【演習問題 6-2】アンペールの法則を使って、図のようなドーナツ型のコイル（電流  $I$  が流れていて、全部で  $N$  回巻いてあるとする）の内側での磁場の強さがどのようになるかを求めよ。ただし、コイルの外には一切磁場は漏れることなく、コイル内の磁力線は全て図の  $z$  軸上に中心を持つ円の形をしているものとする。



【演習問題 6-3】無限に長い直線電流による磁場に対応する磁位は

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi$$

と表現することができる。これの  $-\text{grad}$  を取ると磁場は円筒座標  $(\rho, \phi, z)$  で表現して  $\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi$  が出てくることを確認せよ。なお、円筒座標における  $\vec{\nabla}$  は

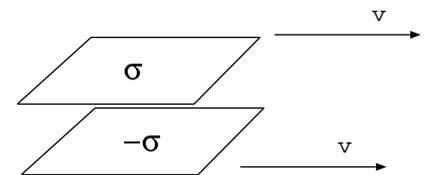
$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

である。

確かに  $\vec{H} = -\text{grad}V_m$  が成立するという意味では  $V_m$  を「磁位」と呼んでいいのだが、これを電位と同様にポテンシャルとして使用しようとする、困ったことが起こる場合がある。どこで困るのだろうか??

【演習問題 6-4】極板間の距離が  $d$  で、十分広い平行平板コンデンサーが速度  $v$  で極板と平行な方向に走っている。

両極板には面積あたりの電荷密度が  $\pm\sigma$  になるように電荷を与えられている。極板間は真空である。電荷が運動するという事は、電流があるのと同じだから、極板間には磁場が発生する。



(1) 極板間にはどのような磁場が発生するだろうか?? —概略図を書いた後、極板の真ん中付近では極板の外側には磁場はないと近似して極板間の磁場の強さを計算せよ。

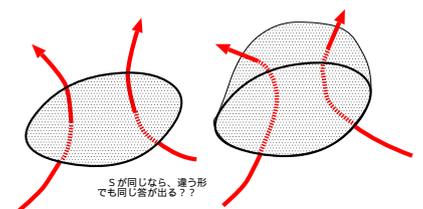
(2) 極板には電場による引力が働く。その力の大きさは極板の単位面積あたり、 $\frac{1}{2\epsilon_0}\sigma^2$  である。磁場によってはどのような力が働くだろうか? —また、二つの力はどちらが大きいか?

(注: 電場による力に  $\frac{1}{2}$  がつくのは、この電場が極板間だけに存在し、外側で 0 になることが効いている(つまり、電荷が完全に電場に浸されていないことが効いている)。磁場についても同様であることに注意)

【演習問題 6-5】静磁場のアンペールの法則の微分形 ( $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$  をある面積  $S$  で積分し、ストークスの定理を適用すると

$$\int_{\partial S} d\vec{x} \cdot \vec{H} = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{j} \tag{6.10}$$

になることを示せ ( $\partial S$  は「 $S$  の境界」を示し、 $\int_{\partial S} d\vec{x}$  は境界にそっての線積分である)。今作った式の右辺は、境界  $\partial S$  が同じならば、どんな形でも同じ答を出すことになる。なぜそうなるのか、説明せよ。





# 第7章 静磁場の法則その2 — ビオ・サバルの法則

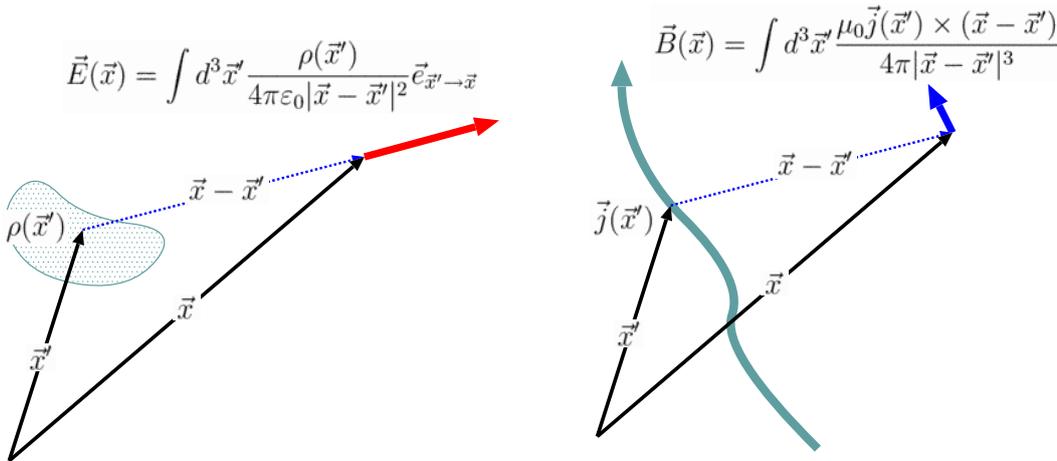
アンペールの法則はきれいにまとめられているが、実際の状況では使いにくいこともある。磁場を線積分したもの（磁場を力とみなした時の仕事）を与える法則であるため、磁場そのものを計算することができるのは、対称性がいい場合に限られる。この事情はガウスの法則が便利だが対称性がない状況では使いにくかったのと全く同様である<sup>1</sup>。この章では、静磁場を求めるためにもう少し使い勝手のよい方法を考えよう。

## 7.1 ビオ・サバルの法則

ガウスの法則  $\text{div}\vec{D} = \rho$  にせよアンペールの法則  $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$  にしても、未知の量であることが多い  $\vec{D}, \vec{H}$  を微分すると  $\rho, \vec{j}$  が出てくるという形の式になっている。ゆえに  $\vec{D}, \vec{H}$  を求めるには積分が必要である。電場の場合、重ね合わせの原理があることと、点電荷の作る電場が  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$  だったことを使って、電荷密度  $\rho$  の電荷分布が存在しているならば、

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \tag{7.1}$$

という積分をすることで電場を計算できた。この式と  $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  は等価である<sup>2</sup>。

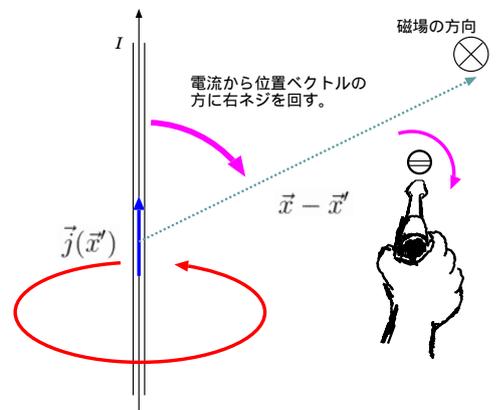


磁場の場合でこれに対応する法則を作ろう。つまり、

$$\vec{B}(\vec{x}) = \int d^3\vec{x}' \left( \vec{j}(\vec{x}') \text{ と } \vec{x} - \vec{x}' \text{ の関数} \right) \tag{7.2}$$

という法則を作り、各点における電流密度  $\vec{j}(\vec{x}')$  が与えられればその各点の電流密度が場所  $\vec{x}$  にどんな磁束密度を作るかを考え（当然それは  $\vec{x} - \vec{x}'$  に依存する）、全空間の  $\vec{j}(\vec{x}')$  の影響を足し上げる（積分する）ことで  $\vec{B}(\vec{x})$  がわかるようにしたいわけである（上の図には既に答が書いてあるが、これを以下で導出していきたい）。

まず最初に「どんな向きの磁場ができるのか」を考えよう。その向きも、 $\vec{j}$  と  $\vec{x} - \vec{x}'$  で決まる。直線電流の例からわかるように、電流の作る磁場は、電流とも、電流からその位置にひばった変位ベクトル（図の  $\vec{x} - \vec{x}'$ ）とも垂直である。よって、 $\vec{j} \times (\vec{x} - \vec{x}')$  が出てくるとを仮定する。 $\vec{j} \times (\vec{x} - \vec{x}')$



<sup>1</sup>ガウスの法則の場合「電気力線の本数 = 電場の面積積分」が「電気量 ÷  $\epsilon_0$ 」で与えられるため、対称性がよくないと電場は求められない。

<sup>2</sup>これはいわば「 $\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}$  をかけて積分する」という操作が  $\text{div}$  の逆演算のようなものだ、ということ。

は  $\vec{j}$  と  $\vec{x} - \vec{x}'$  ととも直交し、 $\vec{j}$  から  $\vec{x} - \vec{x}'$  の方向に右ネジを回した時に進む方向であるので、磁場のできる方向を向いているようである。

こうして、各点各点にある微小電流素辺が作る微小磁場を足していったものがその場所の磁場になる。

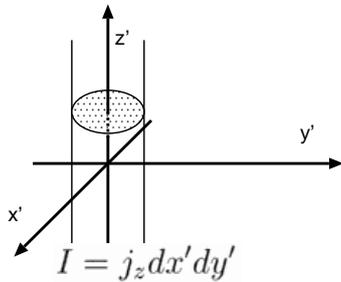
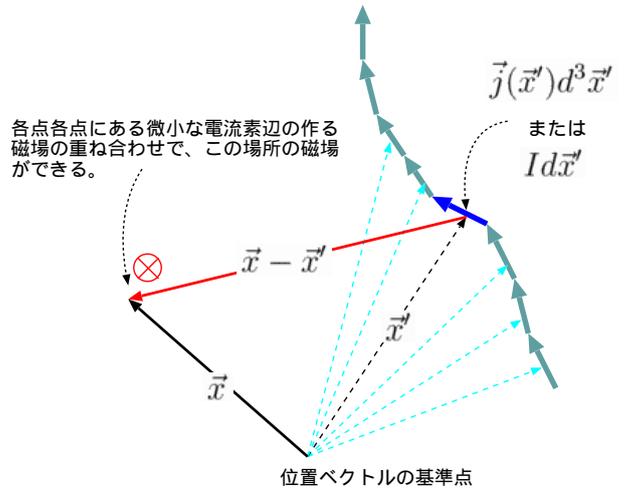
ではある程度この形を予想しよう。まず、

$$\vec{B}(\vec{x}) = K \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^n} \quad (7.3)$$

としてみる。K は比例定数であり、n は距離によってどの程度磁場が弱まっていくかを決定する数字である。

磁場と電場の法則がよく似ていることから考えて「電流の作る磁場も、距離の二乗に反比例するのは？」と予想すれば、 $n = 3$  となる。「二乗に反比例」なのに  $n = 2$  でないのは、分子にも  $\vec{x} - \vec{x}'$  があるからである<sup>3</sup>。

とりあえず  $n = 3$  とおいて、この式で計算した磁場が無限に長い直線電流の場合の答である  $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\phi$  を再現するように、定数 K の値を決めてみよう。



電流を z 軸に沿って置く。電流密度は  $j_z$  しかない。よって  $\int dx' dy' dz' j_z$  という積分<sup>4</sup>を行うのだが、このうち  $\int j_z dx' dy'$  をやってしまうと、全体の電流 I になる（電流密度を面積積分したことに対応する）。電流は  $z'$  軸 ( $x' = y' = 0$ ) の付近に局在している（つまりその部分だけが 0 でない）場合を考えているので、積分の結果  $x' = y' = 0$  の部分だけが残ると考えてよい。結局  $\vec{x}' = z' \vec{e}_z$  となる。後は残った  $dz'$  積分をやっていく。

$$\vec{x} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \text{ として、}$$

$$\vec{x} - \vec{x}' = r \vec{e}_r + (z - z') \vec{e}_z \quad (7.4)$$

である。電流は  $I \vec{e}_z$  であるから、外積を取ることで  $\vec{e}_z$  の部分は消えてしまって、 $\vec{I} \times (\vec{x} - \vec{x}') = I(\vec{e}_z \times r \vec{e}_r) = r I \vec{e}_\phi$  となる（下の図を参照）。

これを使うと、

$$\vec{B}(r) = K \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{I r}{(r^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_\phi \quad (7.5)$$

となる。

答は z によらないことは明らかなので、 $z = 0$  の場合を計算することにしよう。

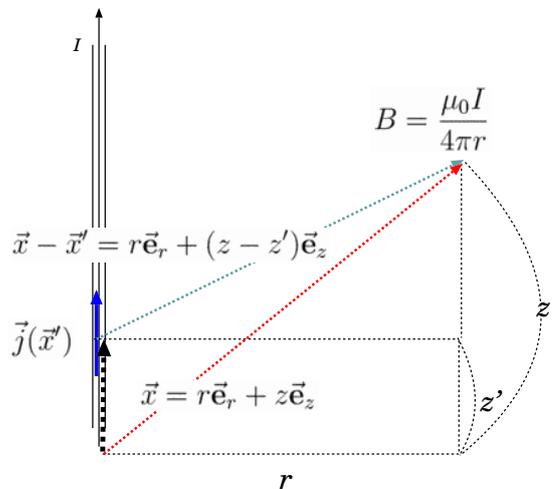
$$\vec{B}(r) = K \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{I r}{(r^2 + (z')^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_\phi \quad (7.6)$$

を計算しよう。この積分は前に帯電した棒の場合にした計算と同じである。よって、 $z' = r \tan \theta$  とした<sup>5</sup>後  $\theta$  を  $-\frac{\pi}{2}$  から  $\frac{\pi}{2}$  まで積分すれば計算できて、結果は

$$\vec{B}(r) = \frac{KI}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \frac{1}{(1 + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_\phi = \frac{2KI}{r} \vec{e}_\phi \quad (7.7)$$

となる。

この答が  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  と一致するにはいけないので、比例定数 K は  $\frac{\mu_0}{4\pi}$  とすればよい<sup>6</sup>。



<sup>3</sup> $n = 3$  を予想するには、他にも次元解析を使って右辺が正しく磁場の次元を持つようにする、という方法もある。

<sup>4</sup>さっきまでは  $\int d^3x'$  と略記していたが、省略なしに書くと  $\int dx' \int dy' \int dz'$  となる。

<sup>5</sup>もし  $z = 0$  としなかったのなら、ここで  $z - z' = r \tan \theta$  と置けば、後は同じ結果になる。

<sup>6</sup> $\frac{\mu_0}{4\pi}$  の値は、 $10^{-7}$ 。

以上から、体積積分の形で書いたビオ・サバル (Biot-Savart) の法則の形が決まった。

ビオ・サバルの法則 (体積積分形)

電流密度  $\vec{j}(\vec{x})$  が空間に存在している時、 $\vec{x}$  における磁束密度  $\vec{B}(\vec{x})$  は

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (7.8)$$

である。

今は無限に長い直線電流の場合でのみ式を合わせたので、実際に他の状況でも成立するかどうかは実験で確認すべきことであるが、もちろん確認済である。

さて、電流密度が与えられている時の式は以上の通りだが、実際には電流密度ではなく電流  $I$  と、その電流がどの場所を通っているかという線 (導線の位置) が与えられている場合が多い。太さの無視できる細い導線に電流  $I$  が流れているとする (この  $I$  は定数である。分岐する電流は考えないので、導線上では一定)。その時は電流密度は導線のある場所でのみ 0 ではないので、空間積分は導線のある場所のみの線積分でよいことになる。

電流が  $x$  方向を向いている時であれば、

$$\int dx \int dy \int dz j_x \vec{e}_x \times (\dots) \quad (7.9)$$

という計算をしなくてはいけないわけだが、 $\int dy \int dz j_x$  でちょうど「電流密度 × 電流に垂直な面積」になっているから、この積分で電流  $I$  が出る。

つまり積分は

$$\int dx I \vec{e}_x \times (\dots) \quad (7.10)$$

に変わるわけである。今は電流が  $x$  方向を向いているという特殊な状況を考えていたので  $dx$  積分だけが残る結果となったが、電流が一般の方向を向いているならば答は3つの成分を持つことになる。つまり、電流の  $x$  成分に比例する部分は  $dx$  で積分し、 $y$  成分、 $z$  成分に対応する部分はそれぞれ  $dy, dz$  積分することになる。ようは、

$$\int (I dx \vec{e}_x + I dy \vec{e}_y + I dz \vec{e}_z) \times (\dots) \quad (7.11)$$

という計算をしなさい、ということである。結果をまとめると、

$$\int dx \int dy \int dz \vec{j} \times (\dots) \rightarrow I \int d\vec{x} \times (\dots) \quad (7.12)$$

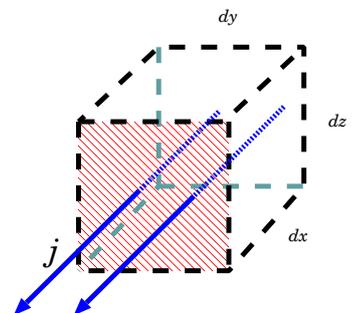
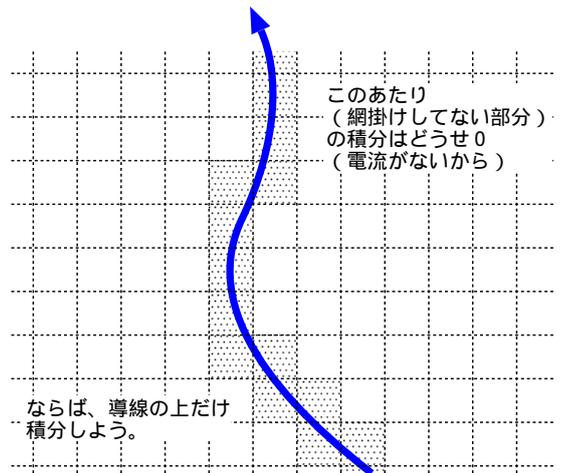
と積分が書き換わる。 $d\vec{x}$  は  $(dx, dy, dz)$  という成分を持つベクトル ( $d\vec{x} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ ) である。

$$\int d\vec{x} \times \vec{A} \quad (7.13)$$

のように書くと、この積分結果はベクトルであり、

$$\left( \int d\vec{x} \times \vec{A} \right)_x = \int (dy A_z - dz A_y), \left( \int d\vec{x} \times \vec{A} \right)_y = \int (dz A_x - dx A_z), \left( \int d\vec{x} \times \vec{A} \right)_z = \int (dx A_y - dy A_x) \quad (7.14)$$

$I$  が定数なので積分の外に出てしまったことに注意。この積分の置き換え ( $\int \int \int \int d^3\vec{x}' \vec{j} \rightarrow I \int d\vec{x}$ ) はよく使われる。



ビオ・サバルの法則（線積分形）

電流  $I$  が空間を流れている時、 $\vec{x}$  における磁束密度  $\vec{B}(\vec{x})$  は

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \tag{7.15}$$

である。積分は、存在している電流の経路全体について行う。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

7.1.1 ビオ・サバルの法則のもう一つの導出

少しだけ楽な導出方法をもう一つ紹介しておく。ただしこの導出法には「電流と磁場の間に働く力は互いに逆向きで大きさが同じである」という仮定が必要になる<sup>7</sup>。

今、場所  $\vec{x}$  に磁極  $m$  を置く。この磁極は場所  $\vec{x}'$  には

$$\vec{B} = m \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{4\pi|\vec{x}' - \vec{x}|^3} = \frac{m}{4\pi|\vec{x}' - \vec{x}|^2} \vec{e}_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}'} \tag{7.16}$$

という磁束密度ができる（磁場に関するクーロンの法則）。

この場所に  $I$  という大きさで、 $d\vec{x}$  なる長さを持つ電流素辺があったとすると、この素辺の受ける力は、 $\vec{F} = Id\vec{x} \times \vec{B}$  で計算して、

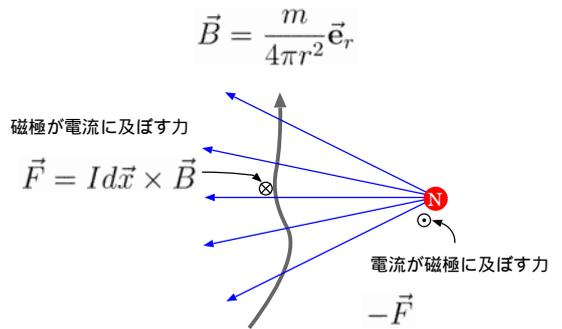
$$\vec{F} = mI \frac{d\vec{x} \times (\vec{x}' - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \tag{7.17}$$

となる。さて、今計算したのは「磁極が電流に及ぼす力」であるが、これと向きが逆で大きさが同じ力が「電流が磁極に及ぼす力」として働くとする。その力は

$$\vec{F} = -mI \frac{d\vec{x} \times (\vec{x}' - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}' - \vec{x}|^3} = mI \frac{d\vec{x} \times (\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \tag{7.18}$$

である。これを磁極の大きさ  $m$  で割れば「電流によって作られる磁場」 $\vec{H}$  が計算できる。結果は上の式と同じである。

【補足終わり】



【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

電場を求める積分と磁場を求める積分の決定的な違いを一つ述べておこう。それは

「孤立した電荷は存在するが、孤立した電流は存在しない」

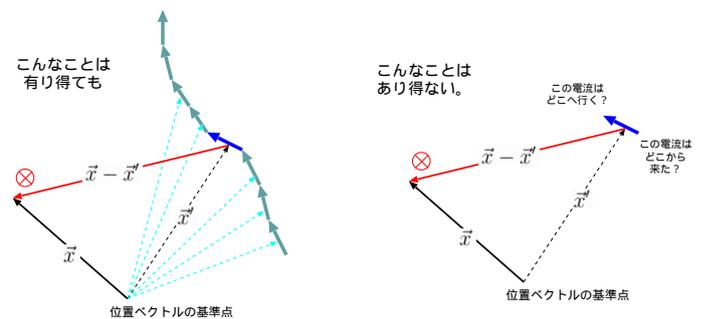
ということである。電荷はある一点にだけ存在することが有り得る（いわゆる点電荷）。しかし、電流は「流れ」である以上、一点だけに流れているわけにはいかず、かならず流れが繋がらなくては行けない。

数式で表現するならば、 $\text{div} \vec{j} = 0$  でなくては行けないのである。ビオ・サバルの法則はあたかも「微小な電流素辺が微小な磁場を作る」という法則のように書けているが、これを文字通りに解釈してはいけない。「微小な電流素辺」は実在しないからである。

なお、正電荷の溜まる場所と負電荷の溜まる場所があって、その間に電荷が流れて入れば「電流素辺」もあるのでは、と考える人もいるかもしれない。だがその場合、図の正電荷は減少し続けることになり、正電荷の作る電場は時間変動する。数式で書くと、 $\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  となる（つまり、電流が湧き出すところでは、電荷密度  $\rho$  が減少する）。

時間変動する電場は、磁場にある影響を与えるのである。したがって、このような状況で静磁場の法則であるビオ・サバルの法則を使うかどうかは慎重に検討してはいけない問題になる。これについては「時間変動する電磁場」の章で詳しく説明しよう。

【補足終わり】



<sup>7</sup>前にも述べたが、これは作用反作用の法則の一部である。単に逆向きではなく「逆向きで一直線上」とすればこれは作用反作用の法則そのものとなる。この仮定はもっともではあるが、実は電流と磁場の間に働く力の式を作る時に必須のものではない。一見作用反作用の法則を満たさないような式の作り方もある。

## 7.2 ビオ・サバルの法則の応用

この節では、ビオ・サバルの法則を使って実際に電流のつくる磁場を計算してみよう。

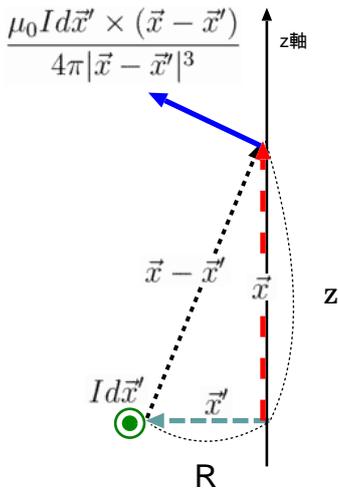
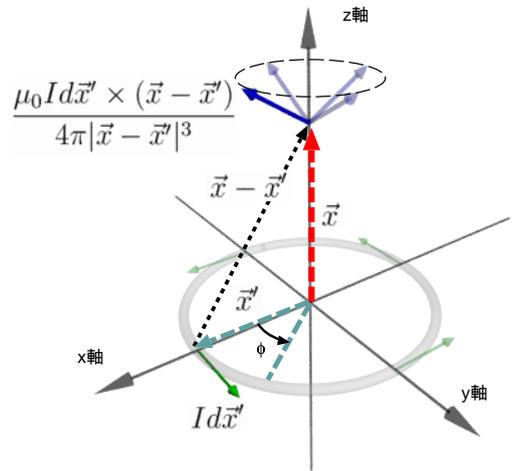
### 7.2.1 円電流の軸上の磁場

半径  $R$  の円形コイルに電流  $I$  が流れている。この時に周りにできる磁束密度を計算しよう。

図のように、円の中心が原点であるとして、この点を基点として位置ベクトルを考える。まず、比較的計算が簡単な、円の中心軸上を計算してみよう。

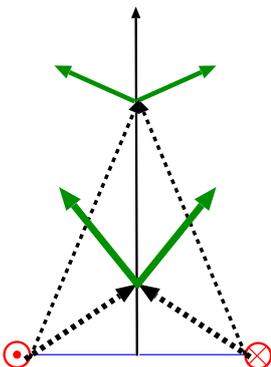
$\vec{x}'$  は原点から導線の上のどこか1点へと向かうベクトルである。 $d\vec{x}'$  というベクトルは  $\vec{x}'$  の変化量を表すベクトルであり、 $\vec{x}'$  が円の上を一周するうちに、やはり 360 度回転する。ここでは磁場を求める場所を  $z$  軸上にしたので、 $\vec{x} = z\vec{e}_z$  と書くことができる。 $\vec{x} - \vec{x}'$  は図のようなベクトルになり、 $I d\vec{x}'$  から  $\vec{x} - \vec{x}'$  へとネジを回した時にネジの進む向きは図のように斜め上の方向を向く ( $\vec{x} - \vec{x}'$  と  $I d\vec{x}'$  と垂直である)。

円上を  $\vec{x}'$  を積分するうちに、この微小磁場もくりと一回転することになる。もし  $z = 0$  なら、磁束密度は常に上 (+ $z$  方向) を向く。 $z \neq 0$  ではそうはいかないが、磁束密度の  $z$  方向成分は常に同じ大きさである。またそれ以外の成分は一周積分するうちに対称性から 0 になると考えられる。



となる。後は積分して、

が求めたい磁場である。



立体的に把握するのは難しいので、断面図で書いたものが左の図である。この図では電流は紙面表から裏へ向かい、 $\vec{x} - \vec{x}'$  と磁場が紙面に収めることができる方向になっている。

ここで、積分は半径  $R$  の円を一周するように (図の角度  $\phi$  を 0 から  $2\pi$  まで) 行われる。この間、 $d\vec{x}'$  は、大きさ  $Rd\phi$  で、円周方向を向いたベクトルとなる。

この場合、 $d\vec{x}'$  と  $\vec{x} - \vec{x}'$  は直交しているので、外積  $d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')$  の大きさは  $d\vec{x}'$  の大きさ  $Rd\phi$  と  $\vec{x} - \vec{x}'$  の大きさ  $\sqrt{R^2 + z^2}$  の単なる掛け算になる。つまり、微小磁束密度は

$$\frac{\mu_0 IRd\phi}{4\pi(R^2 + z^2)} \tag{7.19}$$

である。

三角形の相似を使ってこの磁束密度の  $z$  軸方向の成分を考えると、

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \frac{\mu_0 IRd\phi}{4\pi(R^2 + z^2)} \tag{7.20}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{7.21}$$

今出てきた答えは遠方では  $z^3$  に反比例して弱くなる。基本法則であるビオ・サバルの法則では自乗に逆比例して弱くなるのに、円電流の場合で計算すると三乗に逆比例するのは、今考えている電流がループを描いていて、結果として「左向き電流の作る磁場と右向き電流の作るが打ち消し合う」という形で磁場が弱まるからである。図を見るとわかるように、逆行電流のつくる磁場は  $z = 0$  付近ではほぼ同じ方向を向いて強め合うが、遠方では逆方向を向いて弱め合う。このために三乗逆比例するという答になるのである。

また、 $z = 0$  においては

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 I}{2R} \tag{7.22}$$

という答になる。距離  $R$  のところに直線電流が流れている場合より  $\pi$  倍強くなっているが、これは直線電流の場合より近い位置に電流がいることが効いている。

なお、以上を図形的でなく代数的に計算してしまうこともできる。ここで登場したベクトルを、円筒座標の基底を使って書き直すならば、 $d\vec{x}' = Rd\phi\vec{e}_\phi$  であり、かつ  $\vec{x} - \vec{x}' = z\vec{e}_z - R\vec{e}_r$  である。ただし、ここで書いた  $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi$  の向く方向は、場所  $\vec{x}'$  において向く方向である<sup>8</sup>。

ゆえに、

$$Id\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}') = IRd\phi\vec{e}_\phi \times (z\vec{e}_z - R\vec{e}_r) = IR(z\vec{e}_r + R\vec{e}_z)d\phi \tag{7.23}$$

となる<sup>9</sup>。ここで、 $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$  の外積は

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_z = \vec{e}_r, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\phi \tag{7.24}$$

になるということを使った。

これから求めるべき磁束密度は

$$\vec{B}(z\vec{e}_z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{IR(z\vec{e}_r + R\vec{e}_z)}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{7.25}$$

となる。 $\phi$  を変化させても（積分路として導線上をぐるりと回っても）変化しない量を外に出すと、

$$\vec{B}(z\vec{e}_z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi\vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2\vec{e}_z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi \tag{7.26}$$

となる。 $\vec{e}_z$  は変化しないが、 $\vec{e}_r$  は変化することに注意。 $\int_0^{2\pi} d\phi\vec{e}_r = 0$  となるので、結局最終結果は

$$\vec{B}(z\vec{e}_z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2\vec{e}_z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{7.27}$$

となる。

### 7.2.2 円電流の軸上以外での磁場

次に、 $z$  軸上から離れた場所での磁場を計算してみる。 $z$  軸から  $x$  軸方向に距離  $x$  だけ離れた場所を考えよう。 $y$  方向は考えない<sup>10</sup>。

まず、図からわかるように、

$$\vec{x} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z \tag{7.28}$$

である。また、 $\vec{x}'$  は、原点から角度  $\phi$  の方向に  $R$  進むベクトルであるから、

$$\vec{x}' = R\cos\phi\vec{e}_x + R\sin\phi\vec{e}_y = R\vec{e}_\rho \tag{7.29}$$

である。 $\vec{e}_\rho$  は円筒座標で  $z$  から遠ざかる距離である  $\rho$  が増加する方向を向いた単位ベクトルである。

$d\vec{x}'$  はこれを微分して、

$$d\vec{x}' = Rd\phi(-\sin\phi\vec{e}_x + \cos\phi\vec{e}_y) = Rd\phi\vec{e}_\phi \tag{7.30}$$

となる。 $\vec{e}_\phi$  は円筒座標の角度方向を向いた単位ベクトルである。

一方、微小電流素辺から磁場を計算したい場所へと向かうベクトルは

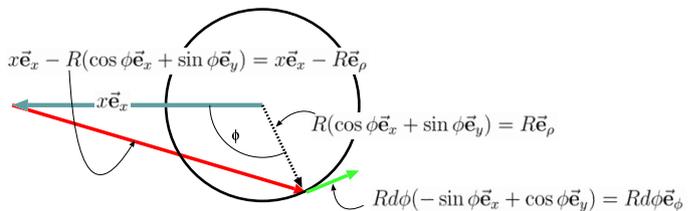
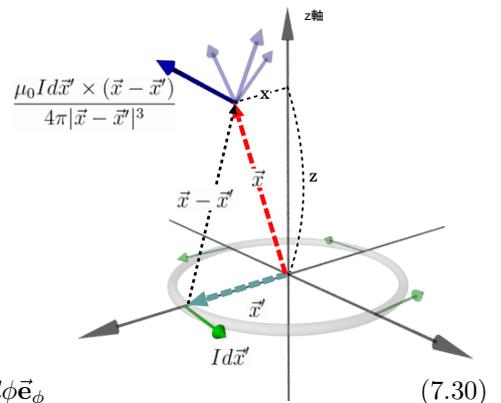
$$\vec{x} - \vec{x}' = z\vec{e}_z + x\vec{e}_x - R(\cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y) \tag{7.31}$$

となり、この長さ（距離）を計算すると

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx\cos\phi} \tag{7.32}$$

となる。

この式は、 $z$  軸真上から見た図（の図）で余弦定理を使って  $xy$  平面内での距離を考えた後、 $z$  方向にも  $z$  だけ離れているということを考えれば図形で出すこともできる。



<sup>8</sup>忘れやすいので念のため。円筒座標や極座標では、基底ベクトル  $\vec{e}$  は場所によって違う方向を向く。よってベクトル計算をする時「その  $\vec{e}$  はどの場所のものか」を確認しなくてはならない。直交座標なら不要。

<sup>9</sup>「同じベクトルの外積は0」と思って  $d\vec{x}' \times \vec{x}' = 0$  とやってしまわないよう、注意。図を見てもわかる通り、 $d\vec{x}'$  は  $\vec{x}'$  とは違う方向を向く。字面にだまされないように。

<sup>10</sup>問題は軸対称なので、 $y$  方向に離れた場合を考えなければ、状況全てを回転してやればよい。

以上を組み合わせると、ビオ・サバルの法則を使って磁場を計算する式は

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{R d\phi \vec{e}_\phi \times (z\vec{e}_z + x\vec{e}_x - R\vec{e}_\rho)}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \quad (7.33)$$

となる。ここで被積分関数の分子に現れている外積を計算しておく、

$$\vec{e}_\phi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho, \quad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_\rho = -\vec{e}_z \quad (7.34)$$

は定義にしたがい図を書いてみればわかる。 $\vec{e}_\phi \times \vec{e}_x$  は、 $\vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y$  であって、 $\vec{e}_x \times \vec{e}_x = 0, \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$  を使えば、

$$\vec{e}_\phi \times \vec{e}_x = -\cos \phi \vec{e}_z \quad (7.35)$$

となる<sup>11</sup>。これで、

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{R d\phi (z\vec{e}_\rho - x \cos \phi \vec{e}_z + R\vec{e}_z)}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \quad (7.36)$$

を計算すればよいことがわかった。

こうして出てきた式を吟味しておく。まず磁場の向きは  $\rho$  方向と  $z$  方向であり、 $\phi$  方向はない。問題が軸対称であることを考えると、これでよさそうである。

答を見ると、 $R = x \cos \phi$  の時、磁場の  $z$  成分は 0 になる。これは図を見ても納得できるはずである。この時、電流と  $\vec{x} - \vec{x}'$  の  $xy$  方向の成分が一直線になるのである。

後は積分をすればいいのだが、実はこの積分はそう簡単ではない。そこで、以下では  $R$  が、 $z, x$  に比べて小さいという近似のもとで計算することにする。つまり、この円電流の円の半径が、今測定しようとしている距離に比べて十分小さい場合を考えるわけである。コイルに近いところは考えないことにする。

$R$  を小さいとして、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}}\Big|_{R=0} + R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \right)\Big|_{R=0} + \dots \\ &= \frac{1}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3xR \cos \phi}{(z^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} + \dots \end{aligned} \quad (7.37)$$

と展開して考えよう。

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int R d\phi (z\vec{e}_\rho - x \cos \phi \vec{e}_z + R\vec{e}_z) \left( \frac{1}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3xR \cos \phi}{(z^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right) \quad (7.38)$$

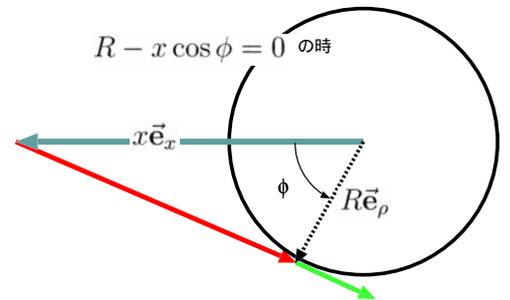
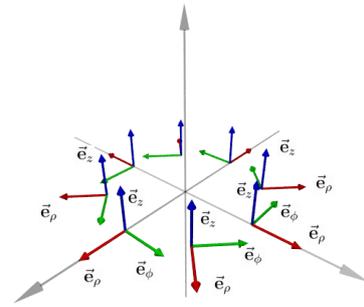
となるが、まず  $R$  の 1 次の項を考える。

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int R d\phi (z\vec{e}_\rho - x \cos \phi \vec{e}_z) \frac{1}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (7.39)$$

今、 $\phi$  で積分するのだが、 $\phi$  が変化すると変化する部分は  $\vec{e}_\rho$  と  $\cos \phi$  しかない。一周（たとえば 0 から  $2\pi$ ）積分するということを考えると  $\int d\phi \vec{e}_\rho$  も  $\int d\phi \cos \phi$  も 0 である。よって  $R$  の 1 次の項は積分結果に効かない。

では次に  $R^2$  の項を計算する。

$$\begin{aligned} &\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int R d\phi R \vec{e}_z \frac{1}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int R d\phi (z\vec{e}_\rho - x \cos \phi \vec{e}_z) \left( \frac{3xR \cos \phi}{(z^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I R^2 \vec{e}_z}{4\pi (z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \int d\phi + \frac{3\mu_0 I x R^2}{4\pi (z^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \left( z \int d\phi \cos \phi \vec{e}_\rho - x \vec{e}_z \int d\phi \cos^2 \phi \right) \end{aligned} \quad (7.40)$$



<sup>11</sup>もちろんこの計算を、図から求めることもできる。

となる（2行目では、積分と関係ない量をどんどん積分の外に出した）。各々の積分は、 $\int d\phi = 2\pi$ ,  $\int d\phi \cos\phi \vec{e}_\phi = \pi \vec{e}_x$ ,  $\int d\phi \cos^2\phi = \pi$  と実行できる<sup>12</sup>ので、答は

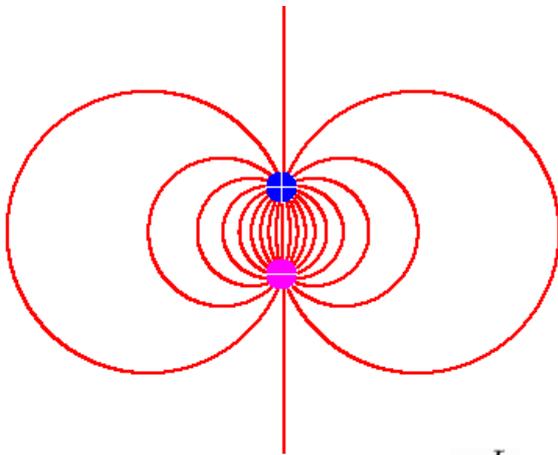
$$\frac{\mu_0 I R^2 \vec{e}_z}{2(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\mu_0 I x R^2}{4(z^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}(z\vec{e}_x - x\vec{e}_z) = \frac{\mu_0 I R^2 \vec{e}_z}{4(z^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}(3xz\vec{e}_x + (2z^2 - x^2)\vec{e}_z) \tag{7.41}$$

と求めることができる。じゅうぶん遠方での円電流による磁束密度の式である。

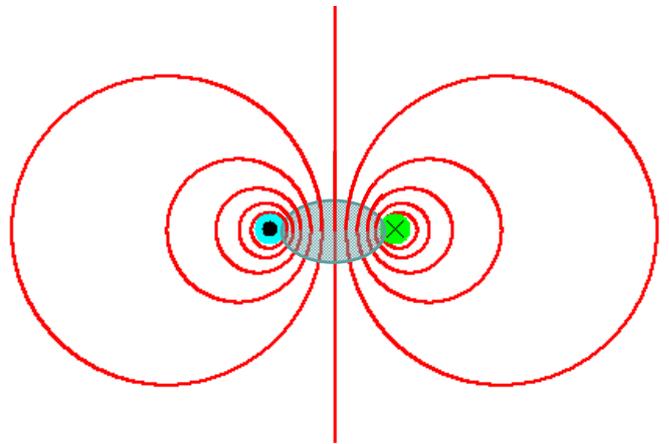
ここで、 $z$  軸方向を向いた電気双極子  $p$  のつくる電場が

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left( 3(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \vec{e}_z \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &\rightarrow \frac{p}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} (3xz\vec{e}_x + (2z^2 - x^2)\vec{e}_z) \end{aligned} \tag{7.42}$$

だったことを思い出そう。2行めでは、上の計算で使った位置座標に合わせて  $y = 0$  とした。円電流の式 (7.41) と電気双極子の式 (7.42) を見比べると、電気双極子モーメント  $p$  と  $I\pi R^2$  という量が対応関係にあることがわかる（比例定数は除いて比較した）。



磁極  $+m$  と  $-m$  が距離  $L$  離れていると、 $\frac{mL}{\mu_0}$  の磁気モーメントがある。

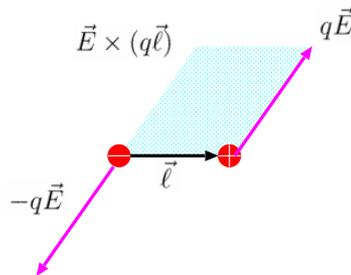


電流  $I$  が面積  $S$  を回るように流れていると  $IS$  の磁気モーメントがある。

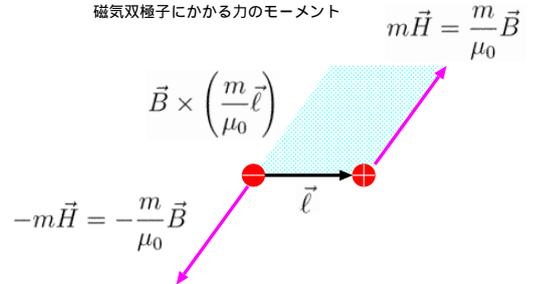
$$IS = \frac{mL}{\mu_0} \quad \text{ならば、遠方で見ると、この二つは区別がつかない。}$$

静電気の場合、正電荷  $q$  と負電荷  $-q$  が  $\vec{\ell}$  だけ離れている時そこには  $q\vec{\ell}$  の電気双極子モーメントがある。同様に磁気についても双極子モーメントを考える。磁極というものが存在するとすれば、正磁極  $m$  と負磁極  $-m$  が  $\vec{\ell}$  離れていれば  $\frac{1}{\mu_0} m\vec{\ell}$  の磁気双極子モーメントである、と考えればよい。ここで  $\frac{1}{\mu_0}$  がつく理由は電気双極子

電気双極子にかかる力のモーメント



磁気双極子にかかる力のモーメント



モーメントが電場  $\vec{E}$  をかけた時にどのようなモーメントが発生するかで定義されているのに対し、磁気双極子モーメントは  $\vec{B}$  ( $\vec{H}$  ではなく) に対して定義されているからである。

実際には磁極は存在せず、磁気双極子モーメントを作るのは電流であるが、その電流の大きさと磁気双極子モーメン

<sup>12</sup> 2番目の積分は、まず  $\vec{e}_\rho = \cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y$  と分けておいてそれぞれ積分する。  $\int d\phi \cos\phi \sin\phi = 0$  である。

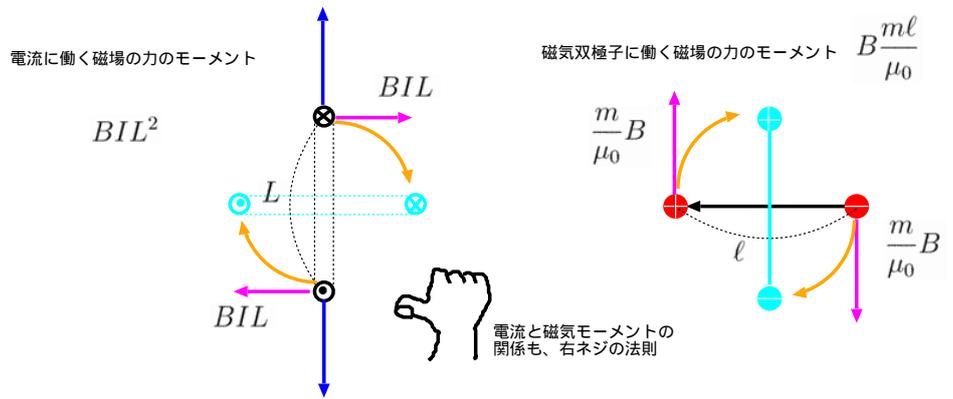
トとの関係は、

$$\vec{p} = I\vec{S} \tag{7.43}$$

となる。 $\vec{S}$ は電流が囲んでいる面積を表すベクトルで、向きは電流に関して右ネジで面の法線方向である。

これを正方形コイルの場合で確認しておこう。右の図のように、正方形コイルに磁場をかけた場合と、磁気双極子に磁場をかけた場合を比較する。どちらも回転する力のモーメントが起こる（電流は磁場と垂直になりたがるし、磁気双極子は磁場と平行になりたがる）。

$$IL^2 = \frac{m\ell}{\mu_0} \tag{7.44}$$

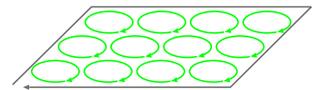


という関係が成立していれば、二

つのモーメントは全く同じになる。遠方から見ると、そこに小さな周回電流があるのか、磁気双極子があるのかわからなくなるのである。

前に「磁極等という物は存在しない。磁場を作るのは電流である」ということを述べた時、少なからず驚いた人もいたかもしれない。しかしこうして円電流の作る磁場と磁石の作る磁場を見比べてみると、式の上でも（遠くからでは）全く区別のつかないものになってしまった。古い時代の物理学者が磁場の源が何であるのかわからなかったのも仕方ないことかもしれない。

なお、微小な円電流が一面に整列しているところを考えると、（ストークスの定理の証明の時のように）隣りあう電流どうしは消し合うので、外側にだけ電流が流れていると考えてもよいことになる。磁気双極子が面の上に並んでいるような状況は、その面の縁に電流が流れている状態と近似して考えることができるのである。



### 7.2.3 ソレノイドコイル

ソレノイドコイルについてはアンペールの法則でも求めたが、ここでビオ・サバルの法則を使っても出せることを確認しておく。

まず、円電流を二つ重ねたものを考えよう。円電流一つによる磁場はすでに計算したから、これを足せばよい。たとえば  $z = 0$  面と  $z = \ell$  面に二つの円電流があるとすれば、それは円電流の作る磁場の式に、その式で  $z \rightarrow z - \ell$  と置き直したもの（こうすれば  $z$  方向に  $\ell$  だけ平行移動したことになる）を足せばよい。つまり、

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{Rd\phi (z\vec{e}_\rho - x \cos \phi \vec{e}_z + R\vec{e}_z)}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{Rd\phi ((z - \ell)\vec{e}_\rho - x \cos \phi \vec{e}_z + R\vec{e}_z)}{((z - \ell)^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \tag{7.45}$$

となる。

円電流が二つでなく、もっとたくさんならば、 $z$  を少しずつ平行移動させながらこの式をどんどん足していけばいいだろう。

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{Rd\phi ((z - n\ell)\vec{e}_\rho - x \cos \phi \vec{e}_z + R\vec{e}_z)}{((z - n\ell)^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \tag{7.46}$$

のように、円電流の影響をどんどん足していけばソレノイドコイルの場合の磁場が出せるだろう。

しかし、無限和  $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$  を計算するのは少々面倒である。そこで、 $\ell$  が非常に小さいと考えて、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ell \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dz \tag{7.47}$$

と考えることにする（ここで和記号の後に  $\ell$  があるのは、それがあってちょうど、無限和の極限が積分と一致するからである。図を参照）。

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int \frac{R d\phi (z\vec{e}_\rho - x \cos \phi \vec{e}_z + R\vec{e}_z)}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \quad (7.48)$$

という計算をすればよいわけである。

ここで、 $z$  に関して奇関数ならば答は  $z$  積分の結果は 0 になる。分母は偶関数だから、分子にある  $z\vec{e}_\rho$  は積分すると消える。磁場は  $z$  成分しかないことになり、

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R(-x \cos \phi + R)\vec{e}_z}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \quad (7.49)$$

例によって、 $z = \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi} \tan \theta$  と変数変換して、 $dz = \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$  を使うと、

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R(-x \cos \phi + R)\vec{e}_z}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{\cos^2 \theta} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R(-x \cos \phi + R)\vec{e}_z}{\left( (R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi) \underbrace{(1 + \tan^2 \theta)}_{=\frac{1}{\cos^2 \theta}} \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R(-x \cos \phi + R)\vec{e}_z}{(R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)} \end{aligned} \quad (7.50)$$

のように計算が進み、 $\theta$  に関する積分の答は  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta = 2$  である。

$\phi$  に関する積分は少々面倒に思えるが、この式の背後にある図形的意味を考えると、あっという間にできる。実はこの  $d\phi \frac{R(-x \cos \phi + R)\vec{e}_z}{(R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)}$  という量は「半径  $R$  の円運動している車を、円の中心から  $x$  離れたところで人がじっと注視している。車が  $d\phi$  だけ回る間に、この人はどれだけ角度目線を動かさなくてはいけなから」という問題の答なのである。

なぜそうなるのかは純粋に図形の問題なので、右の図を見て考えるとわかる。AB は車の移動で、長さ  $Rd\phi$  である。この時 P 点にいる人の目線の動く角度は、 $\frac{AC}{AP}$  である。AP =  $\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi}$  であり、AD =  $x \cos \phi - R$  である。後は、三角形 ABC と三角形 APD が相似であることを使うと、

$$AC = AB \times \frac{x \cos \phi - R}{\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi}} \quad (7.51)$$

となるので、

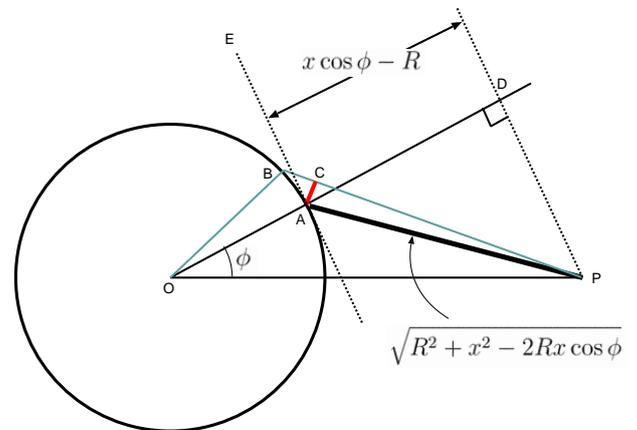
$$\frac{AC}{AP} = Rd\phi \frac{x \cos \phi - R}{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi} \quad (7.52)$$

となる。できる。なお、以上の計算においては「弧」であって曲線であるところの AB は（角度  $d\phi$  が微小なので）直線と考えた。

こう考えると、 $x > R$  であれば、0 から  $2\pi$  まで積分すれば 0 になるのはすぐにわかる。なぜなら、外から見れば車はあっちいたりこっちいたりを繰り返しているのだから、一周分で目の動く角度を積分すれば 0 となる。

一方、 $x < R$  であれば、車が一周する間にこの人の目線も一周するから、積分結果は  $2\pi$  である。

結局、内側では  $\frac{\mu_0 n I}{4\pi} \times 2 \times 2\pi = \mu_0 n I$  という答が出る。これはアンペールの法則を使って出した式と全く同じである（アンペールの法則を使った方が簡単であることは言うまでもない）。



【補足】この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでください。

## 7.3 アンペールの法則との関係

さて、こうして導いたピオ・サバルの法則によって計算される磁場は、アンペールの法則を満たしているだろうか。確認のため、ピオ・サバルの法則の両辺の  $\text{rot}$  を取る。

$$\text{rot}\vec{B} = \vec{\nabla} \times \int d^3x' \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{x} - \vec{x}'}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (7.53)$$

ベクトル解析の公式  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$  を使うと、

$$\underbrace{\vec{\nabla}}_{\vec{A}} \times \left( \underbrace{\vec{j}(\vec{x}')}_{\vec{B}} \times \underbrace{\left( \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right)}_{\vec{C}} \right) = \underbrace{\vec{j}(\vec{x}')}_{\vec{B}} \left( \underbrace{\vec{\nabla}}_{\vec{A}} \cdot \underbrace{\left( \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right)}_{\vec{C}} \right) - \left( \underbrace{\vec{j}(\vec{x}')}_{\vec{B}} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}}_{\vec{A}} \right) \underbrace{\left( \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right)}_{\vec{C}} \quad (7.54)$$

と計算できる。ここで気をつけてやらないと失敗するポイントは、 $\vec{\nabla}$  は単なるベクトルではなく微分記号であり、「何を微分するのか」を忘れてはならないという点である。当然、 $\vec{\nabla}$  は  $\vec{j}(\vec{x}')$  は微分しない ( $\vec{x}$  の関数じゃないのだから)、微分されるのは  $\left( \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right)$  の中の  $\vec{x}$  である。そのため、 $\vec{A}$  と  $\vec{C}$  の順番は変えてはいけないので、上の式では公式とは並び方を変えている。

一般的に、 $\vec{\nabla}$  を含むベクトルに対して公式を適用する時は、「この  $\vec{\nabla}$  は何を微分するのか」ということを明確に考えておかないと困る。今の場合  $\vec{B}$  が微分されなかったので計算が以上で済んだが、もし  $\vec{B}$  も  $\vec{C}$  も両方が微分されるのであれば、

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) + (\vec{C} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{C} - \vec{C}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \quad (7.55)$$

のように、それぞれの微分を考える必要がある。

以上に注意しつつこの公式を使うと、

$$\text{rot}\vec{B} = \int d^3x' \left( -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) + \mu_0 \vec{j}(\vec{x}') \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) \right) \quad (7.56)$$

である。ここで括弧内の第1項に対応する式が0になることを示そう。

$\vec{\nabla}$  が微分している相手は  $\frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$  という、 $\vec{x} - \vec{x}'$  という差のみ依存する関数である。これを  $x$  で微分した結果は、 $-x'$  で微分した結果と同じになる。ゆえに、 $\vec{\nabla} \rightarrow -\vec{\nabla}'$  と置き換える ( $\vec{\nabla}'$  は  $x'$  による微分)、こうしておいて部分積分を使うと、

$$\mu_0 \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\mu_0 \int d^3x' (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{x}')) \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (7.57)$$

と書き直すことができる。ところが、 $\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{x}') = \text{div}\vec{j}(\vec{x}') = 0$  であるので、この項は0となる (表面項は、積分範囲の端では  $\vec{j}$  が0になっていると仮定して落とした)。

括弧内第2項には  $\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right)$  が登場する。実は

$$\frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\text{grad} \left( \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right) \quad (7.58)$$

とも書ける。

$\frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$  は場所  $x'$  にある点電荷  $Q$  が作る電場の式  $\frac{Q(\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$  を  $\frac{Q}{\epsilon_0}$  で割ったもの、 $\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^2}$  は同じく場所  $x'$  にある点

電荷  $Q$  の作る電位の式  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}'|}$  を  $\frac{Q}{\epsilon_0}$  で割ったものである。

電場の場合、 $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  または  $-\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  だったことを思い出せば、 $\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right)$  は  $\frac{\rho}{\epsilon_0}$  を  $\frac{Q}{\epsilon_0}$  で割ったものである。電荷の分布を考えると、この関数は  $\vec{x} = \vec{x}'$  でのみ0でなく、積分すると原点での寄与がちょうど1になる関数だということになる。

これは 関数と呼ばれる関数  $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$  の性質であり、これをかけて積分すると  $\vec{x} = \vec{x}'$  の場所での  $\vec{j}$  の値が結果として出る。結局、

$$\text{rot}\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = \mu_0 \vec{j}(\vec{x}) \quad (7.59)$$

となる。真空中なので  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  であることを思えば、これはアンペールの法則  $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$  に他ならない。

【補足終わり】

### 7.4 章末演習問題

【演習問題 7-1】右図のように、直線と半円を組み合わせた導線に電流  $I$  が流れている。半円の中心部分での磁束密度を求めよ。

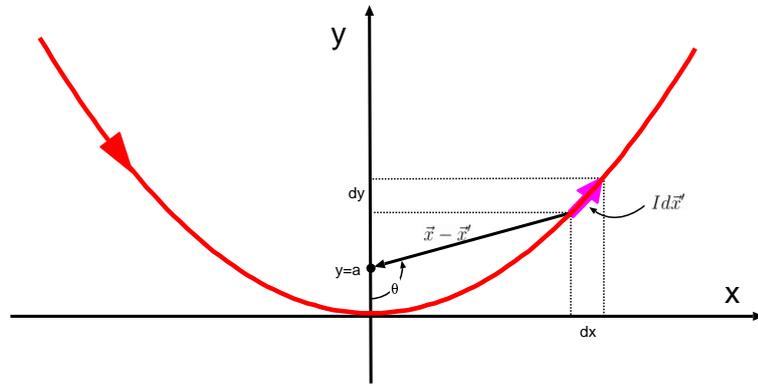
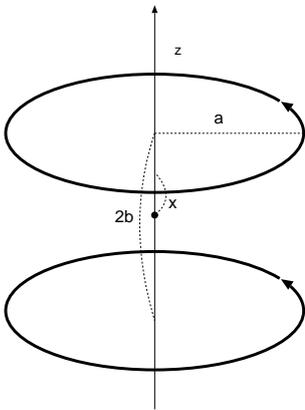
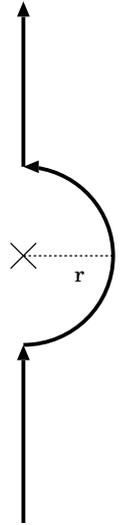
【演習問題 7-2】一辺  $2a$  の正方形の形をしたコイルに電流  $I$  が流れている。正方形の中心での磁場を求めよ。

【演習問題 7-3】下の図のように、半径  $a$  の同じ円形コイルを中心軸を共通にして距離  $2b$  だけ離して両者に同じ電流を流した。この時、中心軸上の磁束密度を求めよ。7.2.1 節での結果を使ってよい。

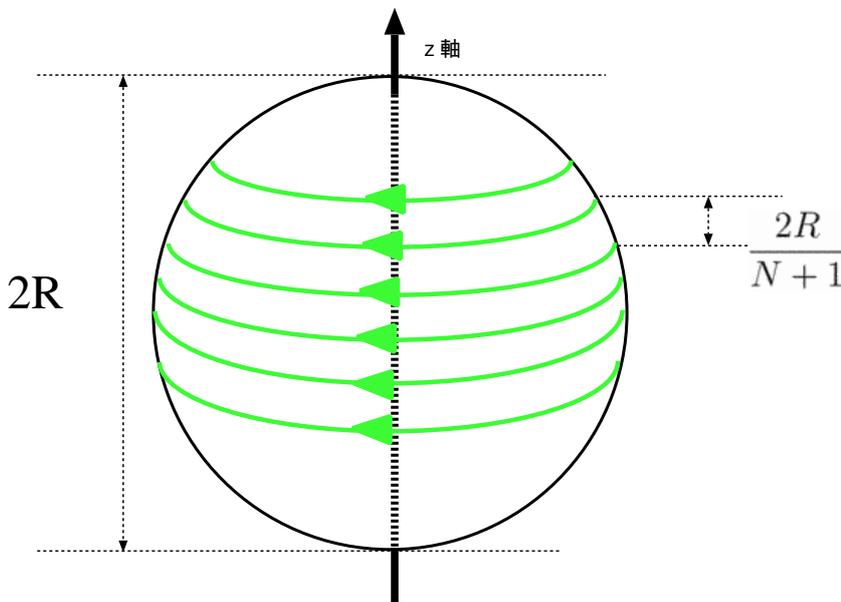
また、二つの円の中心の midpoint 付近での磁場がほぼ一様となるのは  $a, b$  にどのような関係がある時か計算せよ。ただしここで「ほぼ一様」というのは、midpoint からのずれを  $x$  とした時、 $x^2$  までの近似 ( $x^3$  以上は無視する) において一定という意味である。

【演習問題 7-4】 $y = \frac{1}{4a}x^2$  で表現される放物線の形の導線に電流  $I$  を流した。放物線の焦点 ( $x = 0, y = a$ ) にできる磁場の磁束密度を求めよ。

ヒント：積分の方法はいろいろあるが、焦点を中心として下図のような極座標を取るのがよい。この時、焦点から角度  $\theta$  の方向にある電流までの距離は  $r = \frac{2a}{1 + \cos \theta}$  である。電流素辺との外積は、 $r$  と  $d\theta$  で表現することができる。



【演習問題 7-5】図のように球面上の、地球でいけば緯線に対応する形で合計  $N$  本の導線を巻き付け、各々に電流を流した。それぞれの導線は  $z$  座標で見ても  $\frac{2R}{N+1}$  ずつ離れている。この時、 $z$  軸上での磁束密度を求めよ。ただし、 $N$  は非常に大きいとして、電流の和を積分に置き換えてよいとする。



# 第8章 静磁場の法則その3—電流・電荷間に働く力とポテンシャル

## 8.1 電流素辺の間に働く力

この節では、電流素辺と電流素辺の間に働く力を計算し、それが電荷と電荷に働く力と類似点を持つことを確認しよう。

二つの電流があり、一方は電流密度  $\vec{j}_1$  で領域  $V_1$  を流れているとする。もう一方は電流密度  $\vec{j}_2$  で領域  $V_2$  を流れているとする。この二つの電流の間に働く力を考えるために、まず  $\vec{j}_1$  によって  $\vec{x}_2$  に作られる磁場を計算すると

$$\vec{B}_1(\vec{x}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \frac{\vec{j}_1(\vec{x}_1) \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \frac{\vec{j}_1(\vec{x}_1) \times \vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \quad (8.1)$$

であり、この磁場によって場所  $\vec{x}_2$  にある電流密度  $\vec{j}_2(\vec{x}_2)$  に及ぼされる力は、

$$\begin{aligned} \vec{F}_{j_1 \rightarrow j_2} &= \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \vec{j}_2(\vec{x}_2) \times \vec{B}_1(\vec{x}_2) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \frac{\vec{j}_2(\vec{x}_2) \times (\vec{j}_1(\vec{x}_1) \times \vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2})}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \end{aligned} \quad (8.2)$$

と書くことができる。

ここでベクトル解析の公式  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$  から、

$$\underbrace{\vec{j}_2(\vec{x}_2)}_{\vec{A}} \times (\underbrace{\vec{j}_1(\vec{x}_1)}_{\vec{B}} \times \underbrace{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}_{\vec{C}}) = \underbrace{\vec{j}_1(\vec{x}_1)}_{\vec{B}} (\underbrace{\vec{j}_2(\vec{x}_2)}_{\vec{A}} \cdot \underbrace{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}_{\vec{C}}) - \underbrace{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}_{\vec{C}} (\underbrace{\vec{j}_1(\vec{x}_1)}_{\vec{B}} \cdot \underbrace{\vec{j}_2(\vec{x}_2)}_{\vec{A}}) \quad (8.3)$$

となる。

第2項は二つの微小電流をつなぐベクトルの向きを向いており、「電流同志が押し合う(引き合う)」という力に対応する。第1項は電流  $\vec{j}_1(\vec{x}_1)d^3\vec{x}_1$  の方向を向いている力で、作用・反作用の法則を満たさない(1と2の立場を入れ替えると、 $\vec{j}_1(\vec{x}_1)(\vec{j}_2(\vec{x}_2)\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2})$  は  $\vec{j}_2(\vec{x}_2)(\vec{j}_1(\vec{x}_1)\vec{e}_{\vec{x}_2 \rightarrow \vec{x}_1})$  となる)。

ここで我々は「電流素辺・電流素辺の間の力」と「電荷・電荷の間の力」を比較しようとしているが、電荷と電荷の間の力はもちろん、大きさ同じで逆向きで、一直線上を向く。比較のためには、同じ形に揃えたい。

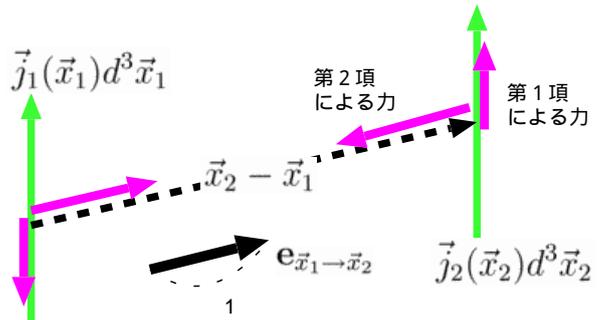
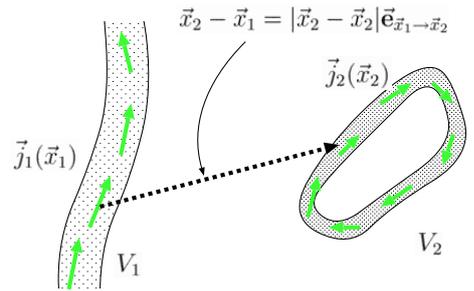
そこで、まず作用・反作用の法則に反する部分である第1項について考察しよう。第1項の積分をちゃんと書くと

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \vec{j}_1(\vec{x}_1) \frac{\vec{j}_2(\vec{x}_2) \cdot \vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \vec{j}_1(\vec{x}_1) \vec{j}_2(\vec{x}_2) \cdot \vec{\nabla}_2 \left( \frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \right) \quad (8.4)$$

となる。ここで

$$\frac{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} = -\vec{\nabla}_2 \left( \frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \right) \quad (8.5)$$

という式<sup>1</sup>を使った。 $\vec{\nabla}_2$  とは、 $\vec{x}_2$  に関する微分で作られたナブラ記号である。



<sup>1</sup>この式は、点電荷の電場  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$  と電位  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  の関係  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  を思い出せば、おなじみの式である。

ここで  $\vec{\nabla}_2$  を部分積分でひっくりかえす。 $\vec{\nabla}_2$  というベクトル微分演算子を部分積分でひっくりかえすことに不安を感じる人は、各成分ごとに考えてみるとよい。たとえば  $x$  成分だけを考えれば、

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \vec{j}_1(\vec{x}_1) j_2(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \vec{j}_1(\vec{x}_1) \frac{\partial j_2(x_2)}{\partial x_2} \left( \frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \right) \quad (8.6)$$

となる。 $y$  成分、 $z$  成分も含めて考えれば、第 1 項は

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \vec{j}_1(\vec{x}_1) \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_2(\vec{x}_2) \left( \frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \right) \quad (8.7)$$

となる。もちろん、 $\vec{\nabla}$  の扱いに慣れている人はいっしょにこうやってよい。ここで、部分積分の表面項は考えなかった。領域  $V_2$  が、その端っこにおいて電流密度  $\vec{j}_2$  が 0 になるか、あるいは無限に遠くて  $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1| \rightarrow \infty$  と考えていいという場合を考えているからである。

電流という流れもまた湧き出しなしの流れであることを思えば<sup>2</sup>、 $\text{div} \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \text{div} \vec{j} = 0$  なのでこの項は 0 である。残るのは第 2 項で、結果は

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \vec{j}_1(\vec{x}_1) \cdot \vec{j}_2(\vec{x}_2) \frac{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \quad (8.8)$$

となる。この式は、電荷間の力の式と強い類似性を持っている。

電荷密度  $\rho_1$  の電荷が領域  $V_1$  にいて電荷密度  $\rho_2$  の電荷が領域  $V_2$  にいる場合の電荷間に働く力は、

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \rho_1(\vec{x}_1) \rho_2(\vec{x}_2) \frac{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \quad (8.9)$$

である。

$$\frac{1}{\epsilon_0} \rho_1(\vec{x}_1) \rho_2(\vec{x}_2) \rightarrow -\mu_0 \vec{j}_1(\vec{x}_1) \cdot \vec{j}_2(\vec{x}_2) \quad (8.10)$$

という置き換えで同じ式である。二つの式が逆符号なのは、「同符号の電荷は反発するが、同方向の電流は引き合う」という状況の違いを示している。

例によって電流がある曲線上にしか存在しない場合は、 $\int_V \vec{j} d^3\vec{x} \rightarrow \int_L I d\vec{x}$  のように、体積積分を線積分に置き換えることができる。こうすると電流間に働く力は

$$-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 \frac{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \quad (8.11)$$

となる。

**【補足】** この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでみてください。

ところで電流密度は、電荷密度にその場所の電荷の持つ速度をかけることで得られる。つまり、 $\vec{j} = \rho \vec{v}$  と考えられる。それを考えにいて、電荷の力と電流の力を合わせて書くと、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \rho_1(\vec{x}_1) \rho_2(\vec{x}_2) \frac{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \\ & - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 (\rho_1(\vec{x}_1) \vec{v}_1(\vec{x}_1)) \cdot (\rho_2(\vec{x}_2) \vec{v}_2(\vec{x}_2)) \frac{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \\ & = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \rho_1(\vec{x}_1) \rho_2(\vec{x}_2) (1 - \epsilon_0 \mu_0 \vec{v}_1(\vec{x}_1) \cdot \vec{v}_2(\vec{x}_2)) \frac{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \end{aligned} \quad (8.12)$$

とまとめられることになる。こうしてみると、 $\epsilon_0 \mu_0$  は速度の自乗分の 1 の次元を持つ量である。実際、後で示すように、 $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  に、ある重要な物理現象の速度という意味がある。

**【補足終わり】**

<sup>2</sup>  $\text{div} \vec{j} \neq 0$  の時は、その場所の電荷密度が増加したり減少したりする。そうすると静電場・静磁場ではなくなってしまふ。

## 8.2 導線の受ける力と動く電荷の受ける力

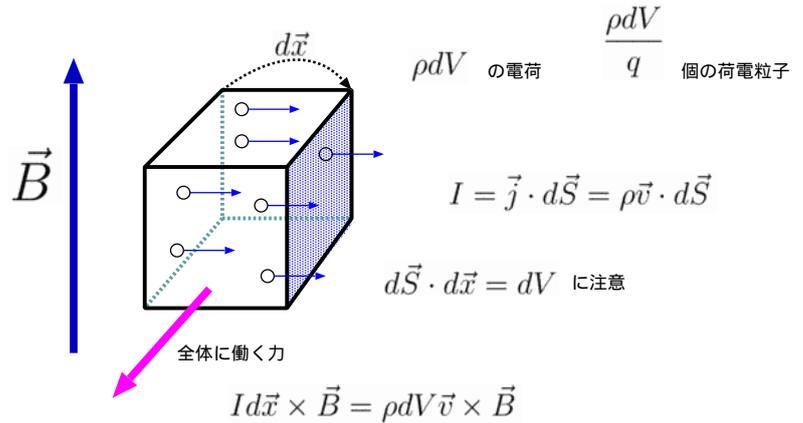
電流素片  $I d\vec{x}$  が磁束密度  $\vec{B}$  の磁場内において、

$$d\vec{F} = I d\vec{x} \times \vec{B} \tag{8.13}$$

の力を受ける、ということは既に述べた。ところで電流とは結局は荷電粒子（たいていの場合電子）の運動である。そこでこの力を荷電粒子一個一個に働く力の和だと考えることにしよう。荷電粒子一個に働く力はどのように表されるであろうか。

### 8.2.1 ローレンツ力

今、ある微小体積  $dV$  の中に電荷密度  $\rho$  で電荷が存在していて、それらが速度  $\vec{v}$  で運動しているとしよう<sup>3</sup>。今考えている荷電粒子の一個の電荷を  $q$  とすれば、この場所には  $\frac{\rho dV}{q}$  個の電荷がいる。この微小体積の、電流が流れている方向の微小な長さを示すベクトルを  $d\vec{x}$  とし、電流が流れだす部分の微小面積を示すベクトルを  $d\vec{S}$  と書く<sup>4</sup>と、微小体積  $dV$  は  $d\vec{S} \cdot d\vec{x}$  となる（角柱を底面積×高さで計算している）。



ここで  $I d\vec{x}$  の部分は

$$I d\vec{x} = (\vec{j} \cdot d\vec{S}) d\vec{x} = \vec{j} (d\vec{S} \cdot d\vec{x}) = \rho \vec{v} dV \tag{8.14}$$

と電流密度を通じて荷電粒子の速度を使った式に書き換えることができる。この計算の中で、 $\vec{j}$  と  $d\vec{x}$  が同じ方向を向いているので、 $(\vec{j} \cdot d\vec{S}) d\vec{x} = \vec{j} (d\vec{S} \cdot d\vec{x})$  となることを使った<sup>5</sup>。最後では  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  を代入した。

よって力は  $\vec{F} = \rho dV \vec{v} \times \vec{B}$  となるので、これを荷電粒子の個数で割れば一個あたりの力が計算できる。すなわち、

$$\frac{d\vec{F}}{\rho dV} = q \vec{v} \times \vec{B} \tag{8.15}$$

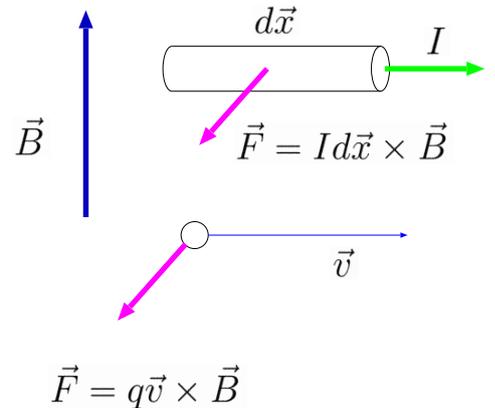
である。

この力  $q \vec{v} \times \vec{B}$  は磁場中を運動する電荷の受ける力を表す式である。電場中の電荷が受ける力  $q \vec{E}$  と併せて、

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{8.16}$$

を「ローレンツ力」と呼ぶ。これはローレンツの論文の中でこの式が導かれて有名になったためだが、実はそれ以前から知られている力である。磁場による力  $q \vec{v} \times \vec{B}$  の部分だけを「ローレンツ力」と呼ぶこともある。

磁場から与えられる力  $q \vec{v} \times \vec{B}$  は磁場とも運動方向とも垂直である。運動方向と垂直だということは重要で、これによって、「磁場は荷電粒子に対して仕事をしない<sup>6</sup>」ということが結論できる（運動方向と垂直な力は仕事をしないので）。特に、磁場と運動方向が同じ方向を向くと、力は0になる。



<sup>3</sup>考察を簡単にするために全ての荷電粒子が同じ速度で運動しているここでは考えるが、実際には一個一個の荷電粒子はさまざまな速度を持ち、その平均が  $\vec{v}$  だと考えるべきであろう。

<sup>4</sup>面積ベクトルは、その面積に対する法線の方向を向く。

<sup>5</sup> $\vec{j}$  と  $d\vec{S}$  の角度を  $\theta$  とすれば、 $(\vec{j} \cdot d\vec{S}) d\vec{x}$  の大きさも  $\vec{j} (d\vec{S} \cdot d\vec{x})$  の大きさも、 $|\vec{j}| |d\vec{S}| |d\vec{x}| \cos \theta$  となる。

<sup>6</sup>当然だが、「仕事をしない」が「力を及ぼさない」のではないことに注意。

### 8.2.2 ローレンツ力を受けた荷電粒子の運動

荷電粒子が一様な外部磁場によるローレンツ力だけを受けて運動するとき、どんな軌道を描くかを考えよう。まず働く力は常に磁場に垂直であるから、この粒子の磁場に平行な方向の運動にはまったく磁場の影響は表れない。したがって(重力などのそれ以外の力が働かない限り)、磁場に平行な方向には荷電粒子は等速運動する。

では磁場に垂直な方向はどうかというと、常に運動方向に垂直な力を受け続ける。上で述べたように磁場は仕事をしないので、粒子の運動エネルギーは増えることも減ることもないまま、運動方向を変えつづける。このような運動は等速円運動である。半径  $r$  で等速円運動するとして、その運動方程式を書けば、

$$m \frac{v^2}{r} = qvB \quad (8.17)$$

である。これから、

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad (8.18)$$

という式を作ることができる。すなわち角速度  $\omega$  は(粒子がどんな大きさの円を描くかとは関係なく)一定値をとる。またこの式は

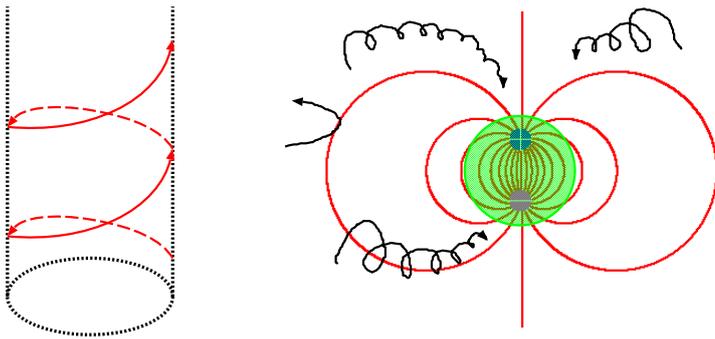
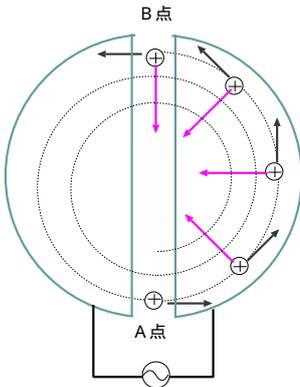
$$mv = qBr$$

とも書ける。すなわち、円運動の半径を見ればその粒子の運動量を決定できるわけである<sup>7</sup>。

この時、この円運動の周期を計算すると、

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (8.20)$$

となり、半径  $r$  によらず一定となる。これを「サイクロトロン周期」と呼び、その逆数を「サイクロトロン振動数」と呼ぶ<sup>8</sup>。さらに、この運動は「サイクロトロン運動」と呼ばれる。サイクロトロンとは、磁場中で粒子を回転させつつ加速していく実験装置である。円運動している粒子に、サイクロトロン振動数と同じ周期で振動する電場をかける。例えば図のように電極を配置して、荷電粒子が A 点に来た時は左の電極の電位が高くなり、B 点に来た時には右の電極の電位が高くなるようにしておくのである。この電場によって荷電粒子はどんどん加速されていくことになる。加速されればされるほど円運動の半径が大きくなっていき、最後には装置から飛び出してくる。



こうして、磁場中の荷電粒子は円運動もしくは、磁場と垂直な面内を円運動しつつ、磁場の方向に並進していくような螺旋運動をすることになる。螺旋運動の「円」が見えないほどに遠くから見ると、荷電粒子は磁場の方向にしか動けないように見える。つまり、磁場を使って荷電粒子の運動を制御することができる。

これは核融合におけるプラズマの閉じこめなどにも使われている。自然現象ではオーロラが北極と南極でしか見ることができないのはこの磁場の性質のためである。太陽から荷電粒子が地球に降り注いで

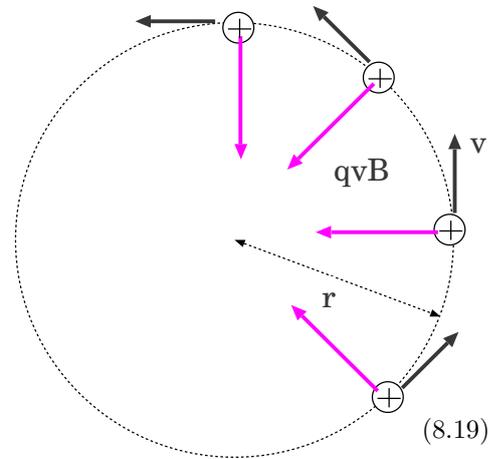
いるのだが、地球にやってきた荷電粒子は地球磁場によって方向を変えられるため、(大きい目で見ると)磁場に沿った方向への動きしかできなくなる。ゆえに、地球磁場が上下方向を向く極地でのみ地球にたどり着くことができるのである<sup>9</sup>。極地上空で大気圏に進入し空気で減速された時に、荷電粒子がそのエネルギーを放出して発する光がオーロラである。

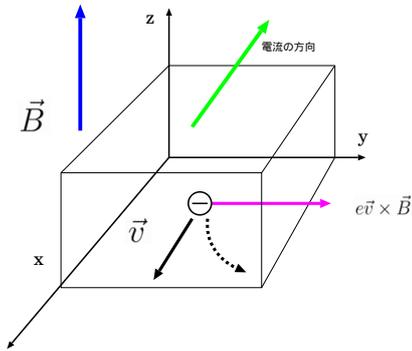
### 8.2.3 ホール効果

<sup>7</sup>素粒子実験では荷電粒子を磁場中を運動させて描いた円から運動量を測る。そして運動量やエネルギーから質量を決定し、知られていないものが出てきたら「新粒子発見!」となるわけである。

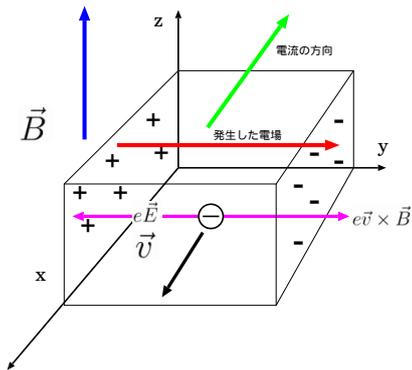
<sup>8</sup>なお、サイクロトロン振動数が一定になるのは、粒子の速度が光速に比べて遅い時、つまり相対論的效果が現れない時だけである。

<sup>9</sup>ただし、磁束密度が大きくなると磁場方向に運動していた粒子が跳ね返されるという現象も起こる。章末演習問題 8-2 を参照。





磁場中の導線内を流れる電子に働く力が導線にどのような結果を及ぼすかを考えよう。簡単のため、電流の流れる方向と磁場を垂直にし、電流の方向を  $x$  軸と逆向き（導体内の電子は  $x$  軸の向きにが流れている）、磁場の方向を  $z$  軸にとろう。導線を流れる電子の速度を  $v$  とすれば、 $evB$  の力が  $y$  軸方向に働く。これによって電子は  $y$  軸正の側に偏って存在するようになり、この部分がマイナスに帯電する。逆に  $y$  軸負の側はプラスに帯電する。もともと導線内は電氣的に中性だから、マイナスに帯電するところ（つまり電子が過剰となるところ）があれば当然、プラスに帯電するところ（電子が不足するところ）ができるわけである。こうして導線には  $y$  軸方向に電位差  $V$  が生じる。電位差によって、導線内に  $y$  軸の方向を向いた電場  $\frac{V}{d}$  ができる。



この電場は電子を  $y$  軸負の方向に引っ張るので、この二つが釣りあえば電子は本来流そうとした方向すなわち  $x$  軸方向に流れることができる（二つの力が釣りあわなければ電子は曲がってしまう）。よって、

$$evB = e \frac{V}{d} \quad \text{ゆえに、} \quad V = vBd \tag{8.21}$$

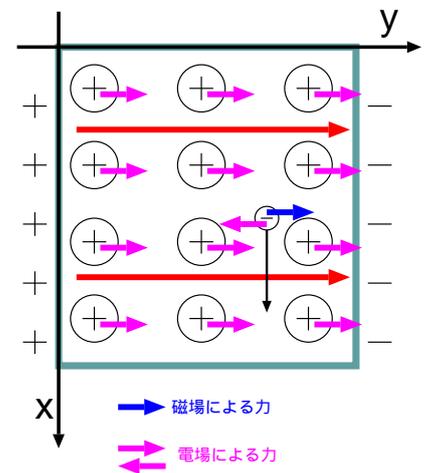
となり、 $vBd$  で表現される電位差がこの導体に発生する。これを「ホール電圧」または「ホール起電力」と呼ぶ<sup>10</sup>。

ホール電圧の面白い（そして有用な）ところは、これがキャリア（導体内で電流を運ぶもののこと。上では電子だとして説明した）の電荷と速度によって変わることである。たとえば導体内を走っているのが電子ではなく正に帯電した粒子だとしよう。この場合この粒子の運動方向は  $-x$  方向になる。つまりこの電圧を測定することで、「導線の中を流れているのは正電荷なのか、負電荷なのか」を決定することができる<sup>11</sup>。また、これからその電荷の流れる速度  $v$  もわかる。

$v$  と電流  $I$  には、 $I = envS$  という関係があった（ $S$  は導線の断面積、 $n$  は荷電粒子の単位体積当たりの個数）。この関係から、 $n$  すなわち、「この導体内にはどの程度の密度のキャリアが存在するか」を推定することもできる。というわけでホール効果は、導体や半導体の性質を研究するための重要な情報を与えてくれるのである。

電子はこの電場による力と磁場による力の両方を受け、結果として直進する。ところでこの節の最初では、磁場が導線に及ぼす力が荷電粒子一個あたりどれだけかを考えて  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  という式を作った。しかし今考えたように電子に働く力は電場によるものと磁場によるものが相殺している。では「磁場が導線に力を及ぼす」という時、導線が受けている力とは何なのだろうか???

電子だけを考えるとこの問いに答えることはできない。実際には金属であればプラスに帯電した金属イオンの中を電子が走っている。そして、金属イオンの方は運動していないから、磁場からは力を受けず、金属内にだけある電場によってのみ力を受ける。これが「磁場が導線に及ぼす力」の正体なのである。「電子が磁場から受ける力」と「電子が電場から受ける力」は大きさが同じで向きが反対である（つりあいの式）。また「電子が電場から受ける力」と「金属イオンが電場から受ける力」も大きさが同じで向きが反対である（電子の総電荷と金属イオンの総電荷は、同じ大きさで逆符号の筈だから）。よって「電子が磁場から受ける力」と「金属イオンが電場から受ける力」は向きも大きさも等しい。このようにして、ミクロな「電子が磁場から受けた力」がマクロな「導線が磁場から受けた力」へと伝達されるわけである。

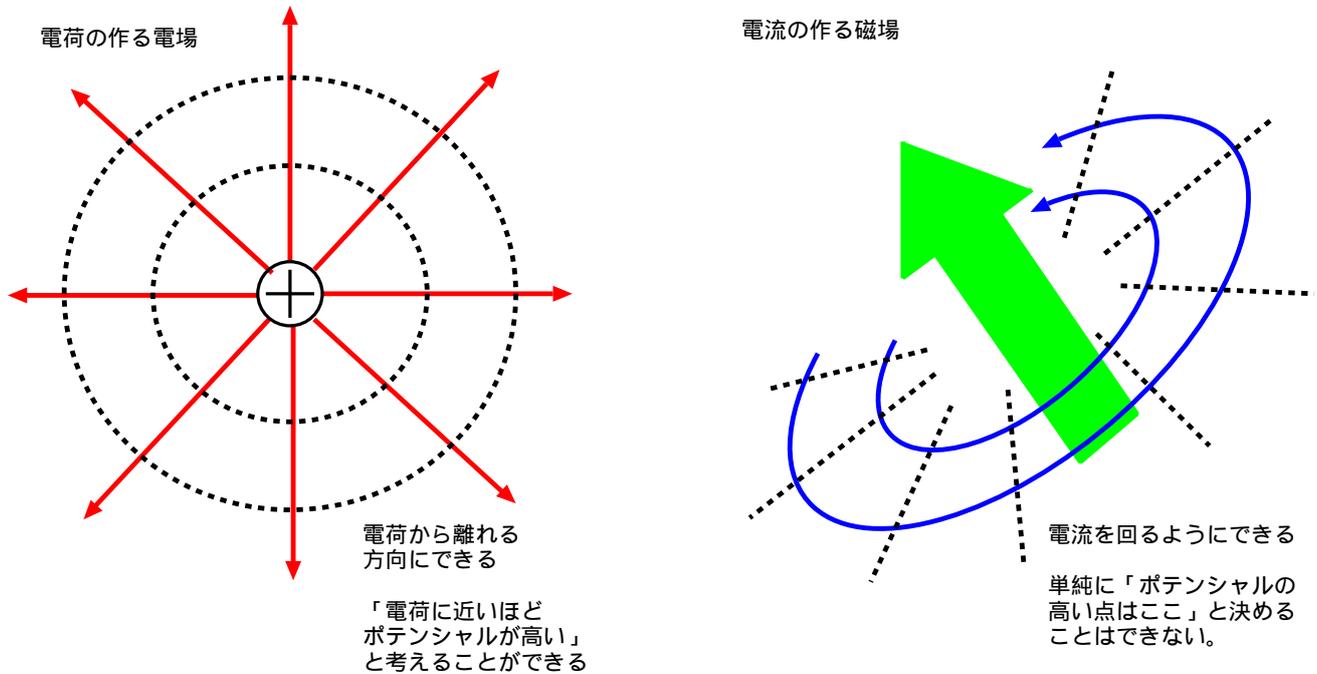


### 8.3 ベクトルポテンシャル

電場の場合、電位  $V$  を定義して、その勾配として電場を表現する ( $\vec{E} = -\text{grad}V$ ) ことができた。同様のことは磁場でもできるだろうか？

<sup>10</sup>ホールは人名。アメリカの物理学者で、1879年にこの効果を発見した。綴りは Hall であり、穴 (hole) とは関係ない。

<sup>11</sup>「キャリアって電子だから負電荷でしょ」と思いこんではいけない。半導体内にできる「正孔」は正電荷だし、陽イオンが移動してできる電流だって有り得る。



磁場についても同様に磁位  $V_m$  を定義して  $\vec{H} = -\text{grad}V_m$  のようにして磁場を計算することもできるが、 $\text{rot}\vec{H} \neq 0$  であることが災いして、一価関数でなくなるなど、少々使いにくいものになってしまう<sup>12</sup>。こういった理由は明らかで、磁場というのは磁極が作るものではなく電流が作るものなのに、電荷がつくる電場と同じ形式でポテンシャルを書こうとしたことに無理が生じたのである。

この節では「電流のつくるポテンシャル」である「ベクトルポテンシャル」を導入しよう。うまく使えば、磁場に関係する計算を楽にしてくれるものである。ただし、電位との単純なアナロジーで定義できるものではないことに注意しよう。

### 8.3.1 数学的な定義

電場  $\vec{E}$  に対してポテンシャルを考える時、数学としては以下のように考えた。

まず、 $\text{rot}\vec{E} = 0$  であることに着目する（これは、静電場が仕事をしないという条件であった）。ここで数学的に「rot が 0 になるようなベクトル場は、スカラー場の grad で書ける」という定理があったので、 $\vec{E} = -\text{grad}V$  となるような関数  $V$  を定義することができた。これを「電位」と呼んだわけである。式で書くと  $\vec{E} = -\text{grad}V$  であるが、これは「 $V$  という『架空の高さ』を持った山を滑り降りる方向に働く力が  $\vec{E}$  である」ということになるが、つまりは「何かの微分という形で電場を表現する」ことに成功したわけである。

では磁場はというと、残念ながら  $\text{rot}\vec{H}$ （あるいは今は真空中なので、 $\text{rot}\vec{B}$  でも同じこと）は 0 ではない。つまり、「 $V_m$  という『架空の高さ』を持った山」を考えると、その山は「高い方へ高い方へと上り続けると一周して元の場所に戻ってしまう」というまことに奇妙な（エッシャーの絵にそういう構図があるが、あれは絵だからできることである）状況が出現してしまう。

しかし幸いなことには、 $\text{div}\vec{B} = 0$  である。そこでこれを手がかりに「磁場に対するポテンシャル」を考えよう。

数学ではもう一つ、「div が 0 になるようなベクトル場は、別のベクトル場の rot で書ける」という定理がある。そこで我々は

ベクトルポテンシャルの定義式

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (8.22)$$

として  $\vec{A}$  を定義することができるのである。

とはいえ、こんな数学的定義を持ち出されても「なんだこれは？」としか思えないのが正直なところだろう。いったい上の式で、われわれはどんな物理量を定義したのであろうか??

そこで、そもそもポテンシャルとは何なのか、をもう一度整理しておこう。

<sup>12</sup>とはいえ、「一価関数でない」ということのデメリットを承知したうえで使えば、磁位はそれなりに便利な概念である。

## 8.3.2 物理的意味

電位の定義は「単位電荷あたりの位置エネルギー」であった。別の言い方をすれば、「電位に電荷をかけると電荷の持つ位置エネルギーが計算できる」ということになる。そこで我々としては「単位電流あたりの位置エネルギー」としてベクトルポテンシャルを定義する。あるいは「ベクトルポテンシャルに電流をかけると電流の持つ位置エネルギーになる」という計算をしたいのである。

ベクトルポテンシャル  $\vec{A}$  は、これまで出てきたポテンシャルとは、ずいぶん性質が違うもののように感じるかもしれない。そもそも、ポテンシャルがベクトルとはどういうことだ?? と不思議に思うだろう。しかし、「ポテンシャルとは何か?」という本質を理解すれば、ポテンシャルがベクトルになることはその本質に沿っていることがわかるだろう。

電場に対するポテンシャルであるところの電位とはそもそも「単位電荷の持つエネルギー」であった。そして、電場の源は電荷であったが、磁場の源は電流である。すると、「単位電流の持つエネルギー」のようなものこそ「磁場に対するポテンシャル」と呼ぶべきであろう。つまり、(電流) × (電位) で位置エネルギーになったように、(電流) × (ベクトルポテンシャル) で位置エネルギーになってくれるのではないだろうか?

しかし、電流は向きのあるベクトルなので、「電流とかけてエネルギーになるもの」もベクトルでなくてはならない(もちろん、この場合の掛け算は内積である)。

式を先に出そう。電流が持つ位置エネルギーは

$$U = -\vec{j} \cdot \vec{A} \quad (8.23)$$

で計算できる(そうなるように、ベクトルポテンシャル  $\vec{A}$  が定義されたのである! )。

電位の場合にはつかなかった符号がつくが、それは電流とベクトルポテンシャルが同じ方向を向いた時(つまり、 $\vec{j} \cdot \vec{A} > 0$  の時)にエネルギーがマイナスとなり、下がるということを意味している。すぐ後に図でわかるように、このようにエネルギーの符号を取れば正しく物理現象を記述できる。

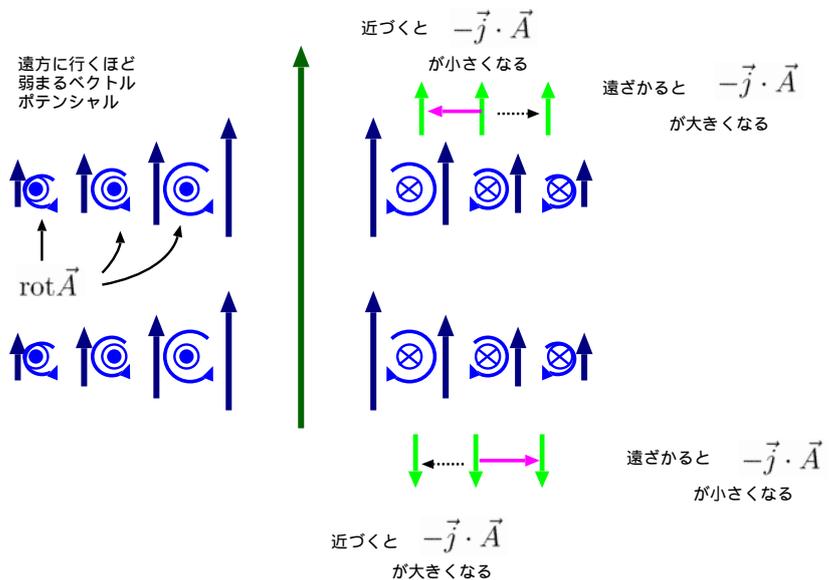
というわけで、「単位電流の持つ位置エネルギー」を作ると、それはベクトル量となったのである。そして、電位(スカラーポテンシャル)が正電荷のあるところで高く、負電荷のあるところで低くなったように、電流に近いところではその方向を向き、大きさが大きくなっていく(遠ざかれば弱くなっていく)という性質を持つ。

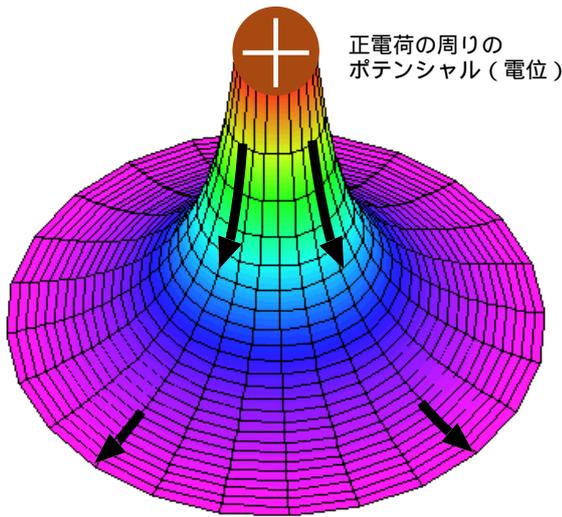
まずは絵を描いて、そのような「ベクトルポテンシャル」の rot が磁場を表してくれそうであることを確認しよう。

直線電流の場合を考えよう。図のように  $z$  軸方向を向いた直線電流は  $z$  軸方向を向いたベクトルポテンシャルを作る。そして、そのベクトルの大きさは遠方にいくほど小さくなっていく。このベクトルポテンシャルの rot を考える。 $\vec{A}$  を水流のような流れと見た時、その流れによってそこにある物体がどう回転するか、と考えると  $\text{rot} \vec{A}$  のイメージをつかみやすい。rot は図の右側では時計回り、左側では反時計回りとなる。すなわち、右側では紙面表から裏へ向かう向きの磁場が、左側では紙面の裏から表へ向かう磁場ができる。これはまさに直線電流によって右ネジの法則が示す方向に作られた磁場である。

電位は「正電荷のある場所では電位が高くなる(電位を表現するゴム膜が“上”に引っ張られる)」「負電荷のある場所では電位が低くなる(電位を表現するゴム膜が“下”に引っ張られる)」「電荷がないところでは、ゴム膜は上に凸な部分と下に凸な部分が出てひっぱりあってつりあっている」というイメージで捉えることができた。それと同様にベクトルポテンシャルは「電流があるとその付近にはその電流の方向に向かうベクトルポテンシャルができる」というイメージで捉えることができる。

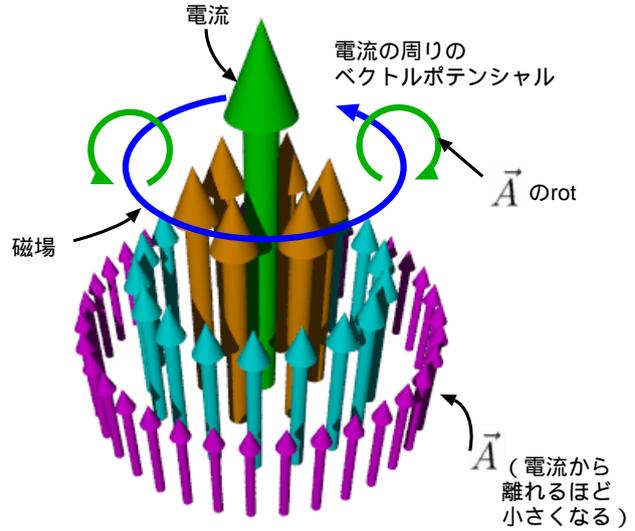
ちなみに、電場や磁場の「場」は英語では field であり、つまり野原(フィールド)に草が生えているイメージである。場所によって長い草が生えてたり、短い草が生えてたりし、生える方向も場所によって違う。各点各点で違う大きさで違う向きのベクトルがあるというのが「field」のイメージなのである。





正電荷の周りのポテンシャル（電位）

電位が下がる方向  
(坂を下る方向)に電場が発生

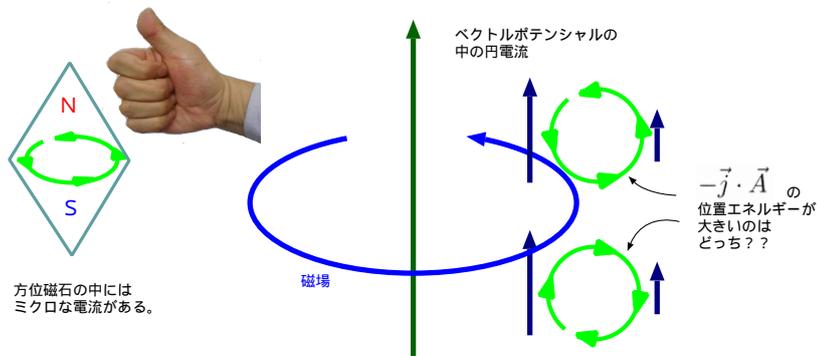


ベクトルポテンシャルが渦を巻く、その渦の軸の方向に磁場が発生

電場と磁場の違い（電位とベクトルポテンシャルの違い）を確認しておこう。

電場は  $\vec{E} = -\text{grad}V$  という式で示されるように「電位  $V$  が減る方向」へ向かうベクトルになった。磁場は  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  であるから、 $\vec{A}$  という流れが作る rot（渦）の軸（その向きは、もちろん右ネジの法則で決まる）の方向のベクトルとなる。

このようにベクトルポテンシャルができているところにもう一つの電流（試験電流）を持ってくると、その試験電流は  $-\vec{j} \cdot \vec{A}$  のエネルギーを持つ。試験電流が磁場を作っている電流と同じ向きなら、このエネルギーはマイナスであり、 $\vec{A}$  の大きさが大きくなるほど小さくなる。位置エネルギーが低くなる方向へと力が働くと考えれば、これは同じ向きの電流が引き合うことを示している。もし試験電流が磁場を作る電流と逆向きであれば、エネルギーはプラスとなるから、離れた方がエネルギーが小さくなる。すなわち、逆行電流は反発する。



方位磁石の中にはミクロな電流がある。

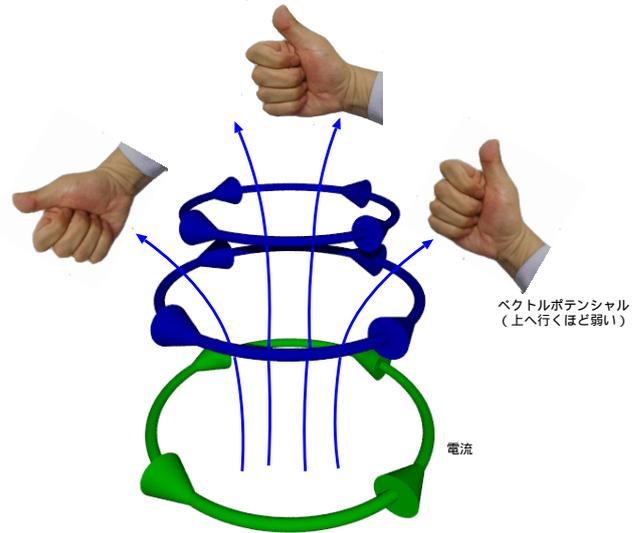
また、そこに方位磁石を持ってきたとする。小さな方位磁石は、小さな円電流と等価である（実際には、方位磁石を構成する原子の中でミクロな電流が流れている）。電流の持つ位置エネルギーは、 $-\int d^3\vec{x} \vec{j} \cdot \vec{A} = -I \int d\vec{x} \cdot \vec{A}$  であるから、これが小さくなるような位置が安定である。左のように図を書いてみるとわかるように、このエネルギーが小さくなる位置

というのはつまり、磁場の方向と方位磁石の方向が一致する方向なのである。

つまり「方位磁石が磁場の方向を向く」という物理現象も、「電流とベクトルポテンシャルによって作られるエネルギーを小さくしようとする」という力学で解釈することが可能になる。

磁石同志の力も同様である。二つの棒磁石があれば N 極と S 極が引き合っつながって一つの磁石となろうとする（そういう方向に力が働く）。磁石の正体を内部に流れる電流と考えれば、これは電流が平行になろうとする、ということである。電流が平行になると、電流・電流の相互作用による位置エネルギーが小さくなるわけである。一方の作る電流のベクトルポテンシャルと同じ向きに別の電流が入れば、位置エネルギーは小さくなる。

円電流の場合のベクトルポテンシャルを図示すると、図のように、電流と同じ方向に渦をまうようにベクトルポテンシャルが発生するだろう。このベクトルポテンシャルの rot を考えると、円の中心軸で上向きになることはもちろんわかる。さらに「上に行くほど弱まる」ということから、外向きの回転があることもわかる（自分が水の中に浸かっている、足先の部分で頭の部分より速い水流が流れているとしたら？と考えると理解できるだろう）。つまり、遠方に行くほど磁場が外へ広がって行くこともこの図から理解することができる（図には示してないが、円電流と同じ平面の上では磁場が下を向くことも図を書いてみればわかる！）。



こうしてベクトルポテンシャルを考えることで、磁場の発生や電流間に働く力を、電位と同様にイメージすることができる。

なお、ここで示した  $-\vec{j} \cdot \vec{A}$  は、外場の作ったベクトルポテンシャル  $\vec{A}$  の中に電流  $\vec{j}$  がやってきた、と考えた時のエネルギーである。電荷の位置エネルギー  $qV$  もそうであったが、 $\vec{j}$  自身もベクトルポテンシャルを作る源であるような場合には、 $\frac{1}{2}$  をかけて  $-\frac{1}{2}\vec{j} \cdot \vec{A}$  としなくては行けないことに注意しよう。これはエネルギーが半分になった、ということではない。この  $\frac{1}{2}$  なしでエネルギー密度を考えてしまうと、「 $\vec{j}_1$  が作ったベクトルポテンシャル  $\vec{A}_1$  により、 $\vec{j}_2$  が持つエネルギー  $-\vec{j}_2 \cdot \vec{A}_1$ 」と「 $\vec{j}_2$  が作ったベクトルポテンシャル  $\vec{A}_2$  により、 $\vec{j}_1$  が持つエネルギー  $-\vec{j}_1 \cdot \vec{A}_2$ 」を両方考慮して足し算してしまうことになるのだが、相互作用のエネルギーであるのでこの二つは同じものを考えていることになる。この「数えすぎ (overcounting)」を防ぐために  $\frac{1}{2}$  が必要なのである。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

### 8.3.3 ベクトルポテンシャルが一意でないこと

実際にベクトルポテンシャルを計算で使う時に注意しなくてはいけないことを一つ指摘しておこう。

電位（「ベクトルポテンシャル」に対比させて「スカラーポテンシャル」と呼ぶこともある）には「定数を加えてもよい」という任意性があった。観測される量である電場が  $\vec{E} = -\text{grad}V$  と微分で定義されているために、 $V \rightarrow V + V_0$  ( $V_0$  は定数) と置き換えても電場が変化しないのである。ベクトルポテンシャルの場合、 $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  と定義されているので、rot を取ると 0 になるベクトル場を  $\vec{A}$  に付け加えても、磁束密度  $\vec{B}$  は変化しない。rot を取ると 0 になるベクトル場としては、 $\text{grad}\Lambda$  のように、任意のスカラー場  $\Lambda$  の  $\text{grad}$  がある（ $\text{grad}$  の rot は常に 0 であることを思い出そう）よって、

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \text{grad}\Lambda \quad (8.24)$$

という置き換えをしても、物理的内容は変化しない。この置き換えは「ゲージ変換」と呼ばれる。この変換を「ゲージ変換」と呼ぶのは、今となっては歴史的理由しかない<sup>13</sup>のだが、現在も広く使われている。

ここで「エネルギー密度が  $-\vec{j} \cdot \vec{A}$  なのだから、 $\vec{A}$  をそんなふうに変えてはエネルギーが変わってしまっているのではないか？」という疑問が湧くかもしれないが、その心配はない。

エネルギー密度は変化してしまうが、その積分である全エネルギーは変化しないからである。エネルギーがどのように変化するか計算してみると、

$$-\int d^3\vec{x}\vec{j} \cdot \vec{A} \rightarrow -\int d^3\vec{x}\vec{j} \cdot \vec{A} - \int d^3\vec{x}\vec{j} \cdot \text{grad}\Lambda = -\int d^3\vec{x}\vec{j} \cdot \vec{A} + \int d^3\vec{x}\text{div}\vec{j}\Lambda + (\text{表面項}) \quad (8.25)$$

となり、電流密度の div が 0 なのでエネルギーの変化分は 0 となる（例によって表面項は 0 になるようにしたとする）。

ベクトルポテンシャルを使って計算している時は、「一見違う値を取っているベクトルポテンシャルでも、物理的内容が同じ場合がある」ことに注意しよう<sup>14</sup>。

<sup>13</sup>ずっと昔は、ほんとうにゲージすなわち物差しの変換だと考える理論があった。つまり電磁場は空間の長さや結びついた量だと考えられていたのである。しかし、現在この理論は否定されている。ただ「ゲージ変換」という概念自体は今も有用である。

<sup>14</sup>これが長い間「ベクトルポテンシャルは数学的なトリックのようなもので、物理的意味はない」と信じられてきた理由であるが、近年、量子力学的な現象（アバロノフ・ポーム効果など）においてはベクトルポテンシャルが存在しないと説明できないことが起こっていることがわかっている。

## 8.3.4 ベクトルポテンシャルの計算

最後に、ベクトルポテンシャルを計算する方法を示す。rot $\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  に、 $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  を代入すると、

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \quad (8.26)$$

となる。ここでベクトル解析の公式

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{V}) = \text{grad}(\text{div}\vec{V}) - \Delta\vec{V} \quad (8.27)$$

を使うと、

$$\text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (8.28)$$

という式が出る。ここで、前節で説明したゲージ変換を使って、div $\vec{A} = 0$  になるようにする。なぜならどんな $\vec{A}$ が与えられても、適切な $\Lambda$ を選ぶことでdiv( $\vec{A} + \text{grad}\Lambda$ ) = 0にすることができるからである。div(grad $\Lambda$ ) =  $\Delta\Lambda$ なので、これは $\Delta\Lambda = -\text{div}\vec{A}$ となるような $\Lambda$ を選べということである。この式を静電場におけるポアソン方程式 $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ と比較すれば、電荷密度が $\epsilon_0 \text{div}\vec{A}$ だったとして電位を求めなさい、という問題と等価である。よって、解は常に存在する。

さて以上のようにして簡単化することに成功したとすれば、ベクトルポテンシャルと電流密度の間には、

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (8.29)$$

という式が成立することになる。これは、電位と電荷密度の間の式

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (8.30)$$

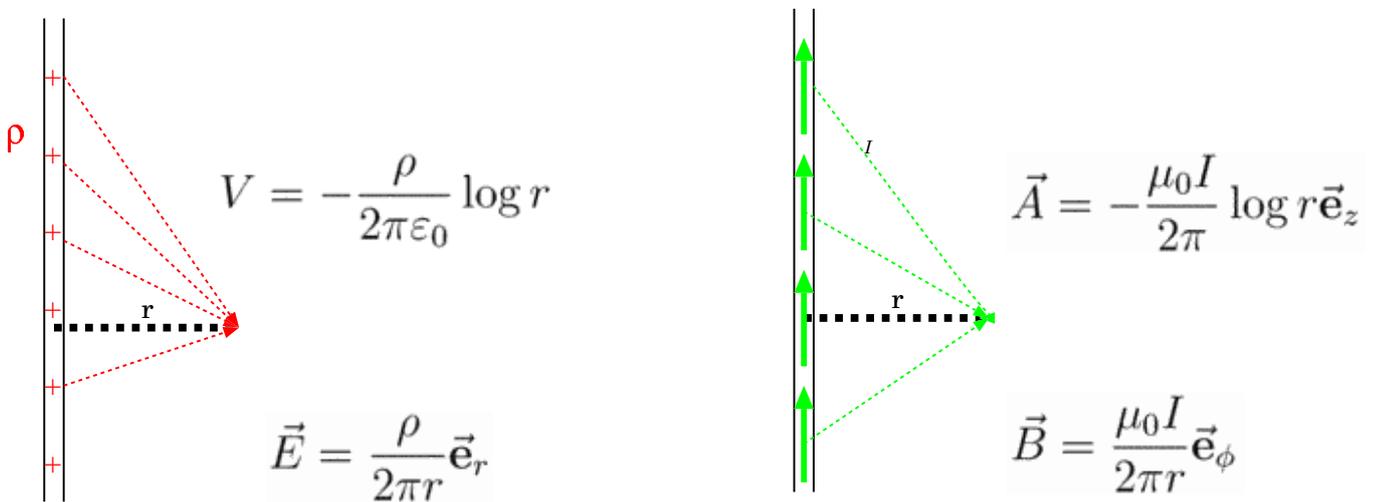
に、非常によく似ている。

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (8.31)$$

という式で「電荷密度から電位を求める」ことが可能であったことを思い出せば、

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (8.32)$$

という計算で「電流密度からベクトルポテンシャルを求める」ことが可能であることがわかる。つまり計算自体は(ベクトルであることを除けば)電位と同様に行うことができる。ベクトルポテンシャルを計算できれば位置エネルギーが計算でき、それを使って力を計算したり、粒子の運動方程式を考えたりすることができる<sup>15</sup>。



無限に長い直線電流  $I$  の場合で計算してみよう。無限に長い直線を線電荷密度  $\rho$  帯電させたのと式の上では同じになる。無限に長い帯電した直線の場合、電位は  $V = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \log r$  と書いたので、無限に長い直線電流の場合のベクトルポテンシャルは

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \log r \vec{e}_z \quad (8.33)$$

となる<sup>16</sup>。

<sup>15</sup>ベクトルポテンシャルを使う計算では「磁場」というものを登場させずに荷電粒子の運動を考えることができるのである。

<sup>16</sup>ところでこの式ではベクトルポテンシャルが  $-z$  方向を向いていることを不思議に思う人がいるかもしれないが、このマイナス符号がついている「遠方で減少する」という性質を満たしていることに注意。実は計算の途中で正の定数を(定数なので)ポテンシャルに加えても物理的結果には意味がないということで捨てている。そのために負の値を取る。

比例定数が変わったことと、スカラーではなく  $z$  方向を向くベクトルとなったことが大きな違いである。今は電流が  $z$  成分しかないの、ベクトルであっても計算はスカラーの場合と同様で済む（電流がいろんな方向を向いている時は、積分はベクトル和を取る形で行う）

電位  $V$  から電場  $\vec{E}$  を求めるには、

$$\vec{E} = -\text{grad}V = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} (\log r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e}_r \tag{8.34}$$

と計算すればよかった。 $\vec{A}$  から  $\vec{B}$  を求めるには、

$$\vec{B} = \text{rot}A = -\frac{\mu_0}{2\pi\epsilon_0} \left( \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \right) \times (\log r \vec{e}_z) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} \underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_z}_{=-\vec{e}_\phi} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{e}_\phi \tag{8.35}$$

という計算をすればよい。

【補足終わり】

### 8.4 章末演習問題

【演習問題 8-1】質量  $m$ 、電荷  $q$  を持つ粒子が、 $\vec{F} = -m\omega^2 r \vec{e}_r$  で表現される復元力を受けて原点に束縛されている（ $r$  は原点からの距離である）。直交座標系で表現すれば、

$$\vec{F} = -m\omega^2 (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \tag{8.36}$$

であり、運動方程式は

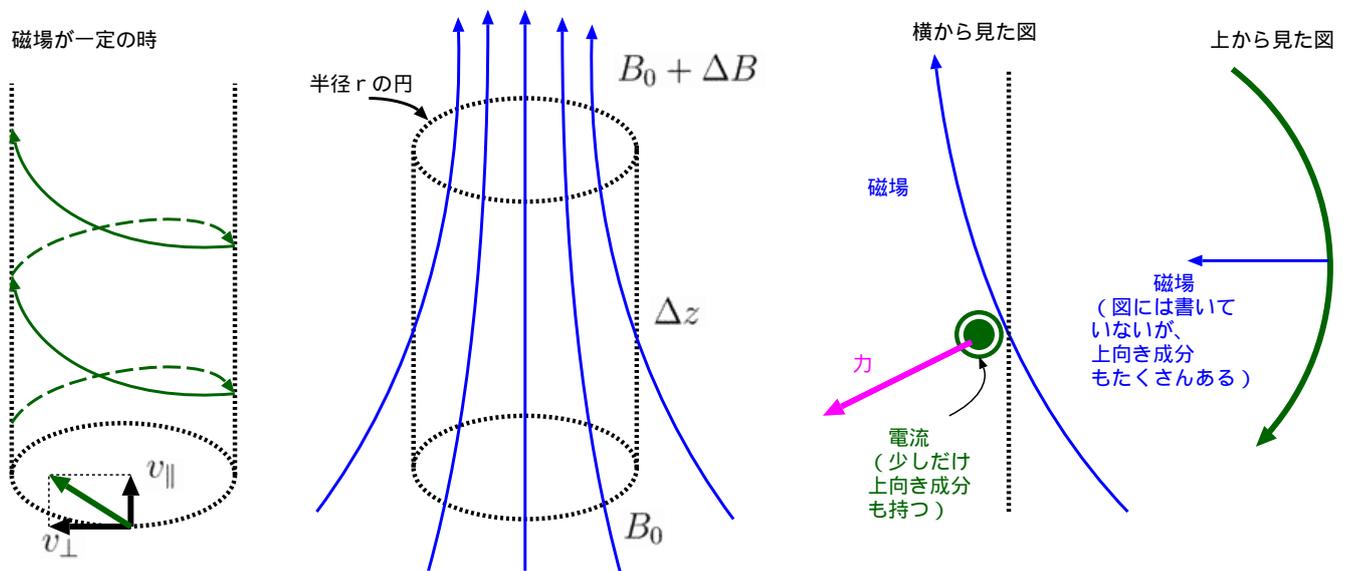
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x, m \frac{d^2y}{dt^2} = -m\omega^2 y, m \frac{d^2z}{dt^2} = -m\omega^2 z \tag{8.37}$$

であるから、角振動数  $\omega$  の単振動をする。

ここで  $z$  軸方向に磁束密度  $B$  の磁場をかける（ $\vec{B} = B\vec{e}_z$ ）すると  $q\vec{v} \times \vec{B}$  の力が加わることになる。

- (1) この時の運動方程式を立ててみよ。
- (2)  $z$  方向の運動方程式は磁場が無い時と同じなので、 $x, y$  方向について考えよう。 $X = x + iy$  という複素変数を使うと  $x, y$  方向の二つの（実数）方程式を、一つの複素数方程式にまとめることができる。まとめてみよう。
- (3) この方程式を解きたい。 $X = e^{i\Omega t}$  と解の形を仮定して代入し、 $\Omega$  を定めよ（2種類の解が出る）。
- (4) 解として出る二つの運動はどのような運動か、図解せよ。

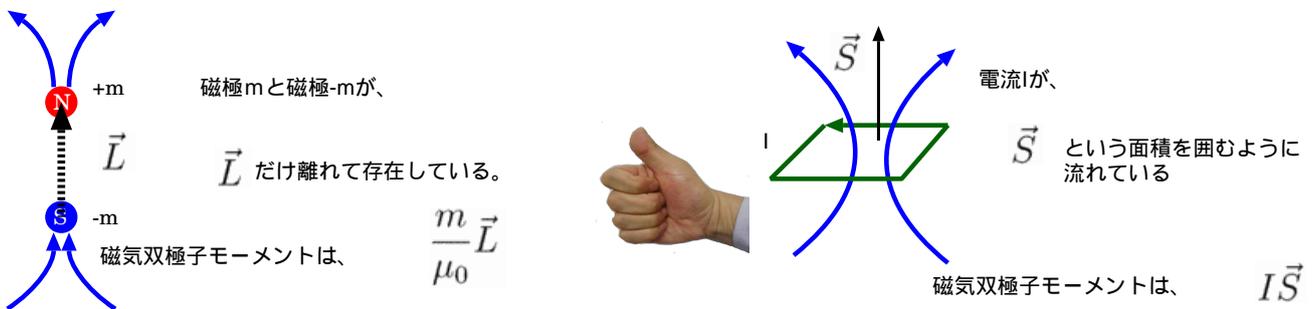
【演習問題 8-2】 $z$  方向を向いた一様磁場（磁束密度  $B$ ）がある。この磁場に平行な方向に  $v_{\parallel}$ 、磁場と垂直な方向には  $v_{\perp}$  という速さをもって、質量  $m$ 、正電荷  $q$  を持った粒子が運動し始めた。もし磁場がずっと一定なら、この粒子は  $z$  軸方向に  $v_{\parallel}$  の速度で運動しつつ、 $xy$  面内で速さ  $v_{\perp}$  の等速円運動をする（螺旋運動）。



- (1) 磁束密度が  $z$  に依存して少しずつ強くなっていく場合を考える。磁束密度の  $z$  成分  $B_z$  が、ある場所で  $B_0$  であり、そこから  $z$  方向に  $\Delta z$  進んだ点では  $B_0 + \Delta B$  だったとしよう。磁力線がつながる ( $\text{div}\vec{B} = 0$  になる) ためには、図の円筒に垂直な方向の磁束密度成分  $B_\perp$  はどれだけなくてはならないか？
- (2) 磁場が円筒面に垂直な成分を持つため、 $z$  方向にも力が働く。  $\Delta z$  進む間に、  $v_\parallel$  はどう変わるか？
- (3)  $B_\perp$  と  $v_\parallel$  があるおかげで、  $xy$  面に働く力もある。この力により、  $z$  方向に  $\Delta z$  進む間に  $v_\perp$  はどう変わるか？
- (4)  $\Delta z$  は微小だとして、この時運動エネルギー  $\frac{1}{2}m((v_\parallel)^2 + (v_\perp)^2)$  が変化しないことを示せ (磁場は仕事をしないのだから当然の結果である)。
- (5) このまま磁場が  $z$  方向に進むにつれて大きくなっていくとすると、この荷電粒子はどんな運動をすることになるか、考察せよ。

【演習問題 8-3】

一様な磁場  $\vec{B}$  中にある磁気双極子モーメント  $\vec{\mu}$  の持つ位置エネルギーは  $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  である。これを計算で確かめたい。磁気モーメントは以下の図に示すような二つの定義方法があった。

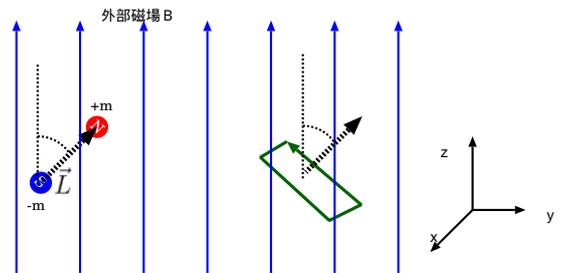


ここで  $\vec{S}$  は、その絶対値が今考えている面積で、向きは面積の法線 (電流の向きにネジを回した時に進む方を向く) のベクトルである。

以下では磁場が  $z$  方向を向いているとし、磁気モーメントは  $z$  軸に対して角度  $\theta$  だけ傾いているとする。

第1の考え方だと、磁位  $V_m = -\frac{1}{\mu_0} Bz$  と考えて、二つの磁極の持つ位置エネルギーが  $mV_m(z), -mV_m(z + L \cos \theta)$  で与えられるとすれば計算できる。

第2の考え方だと、ベクトルポテンシャル  $\vec{A} = (0, Bx, 0)$  が存在していると考えて、その中で電流の持つ位置エネルギー  $-\vec{I} \cdot \vec{A}$  (これは単位長さあたり) を足していけばよい。電流回路は一辺  $a$  の正方形としよう。



この二つの方法で磁気モーメントの持つエネルギーを計算し、一致することを示せ。

## 第9章 磁性体中の磁場

### 9.1 磁性

誘電体中の電場を考えた時のように、磁性体内の磁場を考えていこう。

誘電体中では、外部からかけられた電場によって物質が分極を起こした<sup>1</sup>。その分極によってできる電場によって電場は弱められる。その関係は

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\vec{D} - \vec{P}) \quad (9.1)$$

と表現された。

ここでもし電場と磁場が「電荷がつくる電場」に対し「磁荷がつくる磁場」というふうに対応関係にあったとするならば、話は全く同じになり、

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{P}_m) \quad (9.2)$$

となるだろう（ $\vec{P}_m$  は「磁気分極」とでも呼ぶべき量）。

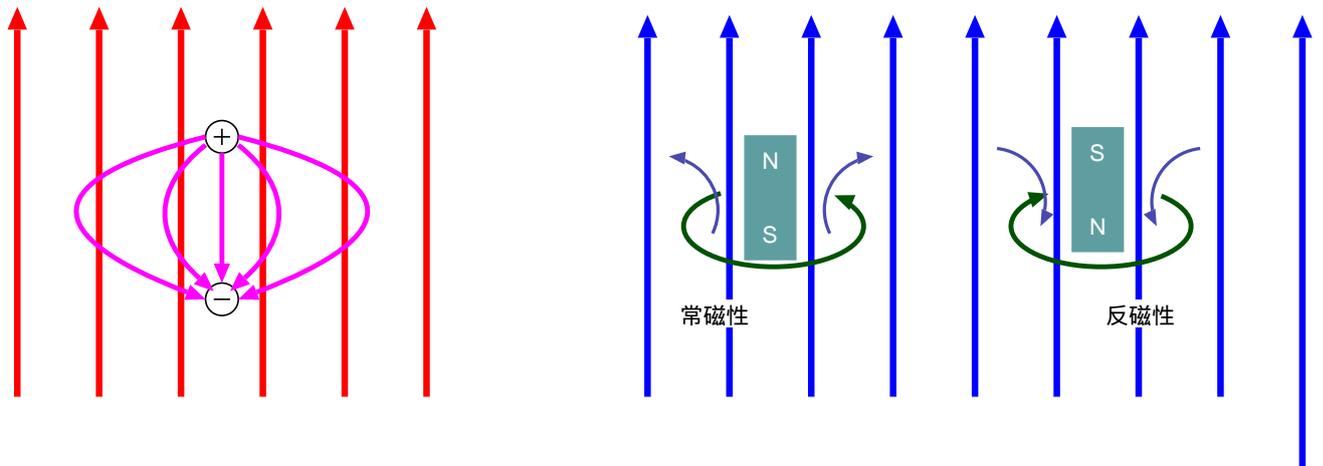
しかし、実際には磁場は磁荷がつくるのではなく、電流または荷電粒子のスピンがつくる。どちらの場合も、電荷の場合の分極に対応する現象（磁荷が二つに分かれるというような現象）は起きない。実際に起こるのは、物質中になんらかの形で電流が発生して、その電流の作る磁場が元からあった磁場に重ねられることになる。この時どのように電流が発生してどのような磁場が重ね合わされるかは物質の種類によって違う<sup>2</sup>。

このようにして外部磁場などの原因で物質に磁場が発生する事を「磁化する」と言い、物質が磁化する時の性質を「磁性」と呼ぶ。磁性の現れ方は様々であるが、その多くは以下の3つのタイプに分類される。

反磁性 (diamagnetism) 磁場がかけられると、その磁場を打ち消すような磁場を作る<sup>3</sup>。

常磁性 (paramagnetism) 磁場がかけられると、その磁場を強める<sup>4</sup>。

強磁性 (ferromagnetism) 外部磁場だけではどのような磁場ができるかは決まらない。外部磁場がない時でも、磁場を作っていることもある<sup>5</sup>。



<sup>1</sup> 強誘電体の場合は外部電場がなくても分極する（自発分極）こともあった。

<sup>2</sup> もちろん、電場の場合も、誘電体の種類によって分極の起こり方にはいろいろある。

<sup>3</sup> diamagnetism の dia-は「横切る」という意味。たとえば直径は「diameter」。「反対を向く」という意味が含まれる。

<sup>4</sup> 「常磁性」という言葉は「常に磁性を持っている」というふうにイメージされるかもしれないが、それは誤解である。paramagnetism の para は「parallel」の「para」。つまり磁場と平行な磁化を意味する。

<sup>5</sup> ferro-は「鉄」を意味する。鉄は代表的な強磁性物質である。

では、以下で各々の場合にどのような物理現象がそこに起こっているのか、を考えていく。その前に、外部からの磁場に対する物質の反応を記述するための量をいくつか定義しよう。

まず、「磁化」と呼ばれるベクトル量がある。これは物質中に存在する磁気モーメントの体積密度で表現される。磁気モーメントの大きさは電流  $I$  が面積  $S$  を囲むように流れているならば  $IS$  となるし、 $+m$  の磁極と  $-m$  の磁極が距離  $l$  離れて存在していたならば、 $\frac{ml}{\mu_0}$  という大きさで求めることができた。 $IS$  で考えるとわかるように、磁気モーメントの単位は  $[\text{Am}^2]$  であり、単位体積あたりの磁気モーメントである磁化の単位は  $[\text{A/m}]$  である。磁化と磁場と同じ単位となる。

後で出てくる反磁性も常磁性も、磁性によって現れる磁気モーメントは、外部からかける磁場に（ほぼ）比例する。そこで、磁化を  $\vec{M}$  とすると、

$$\vec{M} = \chi \vec{H} = \frac{\chi}{\mu_0} \vec{B} \quad (9.3)$$

のように書くことができる。 $\chi$  は無次元量で「磁気感受率（magnetic susceptibility）」と呼ばれる（「磁化率」という呼び方もある）。この磁気感受率が物質の種類によって違ってくるわけである。強磁性体の場合は、磁化の中に外部の磁場と関係しない「自発磁化」を含む。

## 9.2 反磁性

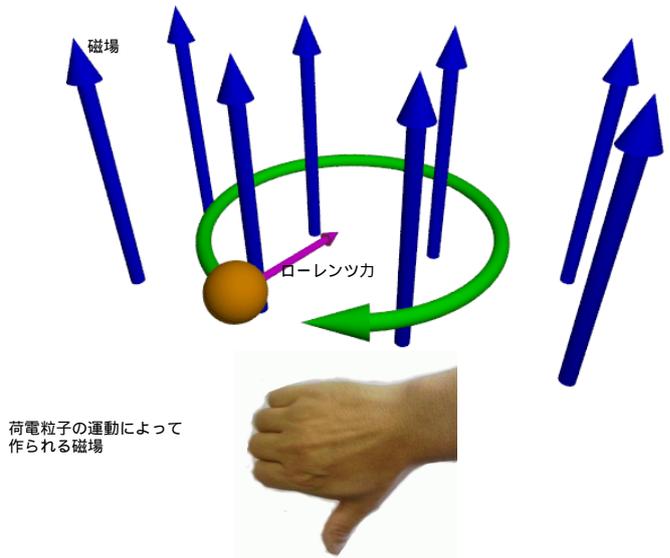
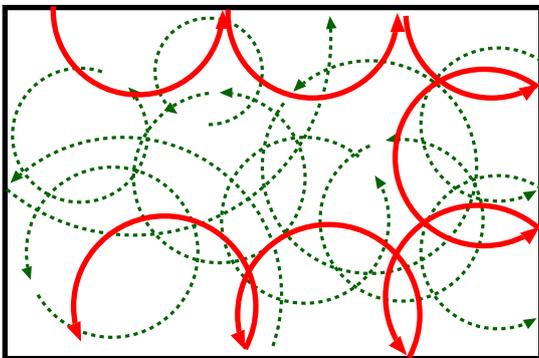
反磁性とは名前の通り、磁場をかけられた物質が逆向きの磁場を発生させることである。その一例としては、自由に動き回る荷電粒子を内部に含む物質（金属など）がある。前の章で考えたように、磁場中では荷電粒子は円運動する。荷電粒子の円運動は一種の円電流と考えることができ、この時作られる磁場は外部からかけられた磁場と逆を向くのである（図を参照）。

このようにしてできる円電流の磁気モーメントを求めておこう。電流の作る双極子モーメントは（電流） $\times$ （電流の作る面積）で計算できる。今の場合、面積はもちろん円の面積  $\pi r^2$  である。この電荷  $q$  が速さ  $v$  で等速円運動しているとすると、単位時間の中に、円上の一点を  $\frac{v}{2\pi r}$  回通過するので、電流（単位時間あたりに流れてくる電気量）は  $\frac{qv}{2\pi r}$  であり、磁気モーメントは

$$p_m = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{qvr}{2} \quad (9.4)$$

である。円運動の角運動量は  $L = mvr$  であるから、角運動量と磁気モーメントの間には、 $p_m = \frac{q}{2m} L$  という関係がある。

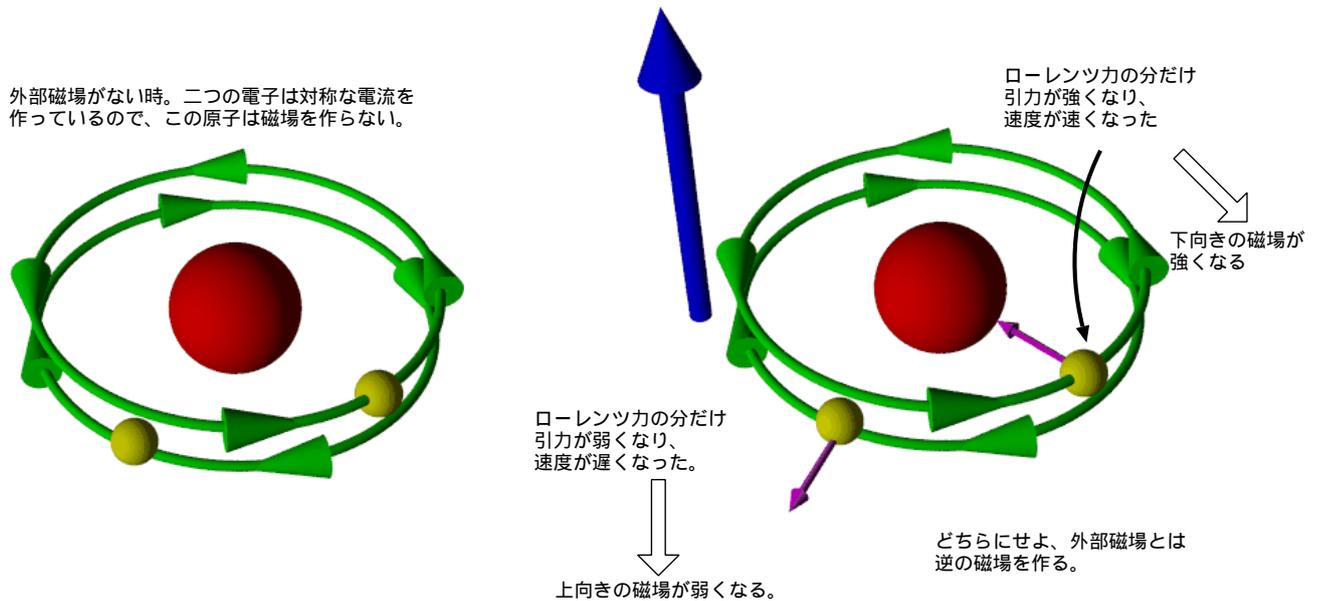
ただし、以上のナイーブ<sup>6</sup>な考え方は実は正しくなく、厳密に古典力学的計算をするとこの効果は消えてしまい、反磁性が現れないことがわかっている。上で考えたように一個の荷電粒子の運動を考えれば磁場ができるように思われるが、金属内には多数の荷電粒子があり、それぞれがいろいろな半径でいろいろな点を中心に円運動することを考えると、話は変わってくる。いっけん、図では反時計回りの電流ばかりが書かれているので、紙面表から裏へ向かう磁場があるように思えるかもしれない。しかし、（図に実線で書いたような）壁に衝突しながら回る粒子の作る電流（時計回り）を考慮すると、磁場の和は0になる<sup>7</sup>。



<sup>6</sup>物理の本で「ナイーブ」と出てきたら、「純情」という意味ではなく「物を知らないマヌケ」という意味だと捉えた方がよい。

<sup>7</sup>このことを示したのはボーアの博士論文（1911年）である。その論文では磁性が古典力学ではどうしても出現しないことが証明されている。ボーアはその後に原子の中では古典力学が成立していないという、いわゆるボーアの原子模型（1913年）を提出し、量子力学を大きく発展させた。ボーアが量子力学を考えた理由はここにもあったに違いない。

後に、量子力学を使って考えると荷電粒子の運動は完全に自由で乱雑なものとはならないので、結果として反磁性が発生することになることがわかった<sup>8</sup>。というわけで実は反磁性が出現するには量子力学の効果が必要なのであるが、ここでは量子力学の話にはこれ以上立ち入らないことにしよう。



自由電子は反磁性の原因となるが、自由でない電子（原子に束縛された電子）も反磁性を生じさせる。原子核の周りを電子が円運動している、という古典的な原子模型でこの反磁性という性質を説明することを試みる。ただし、以下の計算はあくまでも概念だけであって、現実にもこうなるといわけではない（上の場合と同様に、実は量子力学なしに反磁性は説明できない）。ここでは概念だけをつかんでおくように。

簡単のため、原子殻の周りを二つの電子が、互いに逆向きに回っているという状況を考える。電子の運動も一種の電流だが、二つの逆向きの電流の作る磁場が消し合った形になり、磁場はできない<sup>9</sup>。電子が円運動しているのと垂直な方向に磁場をかけてみる。すると電子の運動方程式は

$$mr\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \pm e r \omega B \tag{9.5}$$

となる。複号 ± は磁場に対して電子が上の図で見て反時計回りに回っている場合に +、時計回りに回っている場合に - となる。ローレンツ力の向きを確認してみよう。

角速度  $\omega$  を求めるとすれば、

$$\begin{aligned} mr \left( \omega^2 \mp \frac{e}{m} \omega B \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} &= 0 \\ mr \left( \omega \mp \frac{eB}{2m} \right)^2 + r \frac{e^2 B^2}{4m} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} &= 0 \\ \left( \omega \mp \frac{eB}{2m} \right)^2 &= -\frac{e^2 B^2}{4m^2 r} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^3} \omega \end{aligned} \tag{9.6}$$

のような計算をしていくことになるが、ここまでの計算で  $\omega$  の最終的な値には  $\pm \frac{eB}{2m}$  がつき、複号が + の場合と - の場合で、 $\frac{eB}{m}$  の差が現れることがわかる（これはもちろん、 $r$  が同じである場合のことである）。複号の上の段（最後の式が - になる方）は図で反時計回りに回っている方であり、この場合は角速度が速くなる。一方複号の下段は角速度が遅くなる。二つの角速度の差が  $\frac{eB}{m}$  だということになる。

<sup>8</sup> 導体に生まれる反磁性は、ランダウによって量子力学的に説明された。

<sup>9</sup> まったくの余談であるが、しばらく前にテレビで騒がれていた宗教団体は、こういう逆向き電流が流れていると磁場ができない代わりに「スカラー波」ができるのだ（しかもそのスカラー波は何かよからぬことをしですかす）と言っていた。もちろん事実無根。その宗教団体に言わせると、「磁場ができない代わりにエネルギーがスカラー波になって流れ出す（!?）」のだそうだが、実際は磁場を作らないなら作らない分だけ電流を流すためのエネルギーが少なくて済むだけのことである。

複号のどちらの場合でも、その効果は下向きの磁場を増やす（言い方を換えれば「上向きの磁場を減少させる」）。つまり、これも反磁性の出現である。

反磁性を持った物体は、磁石を近づけると反発することになる。ただし、反磁性は非常に弱いので、強力な磁石でないと現象を目で見ることは難しい。

反磁性を持っている物質としては、希ガスの原子、イオン化することで希ガスと電子配列が同じになっているイオン、水など共有結合で結びついた分子などがある。このような原子・分子は電子や原子核の持つ磁気モーメントがうまく消し合っていて、外部磁場がなければこの物体から磁場が作られることはない。原子サイズのスケールで見ればもちろん、複雑な磁場がそこにあるだろうが、巨視的に見ると（平均化すると）磁場はないと言ってよい。

反磁性体の場合、磁気感受率  $\chi$  は定義により負の値を取る（外部磁場とは逆向きに磁場ができる）が、その値は非常に小さく、 $-10^{-6}$  程度である。

なお、一部の物質は極低温で「超伝導」と言われる状態になり、抵抗無しに電流が流れるようになる（これまた量子力学的現象である！）。この時、内部に現れた電流によって磁場は全て打ち消されるので、この場合を「完全反磁性」と言う。この時、 $\chi = -1$  になっているということになる。

物質	磁気感受率
銀	$-2.6 \times 10^{-5}$
銅	$-9.4 \times 10^{-6}$
ビスマス	$-1.7 \times 10^{-4}$
アルゴン	$-9.5 \times 10^{-9}$
水晶	$-1.5 \times 10^{-5}$
水	$-8.8 \times 10^{-6}$

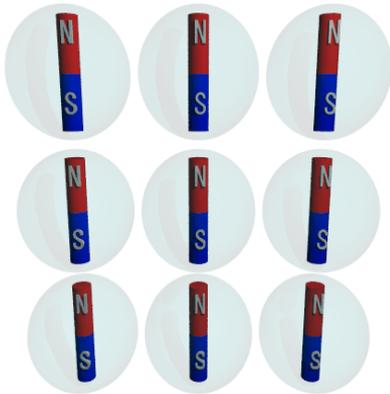
### 9.3 常磁性体

反磁性はもともと磁気モーメントを持っていない電荷が、磁場中を運動することによって円電流と化し、磁気モーメントを持つことから生まれた。それに対して常磁性は、最初から磁気モーメントのある原子・分子が磁場中に置かれた時に起こる。原子・分子が磁気モーメントを持つ理由は、原子核や電子など、一個一個の構成粒子が磁気モーメントを持っていることの他に、電子の軌道運動などがある。原子・分子一個一個が磁石となる（磁気モーメントを持つ）原因は電子のスピンという性質によることが多い<sup>10</sup>。なお、電子自体も一個の磁石なので、自由電子が原因となって起こる常磁性ももちろんある。反磁性を示す物質の場合は、これらがうまく消し合って、原子・分子一個の状態では磁性を示さない。そうではない物質の多くは常磁性体となる。

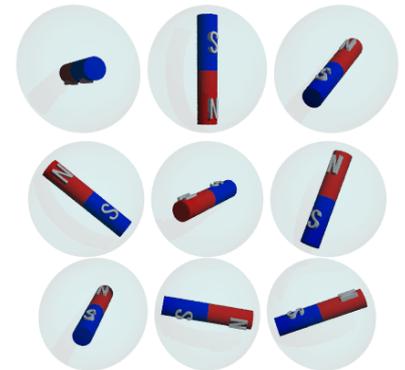
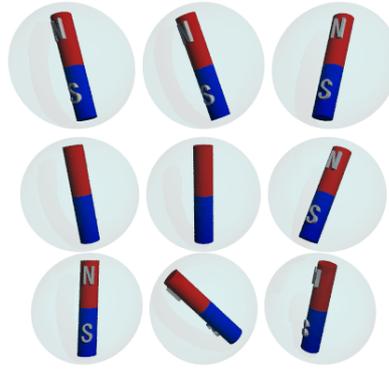
常磁性体を構成する原子・分子は一個だけで0でない磁気モーメントを持つ。いわば「ミニ磁石」である。では常磁性体は磁場を発するかというと、やはり外部磁場が0ならば磁場を発しない。原子・分子の「ミニ磁石」が互いにでたらめな方向を向いているので、トータルの磁場は0になってしまう。

外部磁場がかかると、少し状況が違う。方位磁石がそうであるように、原子・分子の「ミニ磁石」は磁場の方向を向きたがる。といっても、いきなり磁場の方向を向いてしまうというわけにはいかない。原子・分子はそれぞれが乱雑な運動をしている（そして、その運動は温度が高いほど激しい）ので、個々を見るとでたらめだが、全体で平均を取ると磁気モーメントが磁場の方向を向く、という形になる。

<sup>10</sup> スピンとは、古典力学的には自転の角運動量に対応する物理量であるが、その本質は量子力学的にしか理解できない。



エネルギー低い  
乱雑性低い  
(エントロピー低い)



エネルギー高い  
乱雑性高い  
(エントロピー高い)

「低きに流れる」(物理的に表現すれば「エネルギーを下げる方向に状態が遷移する」というのが自然界における一つの傾向である。これだけならば、ミニ磁石は全部磁場方向を向いてしまうように思われる。しかし実は自然界にはもう一つ「乱雑を好む」という傾向がある<sup>11</sup>。これは物理的に表現すれば「エントロピーが高くなる方向に状態が遷移する」ということになる(エントロピーについての詳しいことは3年の熱力学と統計力学で勉強しよう)。実際に起こる物理現象は、この二つの傾向の「平衡点」である。「低きに流れる」からといって全てが最低エネルギーに落ち込むということはないし、「乱雑を好む」からといって外部磁場にまったく反応しないということもない。

多くの常磁性体では、磁気感受率は  $10^{-5}$  から  $10^{-3}$  の程度である(反磁性よりは強く出現するが、後でやる強磁性に比べると、その効果は小さい)。磁気感受率はおおむね絶対温度に反比例する(高温になると、分子運動が激しくなって、磁化を消してしまうと考えればよい)。

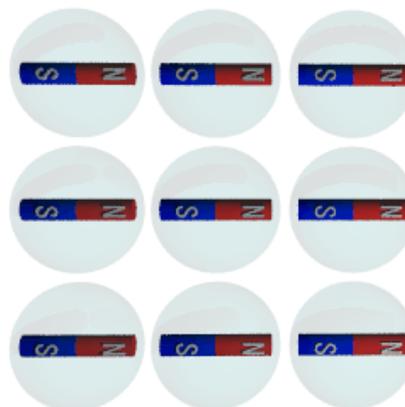
こうして磁化すると、常磁性体は磁石にくっつく。常磁性体となる物質は数多いが、意外なところでは、酸素が常磁性体である(液体酸素は磁石につく)。

物質	磁気感受率
アルミニウム	$2.1 \times 10^{-4}$
白金	$2.9 \times 10^{-4}$
空気	$3.7 \times 10^{-7}$
液体酸素	$3.5 \times 10^{-3}$

## 9.4 強磁性体

強磁性体とは、いわゆる「磁石」になる物質である。鉄、コバルト、ニッケルなどが該当する<sup>12</sup>。外部から磁場をかけられなくても勝手に(自発的に)磁化しているような物質である。誘電体の場合の「強誘電体」に対応するものであることは言うまでもない。

常磁性体も強磁性体も、「ミニ磁石」の集まりであって外部磁場をかけると同じ方向に磁場が作られる点は同じである。違うのは磁場を弱くしていった時の振る舞いで、常磁性体の場合、外部からの磁場を0にすると磁化も消えてしまう。強磁性体の場合は磁化は一般には消えない。

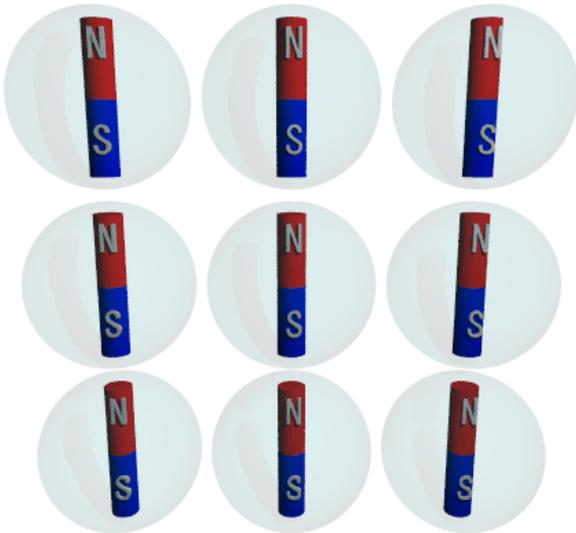


外部磁場をかけると、分子の磁気モーメントの方向が一方向にそろう

<sup>11</sup>一見逆向きの作用に思えるこの二つは、実は同じ内容から導けるとも言える。統計力学を勉強してからこの問題を考えてみるとよい。

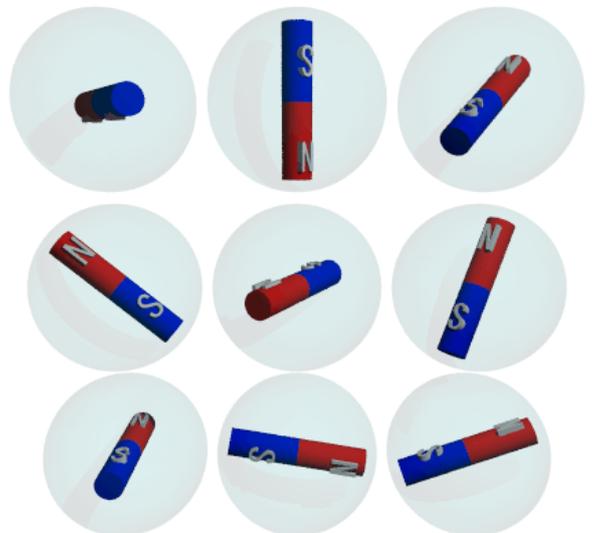
<sup>12</sup>最近作られた最強磁石と言われるネオジウムはネオジウムを主とした合金。

強磁性体



ミニ磁石が整列している

がかってない時の常磁性体



ミニ磁石が乱雑な方向を向いている

なぜ物質が強磁性を持つのかは現在でも未確認な部分を含む、非常に難しい問題であるのでここでは考えない。実際の強磁性体がどのように磁化を起しているかについてのみ述べよう。例えば鉄は強磁性体であり、外部から磁場をかけなくても磁化している状態にある。しかし、では一つの鉄の塊は常に磁石になっているのかということそんなことはない。それは、(磁石になっていない)鉄の内部は「磁区」と呼ばれる区域に分かれていて、各磁区内では磁化の方向がそろっているが、各々の磁区の磁化の方向は乱雑となっているからである。つまり、平均をとると磁化が0になっている。常磁性体も平均をとると磁化が0であるという点では同じだが、磁化がそろっている部分のサイズスケールが違う。常磁性体は「原子・分子」スケールでは磁化している。強磁性は「磁区」のスケールで磁化している。

外部から磁場をかけることによって磁区が整列し、大きなサイズの磁区となると、強力な磁石になる。コイルに鉄芯を入れることで電磁石が強くなるのはこの応用である。

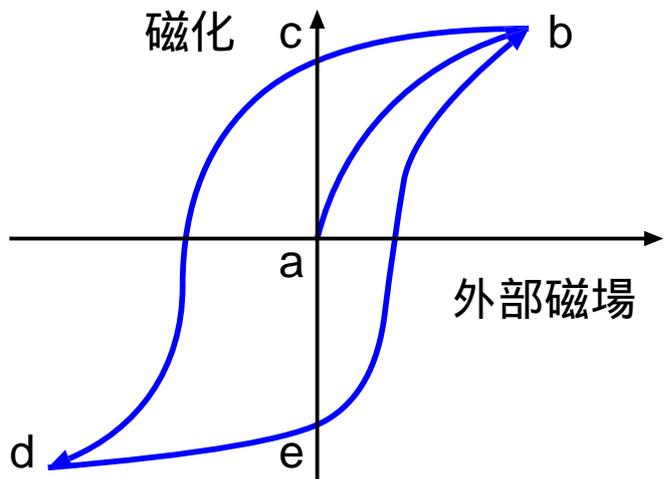
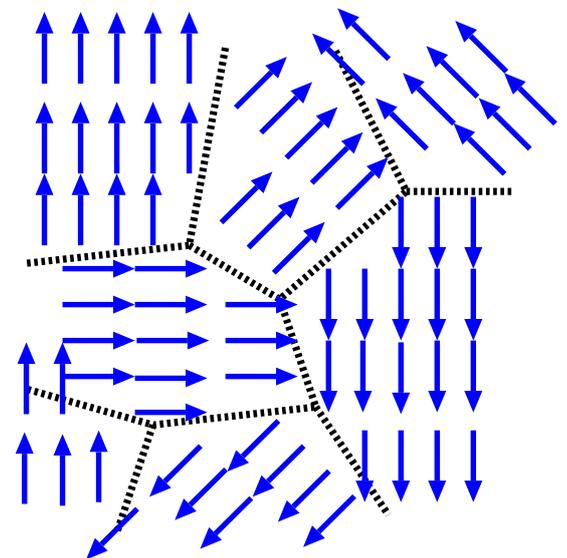
強磁性体の場合は外部磁場と磁化は比例関係にはない(後で示すグラフを参照せよ)。

磁石を高いところから落としたりすると磁力が弱まるが、これは磁区の整列が壊れるためである。また強磁性体は熱することによって強磁性を失い、常磁性になる(この強磁性→常磁性の転移が起こる温度をキュリー温度と言う)。それは温度が高いと分子運動が激しくなり、磁区をたもてられなくなるからである。

最初外部磁場が0で、磁化もしていない強磁性体(図のaの状態)を考える。この強磁性体に磁場をかけていく(図のa→b)と、磁化がどんどん大きくなっていく。ただし、磁区が整列しきってしまうともう磁化が増えないので、ある程度で磁化は増えなくなる(飽和する)。

その状態から外部磁場を弱くしていく(図のb→c)と、外部磁場が0になってもまだ磁化は残っている(この磁化を「残留磁化」と呼ぶ)。さらに逆向きの外部磁場をかけていってから戻すと、今度は図のdを経てeに戻る。最初から述べているように、強磁性体の場合は外部磁場が0であっても磁化の値はいろいろな値が有り得るのである。

これはいったん整列された磁区の状態は外部磁場が消えても残る(記憶される)ということを示している。こ



れをヒステリシスと言い、この記憶効果はカセットテープやフロッピーディスクなどの磁気記憶装置の原理となっている。

ここまでで、原因から磁性の種類をまとめると、

- (1) (内部で電流が流れる物質) (反磁性を示す)
- (2) (原子や分子が磁気モーメントを持っている物質) (常磁性を示す)
- (3) (その中でも特に、磁気モーメントが整列したがる物質) (強磁性を示す)

と考えればよい。ほとんどの物質は内部に電流があるので、反磁性はほぼ全物質に共通と思ってよい。ただし、反磁性は小さいので、常磁性または強磁性を持っている物質の場合、他の性質に隠されてしまって見えないことが多い。つまり「反磁性を持つ物質」はたくさんあるが「反磁性体として観測される物質」は少ない(希ガスの他、銀、銅など)。

常磁性・強磁性を持つ物質は、原子(分子)が「ミニ磁石」として振る舞うような物質である。これは電子の配置などに不釣り合いな場所があり、全体としての磁気モーメントが消し合っていないような物質である。原子のミニ磁石が整列したがる性質を持たないものは常磁性体に、持つものは強磁性体となる。常磁性体には白金、アルミなどがあり、強磁性体には鉄、コバルト、ニッケルなどの小数の金属などがある。

なお、物質がどのような磁性を持つかは温度や圧力などの諸条件で変化することがあり、それを調べることで原子・分子の構造についての情報が得られることがある。

磁性には他の種類もあるが、ここでは省略する。

## 9.5 磁場の表現—磁束密度 $\vec{B}$ と磁場 $\vec{H}$

物質中の電場を表現するには、「電場」 $\vec{E}$  と「電束密度」 $\vec{D}$  を使った。これと同様に、物質中の磁場を表現するには「磁束密度」 $\vec{B}$  と「磁場」 $\vec{H}$  がある。まず静電場の場合どうであったかを振り返ろう。

### 9.5.1 $\vec{E}$ と $\vec{D}$

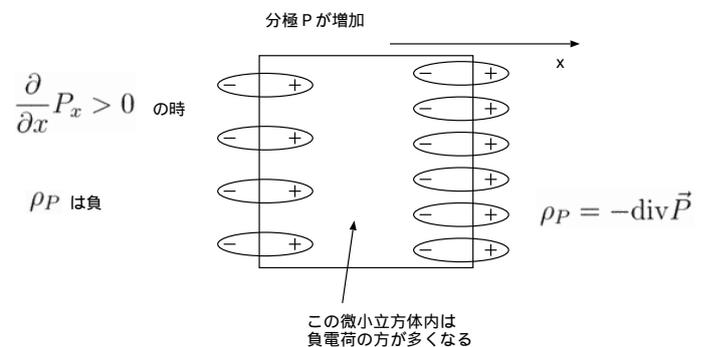
真空中では  $\vec{E}$  と  $\vec{D}$  は定数倍の違いしかない。すなわち、 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  である。では物質中ではどう違いが出てくるのであろうか？

$\vec{E}$  と  $\vec{D}$  の違いを考える時に重要となるのは、「電荷には真電荷と分極電荷の2種類がある」とする考え方である。分極電荷は分極が起こることによって生じる電荷である。原子レベルで起こっている分極によるものだから、この分極電荷の存在は目に見えにくい(というより、ファラデーやマクスウェルが電磁気学を作っていたころは、分子や原子という物の存在すら疑問視されていた)。よって、見えやすい真電荷の部分だけを使った式を作ってみよう。

全ての物質が均等に分極していれば、全体として電荷がないのと同じになる。しかし、分極の大きさに不均一性があると、その分だけそこに電荷があることになる。詳しい計算は前期のテキストを見てもらうことにして、分極による電荷の電荷密度は  $-\text{div} \vec{P}$  と書くことができる(単純に考えれば、分極に湧き出しがあるということはそのあたりから電荷が抜け出した、ということだから、電荷密度がマイナスになるのはもっともである)。真電荷密度を  $\rho_{\text{真}}$ 、分極電荷密度を  $\rho_P = -\text{div} \vec{P}$  とし、この二つの和が実際にそこにある電荷だと考えると  $\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{真}} - \text{div} \vec{P})$  という式から、

$$\text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{真}} \quad (9.7)$$

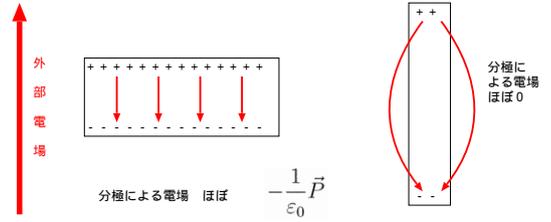
という式が作られる。よって  $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$  とおくことで  $\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{真}}$  という式に達する。



このように、実際にそこにある電場から、「分極によって作られると思われる電場」 $-\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}$ を引き、さらに比例定数 $\epsilon_0$ をかけたものが $\vec{D}$ である。「作られると思われる」であって「作られる」ではないのは、実はどれだけの電場が現れるかは誘電体の形状に依存するからである。たとえば広い平板が板に垂直に一樣に分極しているような場合は、確かに $-\frac{1}{\epsilon_0}\text{div}\vec{P}$ の電場が分極によって作られるが、長い棒が軸に沿って分極しているような時は、逆向きの電場はほとんどできない。

$\vec{P}$ は $\vec{E}$ と同じ方向を向くことが多い(そしてその場合、 $\vec{D}$ も同じ方向になる)ので、その場合はまとめて $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ と書くこともできる。

まとめるとこんなふうに考えられる。



#### 電場と電束密度 (おおざっぱな理解)

電場  $\vec{E}$  実際にその場所に巨視的試験電荷を置いたとするとどんな力が生じるかで定義される量。周りに物質があるとその物質の影響を受けて弱まることもある。

電束密度  $\vec{D}$   $\vec{E}$  から、物質の影響によって現れると思われる  $-\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}$  という電場を差し引いたもの。ただし、 $\vec{E}$  とは単位が  $\epsilon_0$  倍違う。

ただし、誘電体がどんな形をしているか、どんな電場の中に誘電体が置かれたか、などの状況によって  $\vec{E}$  と  $\vec{D}$  がどうできるかも変化するので、上の考え方はあくまで概観に過ぎない。実際には分極は一樣に存在しているわけではなく、原子や分子に付随して局在しているので、現実の微視的な電場、分極、電束密度は皆、ずっとずっと複雑である。上で「巨視的試験電荷」とことわったのは、原子レベルよりずっと大きい試験電荷を置けば、そういう原子レベルの揺らぎは平均化されて消えるからである。

このように解釈すると、 $\vec{D}$  はある意味人工的に作った場と言えるかもしれない<sup>13</sup>である。とはいえ  $\vec{D}$  をつかえば誘電体がある場合でもガウスの法則が使えるなどのメリットがある。

### 9.5.2 $\vec{B}$ と $\vec{H}$

では磁場  $\vec{H}$  と磁束密度  $\vec{B}$  はどんな関係だろうか?—上と同様のまとめを先に書いておくと、

#### 磁束密度と磁場 (おおざっぱな理解)

磁束密度  $\vec{B}$  実際にその場所に巨視的試験電流を置いたとするとどんな力が生じるかで定義される量。周りに物質があるとその物質の影響を受けて強まることも弱まることもある。

磁場  $\vec{H}$   $\vec{B}$  から、物質の影響によって現れると思われる磁束密度を差し引いたもの。ただし、 $\vec{B}$  とは単位が  $\frac{1}{\mu_0}$  倍違う。

である。もちろん厳密な定義は後で出す式であり、ここで述べたのは概観に過ぎない。真空中ならこの二つは比例定数  $\mu_0$  を除いて等しく、 $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$  である。磁性体中では、電流の作る磁場に加えて、磁場によって作られた(あるいは、整列させられた)分子電流による磁場が加えられ、「外部の電流が作るもの」以上に磁場が強くなったり弱くなったりする(物体が常磁性体・強磁性体か、反磁性体かによって変わる)。そこで、電束密度を定義する時にしたように、電流密度  $\vec{j}$  を

$$\text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{j}_{\text{真}} + \vec{j}_M \quad (9.8)$$

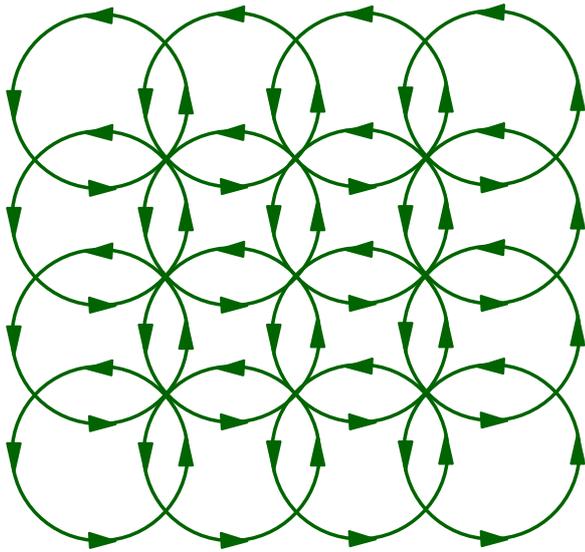
のように「真電流  $\vec{j}_{\text{真}}$ 」と「磁化による電流  $\vec{j}_M$ 」<sup>14</sup>に分けよう<sup>15</sup>。

<sup>13</sup> (巨視的な) 電場も平均化しているという意味では人工的である。

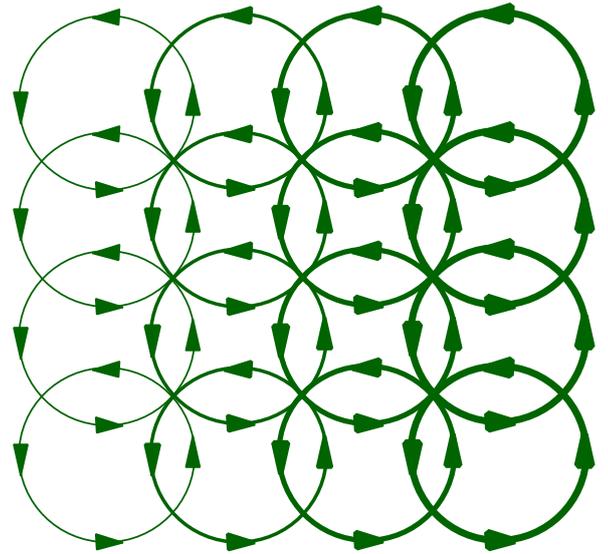
<sup>14</sup> なお、考えるべき電流としてはもう一つ「分極電流」というのがある。これは電気分極  $\vec{P}$  が時間変化することによって流れる電流であり、 $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  と書ける。今は定常状態のみを考えているので省略する。

<sup>15</sup> これまでは真空中を考えていたので  $\vec{H}$  と書いても  $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$  と書いても同じ意味であったが、上の式は  $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$  を使って書かなくてはならない。磁性体中では、 $\vec{H}$  が今から定義する量に変わるからである。

一様な磁化 電流は流れてない



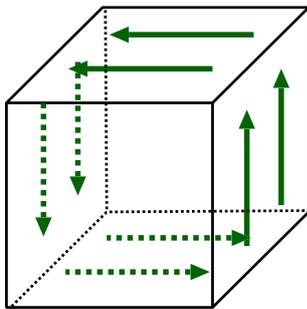
右へ行くほど強い磁化 下向きの電流



 : 磁化の方向

では、上で分極電荷密度  $\rho_P$  を  $\vec{P}$  を使って表したように、 $\vec{j}_M$  を  $\vec{M}$  で表すことができないか、ということを考えよう。もし磁化  $\vec{M}$  が一様なら、その場所には電流は流れていない。というのは上の図を見てもわかるように、全体に同じ強さで円電流が流れていたなら、隣同士で消し合ってしまうからである。図の右のように、 $\vec{M}$  がだんだん増加していると、隣との磁化の強さの差の分だけ、電流が残る。上の図右で言えば、紙面表から裏へ向かう磁化が右へいくほど増加していると、上向きの電流が流れていることになる。

紙面の裏から表へ向かう向きを  $x$  軸として、紙面右を  $y$  軸、紙面上を  $z$  軸とすると、 $\vec{M}$  の  $x$  成分  $M_x$  が増加していると、 $-z$  方向の電流が生まれる ( $j_z \propto -\frac{\partial}{\partial y} M_x$ )。単に比例ではなく、この場合厳密に  $j_z = -\partial_y M_x$  が成立することは、下の図を使って確認しよう。

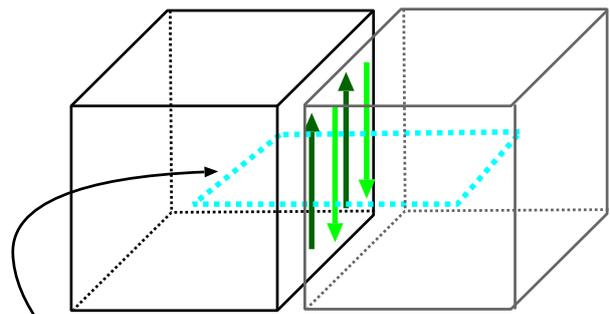


(磁気モーメント) = (電流) × (面積) の式  
 $\parallel$   
 (磁化) × (体積)

$$M_y dx dy dz = I dx dy$$

より、壁を流れる電流は  $M_y dz$

となりあう二つの微小直方体を考えると、



ここの面積  $dx dy$  を通る電流は

$$M_y(x, y, z) dz - M_y(x + dx, y, z) dz \simeq -\frac{\partial M_y}{\partial x} dx dz$$

電流密度は、これを面積  $dx dz$  で割る。

さて、以上では  $M_x$  が  $y$  の変化に伴って変化する時に  $j_z$  がある、ということの説明したが、図のように考えると、 $M_y$  が  $x$  の変化に伴って変化する時も  $j_z$  がある。しかも、その方向は今度は正の向きになる。

よって、

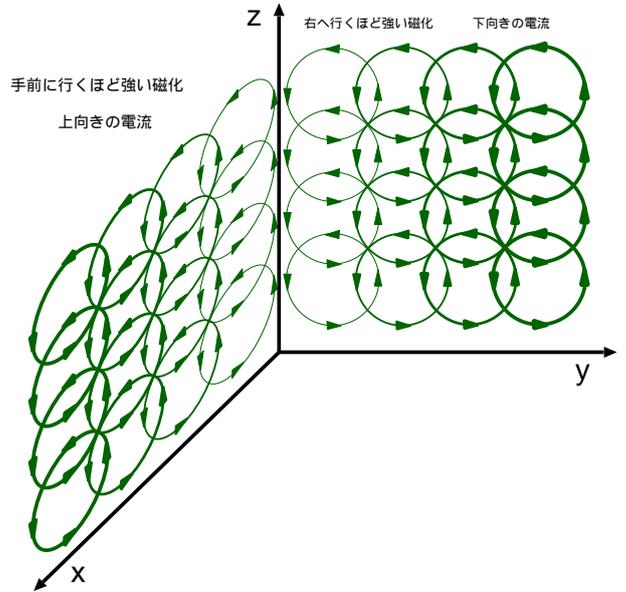
$$\partial_x M_y - \partial_y M_x = j_z \tag{9.9}$$

が成立する。 $j_x, j_y$  についても同様の(サイクリック置換した)式が成立するから、3成分まとめて考えれば

$$\text{rot} \vec{M} = \vec{j}_M \tag{9.10}$$

という式が出る。これを使うと

$$\begin{aligned} \text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) &= \vec{j}_{\text{真}} + \underbrace{\vec{j}_M}_{=\text{rot} \vec{M}} \\ \text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) &= \vec{j}_{\text{真}} \end{aligned} \tag{9.11}$$



ということになる。ここで、

物質中の磁場  $\vec{H}$  の定義

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \tag{9.12}$$

と置くことで、方程式  $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{真}}$  が成立する。

以上をまとめると、静磁場の基本方程式は、 $\vec{B}$  を使って書くならば、

$$\text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{j}_{\text{真}} + \vec{j}_M, \quad \text{div} \vec{B} = 0 \tag{9.13}$$

$\vec{H}$  を使って書くならば、

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{真}}, \quad \text{div} \vec{H} = \rho_M \text{ (ただし, } \rho_m = -\text{div} \vec{M} \text{)} \tag{9.14}$$

である。 $\rho_M$  は静電場の場合の分極電荷密度  $\rho_P = -\text{div} \vec{P}$  に対応する量である。

通常は

静電場の基本方程式

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad \text{div} \vec{B} = 0 \tag{9.15}$$

をもって基本法則とする ( $\vec{j}_{\text{真}}$  の「真」は省くことが多い)。この二つの式を使うと、分子内に発生している磁極や電流が(式の上では)見えなくなるというのが一つの利点である。真電荷や真電流は測定もできるし実験者が設定することもできるが、分極や分子電流は、直接測定したり操作したりすることはできない。そのような量を(見た目だけでも)式から追い出せるというのが新しい場を定義する理由である。

実在する電場・磁場に近いものが「電場  $\vec{E}$ 」と「磁束密度  $\vec{B}$ 」、物質の影響を人為的に取り除いたものが「電束密度  $\vec{D}$ 」と「磁場  $\vec{H}$ 」となっていて、名前と内容が整合してないように感じるかもしれない。英語では  $\vec{E}$ (Electric Field) と  $\vec{B}$ (Magnetic induction) に対して  $\vec{D}$ (Electric Displacement) と  $\vec{H}$ (Magnetic Field) なので、もっと不整合である<sup>16</sup>。しかしこれは磁場が電流によって作られているのか磁極によって作られているのかがわからなかった時代からの名残なのである<sup>17</sup>。最近では  $\vec{B}$  を「磁場」と呼ぶ本もあるようである。

電磁気は歴史が長いせいもあっていろいろと用語に混乱がある(さまざまな単位系が混在していることがこれに拍車をかけている)が、本を読む時には混乱しないように気をつけよう。

<sup>16</sup>英語でも、 $\vec{B}$  を Magnetic Flux Density、 $\vec{D}$  を electric Flux Density と書く場合もある。

<sup>17</sup>特に Electric Displacement(電気変位)や Magnetic Induction(磁気誘導)などという用語は、電磁場が“空間に分布する物質のようなもの”と思われていた時代の名残りであって全く現代的ではない。

### 9.5.3 透磁率

$\vec{M} = \chi \vec{H}$  が成立している場合ならば、

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H} \\ (1 + \chi) \mu_0 \vec{H} &= \vec{B} \end{aligned} \tag{9.16}$$

となる。 $(1 + \chi) \mu_0$  をまとめて  $\mu$  と書いて「透磁率」と呼ぶ。透磁率は物質によって違う ( $\chi$  が物質によって違うから)。透磁率  $\mu$  と真空の透磁率  $\mu_0$  の比  $1 + \chi$  を  $\mu_r$  と書いて「比透磁率」と呼ぶ。これらを使えば、

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \tag{9.17}$$

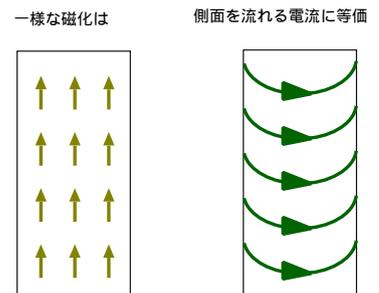
とも書ける。

反磁性体や常磁性体の場合、 $\chi$  が 1 よりかなり小さいので、比透磁率はほぼ 1 である。強磁性体の場合は  $\vec{H}$  と  $\vec{M}$  が正比例関係にないことが多い (特に  $\vec{H} = 0$  でも  $\vec{M} \neq 0$  であることもある) ので、上の式を使うのは無理がある。単純に  $\frac{|\vec{B}|}{|\vec{H}|}$  を透磁率と定義した場合、この量は  $\vec{B}$  に依存して変化する量になる。外部磁場が小さい時はだいたい  $\vec{B}$  と  $\vec{H}$  は比例し、軟鉄の場合で比透磁率にして 300 程度の値となるが、その後増加し、2000 ~ 3000 ぐらい (鉄の状態によって変わる) まで大きくなる (数万の比透磁率を持つ物質もある)。しかしある程度より磁場が強くなると、磁化が飽和する影響で比透磁率はむしろ下がっていく。

## 9.6 例題：一様に磁化した円筒形強磁性体

上の説明の途中で「磁化が一定なら分子電流は打ち消す」ということを書いたが、有限の大きさの磁性体がある場合、全領域において打ち消すということではない。たとえば円筒形の強磁性体とその軸方向に一様に磁化した場合を考えよう (外部磁場はないとする)。

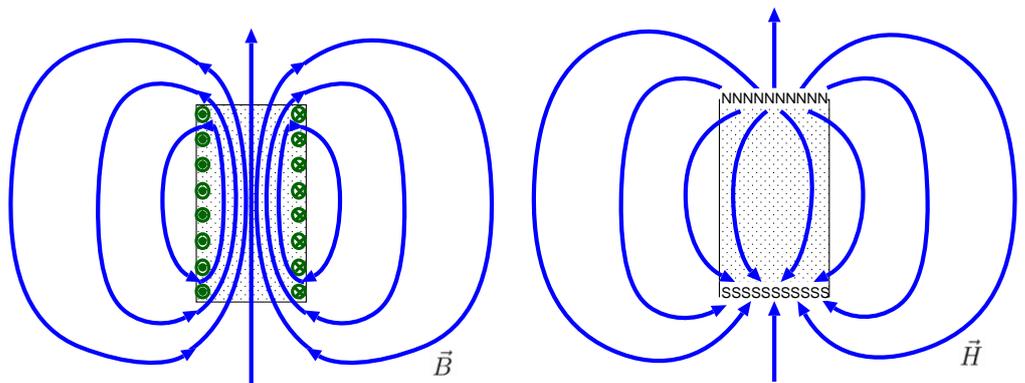
円筒の内側では磁化が存在するが外には存在しないわけなので、そこで磁化の大きな変化がある。そこでだけ  $\text{rot} \vec{M}$  は 0 でない ( $\text{rot}$  は微分的一种なので、 $\vec{M}$  が変化するところでは 0 ではない)。つまり分子電流は円筒の側面に集中して流れていることになる (もちろんこれは平均化して見ればそうなるという話である)。したがって、磁化した円筒の作る磁束密度は、有限な長さのソレノイドコイルの作る磁束密度と同じと考えることができる。



磁性体の作る磁場を、「表面に流れる円電流が作る」と考えて図に示したものが下左の図である。これは電流がつくる磁束密度を表現したものであるから、磁束密度を表す線 (磁束線) は始まりも終わりもなくループする ( $\text{div} \vec{B} = 0$ )。有限長さのソレノイドなので、無限に長い場合とは違って、磁場は外にも漏れていることに注意しよう。しつこいようだがもう一度注意しておく、実際にはこの二つのどちらでもない状態が出現している。分子電流はきれいに重なり合うわけではないから表面以外でも多少は残るだろうし、磁極と考えた場合も、天井と底面以外にも多少は残る (平均化して考えると表面や天井・底面にだけ分布しているように考えてよくなる)。

一方、磁性体の作る磁場を「天井と底に現れる磁極が作る」と考えて図に示すと右の図となる。これは静電場の場合のコンデンサなどの作る電場と相似である。ここには電流はないので、 $\vec{H}$  を表す磁力線はループすることがない ( $\text{rot} \vec{H} = 0$ )。

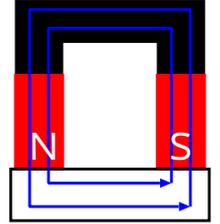
磁性体の外 (真空) では  $\vec{B}$  と  $\vec{H}$  は本質的に同じである (比例定数  $\mu_0$  で比例して



いるだけ)。磁性体内では図の上向きに磁化  $\vec{M}$  が存在している。 $\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{H} = \vec{M}$  であるから、上向きの  $\vec{B}$  の  $\frac{1}{\mu_0}$  倍から下向きの  $\vec{H}$  を引いたものが  $\vec{M}$  になっている。

以上からわかるように、分子電流の影響を「磁極の集まり」と見なして、その影響を天井と底面に集約して、「磁極によって作られる場」を考えるのが  $\vec{H}$  で、分子電流を側面に集約して、「表面電流によって作られる場」が  $\vec{B}$  なのである。

磁化した円筒形の磁性体の内部では  $\vec{H}$  と  $\vec{B}$  は逆を向くことを見た。磁化した強磁性体の内部にできる、磁化  $\vec{M}$  とは逆向きの磁場  $\vec{H}$  のことを反磁場と言い、磁石を弱らせる一因である。このため磁石を輪状にして「極」をなくしておくとき磁石は長持ちする。U字型磁石をしまっておく時に鉄片をつけて輪の形の磁石にしておくのはそういう理由である。



磁場を作るのは電流である（つまり  $\vec{B}$  が本質的）という考えがどの程度正しいかどうかを確かめるには、円筒形磁性体内部に磁場（ $\vec{B}$  もしくは  $\vec{H}$ ）によって力を受けるものを通して、どんな力を受けるのかを調べてみればよい。たとえば中性子（電荷はもっていないが磁気モーメントは持っている）を磁性体内に通してどのような力を受けるのかを調べる実験が実行されている。磁気モーメントを  $\vec{\mu}$  とすると、磁束密度  $\vec{B}$  の中では  $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  のエネルギーを持つ（磁気モーメントは磁場と平行になりたがる）。磁場が空間的に変化していれば、 $\vec{F} = -\text{grad}U = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$  の力を受けることになる。もしも磁場の方が本質的な量ならば、この式は  $\vec{F} = \mu_0 \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{H})$  と変わる<sup>18</sup>。磁性体中では  $\vec{B}$  と  $\vec{H}$  は完全に逆を向いているから、どちら向きに力が働くかでどちらの立場が正しいのか判定できるのである。実験では  $\vec{B}$  の方に重配が上がっている。

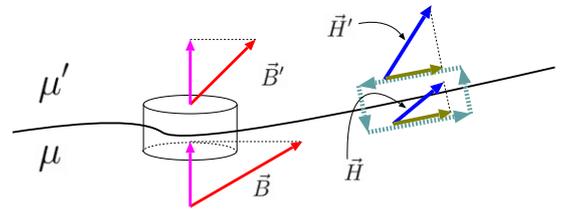
## 9.7 媒質が変わる場合の境界条件

途中で物質分布が変化する時、その両サイドでの電場・磁場の接続条件はどのようになるだろうか。ここまでで求められた静電場・静磁場に対する物理法則は  $\text{div}\vec{D} = \rho$ ,  $\text{rot}\vec{E} = 0$ ,  $\text{div}\vec{B} = 0$ ,  $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$  である。ただしこの  $\rho, \vec{j}$  はどちらも分極電荷や分子電流を含まない。とりあえず真電荷、真電流もない場合を考えると、「 $\vec{D}, \vec{B}$  は  $\text{div}$  が 0」「 $\vec{E}, \vec{H}$  は  $\text{rot}$  が 0」ということになる。

$\text{div}$  が 0 になるようなベクトル場を考える。「 $\text{div}$  が 0」ということは「任意の閉曲面で出入りが 0」ということなので、境界面をサンドイッチするように閉曲面をとれば、境界面を抜ける成分（法線成分）が接続される。よって、 $\vec{B}$  の法線成分が接続される。

$\text{rot}$  が 0 になるベクトル場のばあいは、「任意の閉曲線での線積分が 0」であるから、やはり境界面をはさむような閉曲面をとれば、境界と平行な成分（接線成分）が接続されることがわかる。よって、 $\vec{H}$  の接線成分が接続される。

つまり、 $\vec{D}, \vec{B}$  の法線成分と、 $\vec{E}, \vec{H}$  の接線成分が接続される（ただし、表面に真電荷や真電流がある場合はこの限りではない）。



<sup>18</sup>  $\mu$  が透磁率と磁気モーメントの両方で使われているが、前者は数、後者はベクトルであるから区別して読むように。

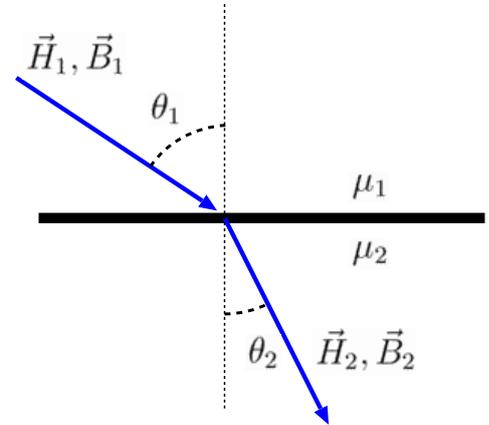
## 9.8 章末演習問題

【演習問題 9-1】透磁率  $\mu$  で無限に長い磁性体円柱の周りに単位長さあたり  $n$  巻きでコイルを巻き電流  $I$  を流すと、磁性体内部にできる磁場と磁束密度はそれぞれどうなるか？

また、この時磁性体の磁化を、「磁性体の側面を流れている電流による」と解釈すると、この磁性体の側面を流れている電流（コイルを流れている電流は計算しない）はどれだけか。

【演習問題 9-2】透磁率  $\mu_1$  の磁性体と透磁率  $\mu_2$  の磁性体が接触している。どちらの磁性体でも磁場と磁束密度は同じ方向を向いている。境界面には真電流は流れていない。

- (1) 境界面でつながっていくのは「磁力線（ $\vec{H}$  の線）」か「磁束線（ $\vec{B}$  の線）」か？
- (2) 磁力線の屈折の法則を作れ。
- (3) 磁束は、透磁率の大きい方に集まりたがるか、小さい方に集まりたがるか？
- (4) 光の屈折の場合、ある条件では「全反射」が起こった。磁力線の場合はどうか、考察せよ。



【演習問題 9-3】無限に広がる透磁率  $\mu$  の磁性体に一様磁場  $\vec{H}$ （磁束密度  $\vec{B}$ ）をかけている。この磁性体に、幅  $d$  の間隙（真空部分）を作った。間隙の境界の法線ベクトルは磁場と角度  $\theta$  をなす。間隙部分にできる磁束密度の強さと向きを求めよ。特に  $\theta = 0$  の時と  $\theta = \frac{\pi}{2}$  の時には磁束密度はどうなるか？



## 第10章 電磁誘導

ここまでは静電場、静磁場、つまり時間的に変動しない電磁場だけを相手にして考えてきた。以下では電場や磁場が時間的に変動すると何が起こるかを考えていく。一般に物理において静的な場合と動的な場合というのは全く違う様相を呈す。電場・磁場の場合も、静的な場合は互いの関連は少なかったが、動的な場合ではこの二つが切っても切れぬ関係で結ばれていることがわかる。

ここまでの話（静電場・静磁場の話）をまとめると、以下の表のようになるだろう。

	源	方程式	力の式	ポテンシャル	ポテンシャルの式	関係
電場	電荷	$\text{div} \vec{D} = \rho$	$\vec{F} = Q\vec{E}$	$V$	$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$	$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$
磁場	電流	$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$	$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$ または $= \vec{I} \ell \times \vec{B}$	$\vec{A}$	$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

この表を見て、「磁場」が電流という「電荷の移動」によって生み出されていることからしても、変動する電場と変動する磁場が互いに影響し合うであろうことは想像できる<sup>1</sup>。

歴史的には、電流が磁場を作ることが発見されてから10年近くが経過した1831年、磁場の時間的変化が電場を発生させること確認されている。それが以下で述べるファラデーによる電磁誘導の研究である<sup>2</sup>。

### 10.1 ファラデーの電磁誘導の法則

ファラデーは「電流が磁場を作る。ではこの逆、磁場が電流を作ることはないのか？」という発想から数々の実験を行った。その結果ファラデーは「磁場があるだけでは電流を作らないが、磁場が時間的に変化すれば電流が流れる」ということを発見する。この現象を「電磁誘導」と呼び、この時流れる電流を「誘導電流」と呼ぶ。

ファラデーの実験によって得た結果はノイマンの手によって電磁誘導の法則としてまとめられている。電磁誘導の法則を説明する前に、「磁束」という量を定義しよう。これは磁束密度に対応する flux である。

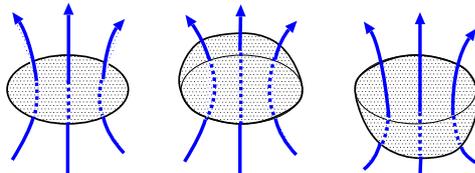
#### 磁束 $\Phi$ の定義

磁束密度  $\vec{B}$  に、それに直交する面積ベクトルをかけて積分したもの、すなわち、

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (10.1)$$

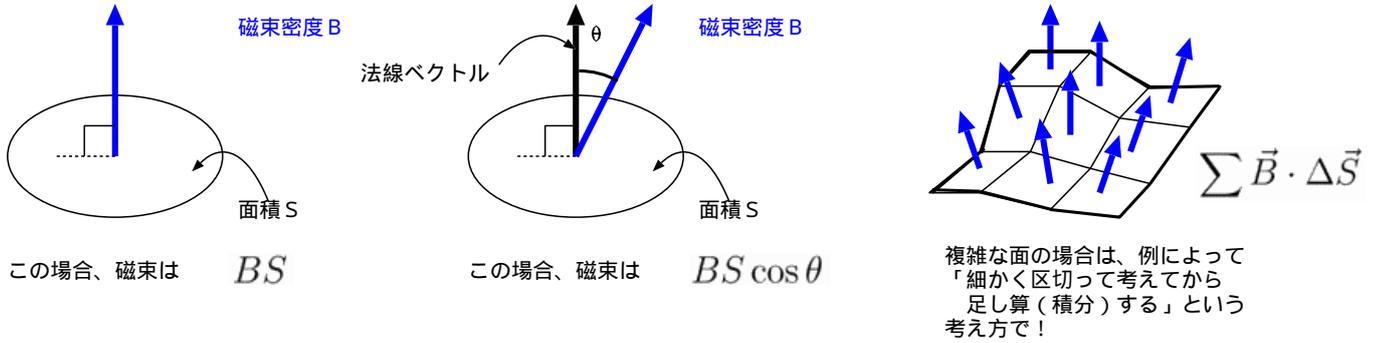
を磁束と定義する。

ある回路を考えた時、その回路が端となっているような面積を考えて、その面積上で磁束を計算する。これを「回路を貫く磁束」と表現する。同じ回路に対して面積  $S$  の取り方はいろいろあるが、 $\text{div} \vec{B} = 0$  であるために端（回路）さえ固定しておけば同じ値を与える。



<sup>1</sup>というのはもちろん「後知恵」なのであって、変動する電場と磁場が互いに影響し合うということのほんとうの意味がちゃんと理解され、体系立ててまとめられるのは、1820年に電流が磁場を作ることが発見されてから、1905年の特殊相対論の完成までかかった。

<sup>2</sup>実際にはその1年前にヘンリーも電磁誘導現象を確認している。



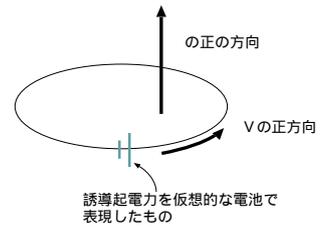
電磁誘導の法則は「回路を貫く磁束」を使って、以下のように表現される。

電磁誘導の法則

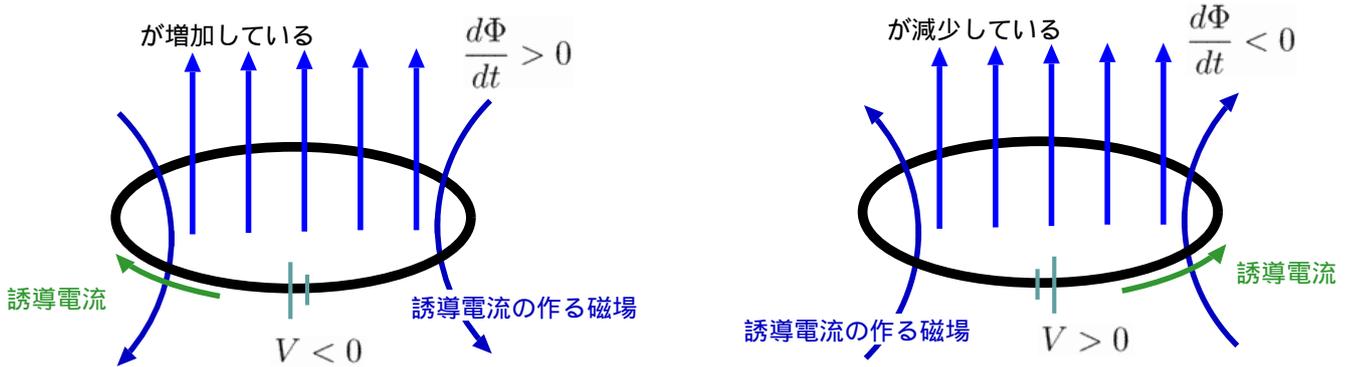
回路を貫く磁束が時間的に変化すると、磁束の時間微分と同じだけの起電力が発生する。

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (10.2)$$

この式の  $V$  の符号は、 $\Phi$  の正の方向に対して右ネジの方向に電流を流そうとする時正と定義する。よって、 $\Phi$  が増加している場合には  $\Phi$  に対して左ネジの方向に電流を流そうとする方向に発生することになる。



この電位差を「誘導起電力」と呼ぶ<sup>3</sup>。



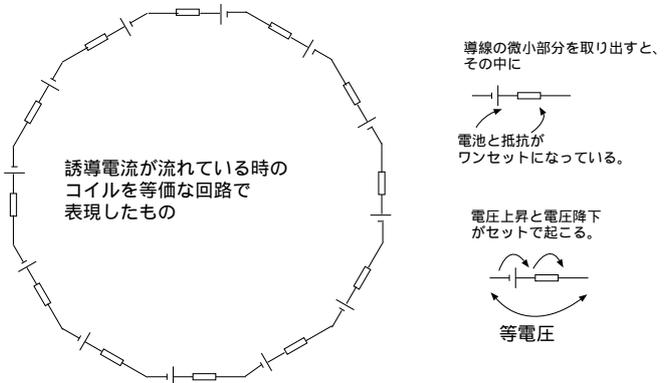
上の図に示したように、 $\Phi$  が増加すれば  $\Phi$  の正の方向とは逆向きの磁場が発生し、逆に  $\Phi$  が減少すれば  $\Phi$  の正方向と同じ方向の磁場が発生する。こうして、誘導電流による磁場が足されることで、 $\Phi$  の変化が妨げられることになる。

なお、図の上では回路の一カ所に電池が存在しているかのごとく書いたが、実際には回路全体で一つの電池であるとみなさなくてはならない。あるいは、回路を構成する導線の微小部分一個一個が微小な電池なのである。

この回路を作る導線が一様であり、全体の抵抗値が  $R$  ならば、この時（右ネジ方向を正として） $-\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$  の電流が流れることになる。ところがこの回路の各部分は抵抗であると同時に電池なのである。

このように円電流が流れている時「電位はどうなっているのだろうか？」と疑問に思う人がいるかもしれないが、右の図でわかるように、この回路ではどの部分

を取り出しても電磁誘導の起電力による電位の上昇と抵抗による電位の下降が同じだけ起こっていて、どこでも電位差はなくなっている。つまり回路上は等電位であると考えてよい（これは状況の対称性を考えてももっともな話である）<sup>4</sup>。



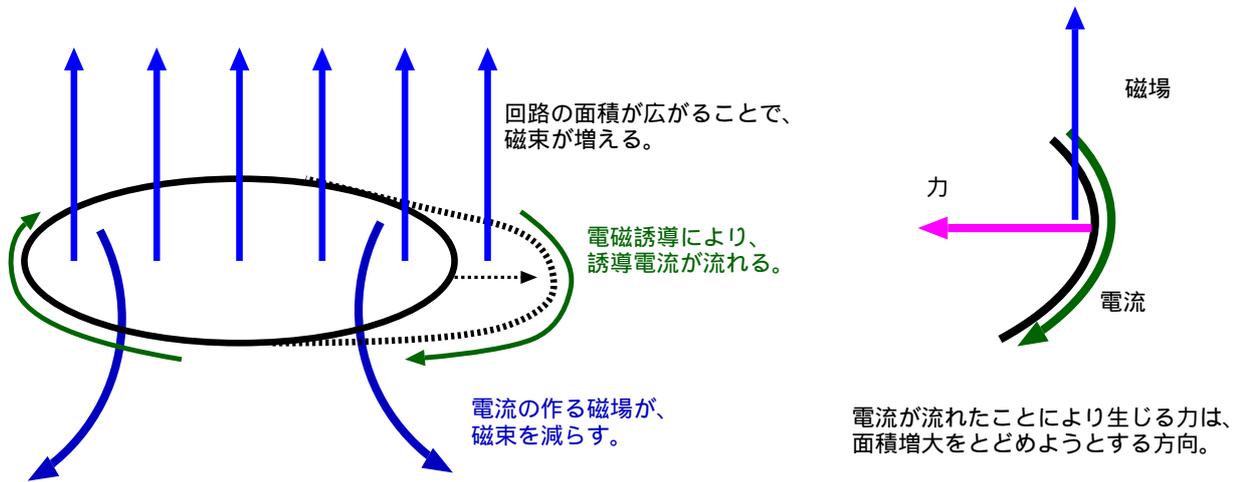
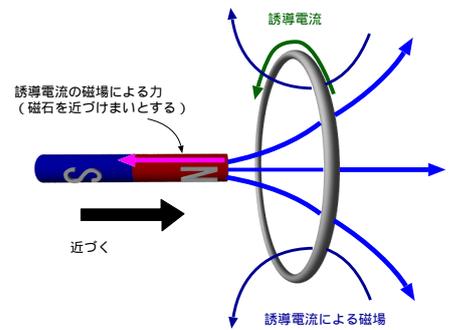
<sup>3</sup> 「起電力」が力ではなかったのと同様、「誘導起電力」も力ではない。電位差である。

<sup>4</sup> 等電位であることが納得できればできたで、今度は「等電位なのに電流が流れるとは」と言う疑問が発生するかもしれない。それについてはこの後で述べよう。

多くの場合誘導電流による磁場は元の磁場の変化を打ち消すには足りず、磁場は変化する（例外は超伝導状態になった物質で回路が作られている時。この場合は磁束の変化がちょうど打ち消され、回路内の磁束は変化できない）。

なお、この「変化を妨げる向きに電流が流れる」というのは磁束密度変化のみならず、他の状況についても言える。例えばコイルに磁石が近づいてくる時、磁石のつくる磁場と逆向きの磁場を作るような誘導電流が流れる。この磁場による力は磁石を遠ざけようとする力（近づくことを妨げようとする力）を作り出す。逆に磁石を離す時は、離すまいとする引力が発生するのである。

また、回路が変形する場合も同様のことが言える。変形する回路に誘導電流が流れた時に回路に働く力は、変形を押しとどめようとする力になるのである。



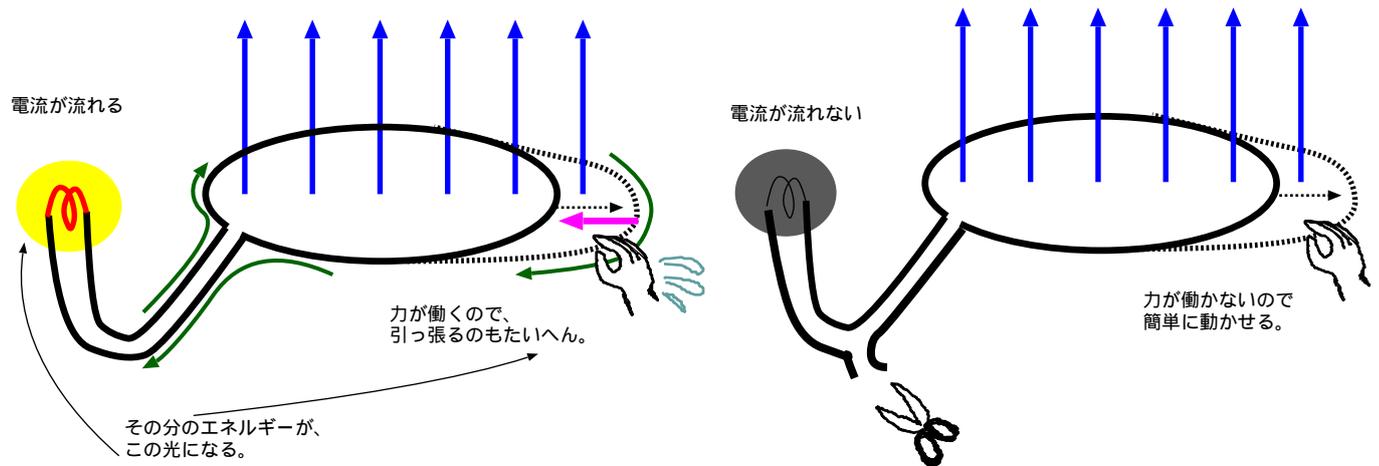
以上の現象をまとめて、

—— レンツの法則 ——

電磁誘導による起電力は、状態の変化を妨げる向きの電流を流そうとする。

と表現する。「状態の変化を妨げる」の中には「磁束変化を打ち消す」はもちろん、「磁石が近づくのを妨げる」「回路の面積が増大するのを妨げる」などが含まれる。

この法則が成立することは、エネルギー保存の観点から納得することもできるだろう。誘導電流が流れない場合と流れる場合を比較した時、電流が流れる場合は誰か（何か）が電流を流すために必要なエネルギーを（仕事として）供給しなくてはならない。つまりそれだけ、「余計な仕事を増やす」方向に電流が流れるはずなのである。



一つ注意しておいて欲しいことは、この「起電力が発生する」という現象は、そこに導線による回路があるかないかとは無関係に起こる、ということである。そこに導線があるならば（つまり動くことができる電荷があるならば）、その起電力が電流という現象を起こす。だが、電流が流れない場合でも起電力すなわち電位差はあるのである（導線が繋がれていない電池にも起電力はあるのと同じ）。

電磁誘導の法則は二つの物理現象を同時に表現していることに注意しなくてはならない。というのは「回路を貫く磁束が変化するとき」には、二種類あるのである。磁束  $\Phi$  は  $\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$  であるから、磁束は「磁束密度  $\vec{B}$  が変化する」と「回路の形（面積）が変化する」の2通りの理由で変化することができる（もちろんこの二つが同時に起こることだってある）。

この二つは違う現象なのに、同じ法則で表現されているということは非常に面白い。こうなるのは、この二つの現象に共通の原理がその後に隠れているからである。その原理を追求していくとアインシュタインの特殊相対論へとたどり着く。この詳細については三年前期の「相対論」で勉強して欲しい。

以下で、この2種の現象それぞれについて分けて考察していこう。

## 10.2 導線が動く時の電磁誘導のローレンツ力による解釈

この節ではまず「導線が動く」場合の電磁誘導現象が、実は前章で考えたローレンツ力で生み出されていることを確認しよう。

電流が磁場から受ける力を導線内の電子の受けるローレンツ力と解釈することができたように、電磁誘導による起電力も、電子の受けるローレンツ力と解釈することができる。本質的な意味で電荷の受ける力は広義のローレンツ力  $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  で尽きている。電磁気現象で現れる力はすべてこれで解釈できるのである。

磁場中で導線（ただし、回路の一部ではなく、ただ導線があるだけの状況を考える）を動かすという思考実験を試みる。導線の中には電流のキャリア（金属の場合なら自由電子）がある。以下は金属の場合で考えよう。導線を動かすと、導線内の金属イオンも自由電子も動く。動いている電荷には磁場からの力が働く。しかし金属イオンの方は導線全体と同じ動きしかできない（できないと金属が破壊される）。電子の方は金属内部では動くことができるので、金属の中で一方向に偏ることになる（図参照）。

図による説明では磁場の方向、導線の方向、導線の運動方向という3つの方向が互いに垂直である場合について考えたが、そうでない場合では

$$V = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell} \quad (10.3)$$

となる（運動速度  $\vec{v}$  と磁束密度  $\vec{B}$  の外積をとって、それと棒の長さと同じ向きを示す  $\vec{\ell}$  との内積をとる）。この式は以下のようにして導出する。

まず、電子に働くローレンツ力は  $-e\vec{v} \times \vec{B}$  である。この力にと、導体内にできた電場による力  $-e\vec{E}$  がつりあうので電子が動かないと考える（この時、 $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$ 。一樣な電場だと考えればこの電場に棒の端から端までを表す変位ベクトル  $\vec{\ell}$  をかけると棒の両端の電位差が出る。すなわち、

$$V = -\vec{E} \cdot \vec{\ell} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell} \quad (10.4)$$

となる。

こうして考えてみると、動いている導線に発生する誘導起電力というのは、ホール効果による起電力と本質的には違いがない（ホール効果の場合は伝導電流がきっかけであったが、電磁誘導の場合は導線の運動がきっかけなのである）。

今は長さ  $\ell$  の棒の場合を考えだが、これが回路の一部を変形するという話だったらどうなるかを考えてみよう。例によって回路を微小部分に分割する。素辺  $d\vec{\ell}$  で表される素辺が  $\vec{v}$  の速度で動いたとすれば、その部分に発生する微小な起電力は

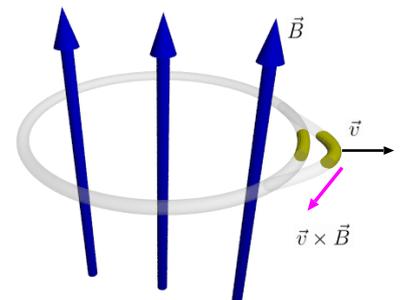
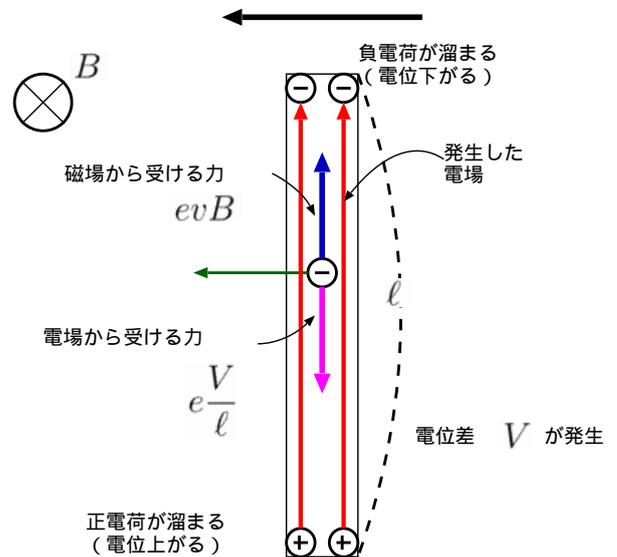
$$dV = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \quad (10.5)$$

である。ベクトル解析の公式  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$  により<sup>5</sup>、

$$dV = (d\vec{\ell} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} \quad (10.6)$$

と書き直すことができる。

<sup>5</sup> 3つのベクトル  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  の作る平行6面体の体積であると考えればこの公式は納得できる。



$d\vec{\ell} \times \vec{v}$  はまさに、 $d\vec{\ell}$  と  $\vec{v}$  によって作られた微小面積を表すベクトル (大きさは面積を表現し、向きは面積の法線ベクトルを表現する) である。つまり、単位時間当たりの面積増加を表している。

右の図の場合、 $d\vec{\ell} \times \vec{v}$  は図の下向きを向く。磁束密度  $\vec{B}$  と内積を取ると負の値が出るが、それは上から見た時に時計回りの電流を流すという事で、レンツの法則を満たしている。

この微小な起電力  $dV$  を積分していくことで回路全体の起電力が計算できて、それは  $\int d\vec{S} \cdot \vec{B}$  の単位時間当たりの増加と等しくなるというわけである。このようにして変形部分に  $\vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt}$  という電位差が発生することがわかった。

誘導起電力が起こる例として、交流発電機を考えよう。簡単のため、一辺  $a$  の正方形回路を考えて、この回路を磁場中で図のように回転させる。この時、回路を貫く磁束は

$$\Phi = Ba^2 \cos \omega t \tag{10.7}$$

と書くことができる ( $\sin \omega t < 0$  の時は、回路の表から裏に向かう向きに磁束が貫いている)。この回路に発生する起電力

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = Ba^2 \omega \sin \omega t \tag{10.8}$$

となる。これがまさに交流電源による電圧である。発電所ではこの原理で交流電圧を作っている。

図のように回路に抵抗  $R$  が接続されているとすれば、回路に流れる電流は

$$I = \frac{V}{R} = \frac{Ba^2 \omega}{R} \sin \omega t \tag{10.9}$$

である。抵抗で消費される電力は

$$IV = \frac{B^2 a^4 \omega^2}{R} \sin^2 \omega t \tag{10.10}$$

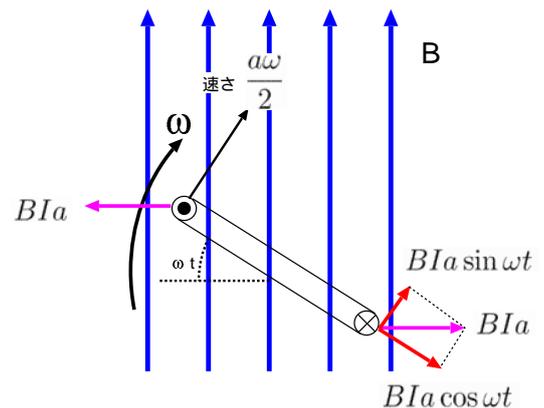
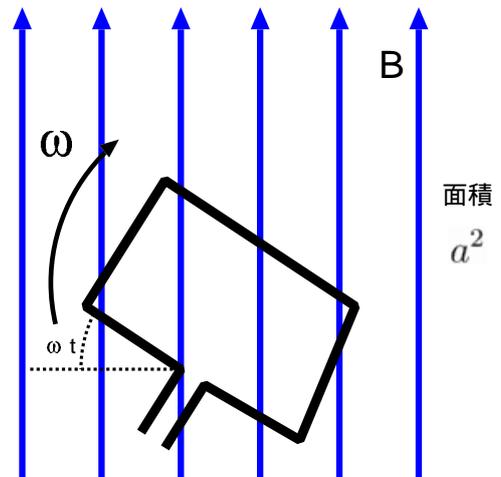
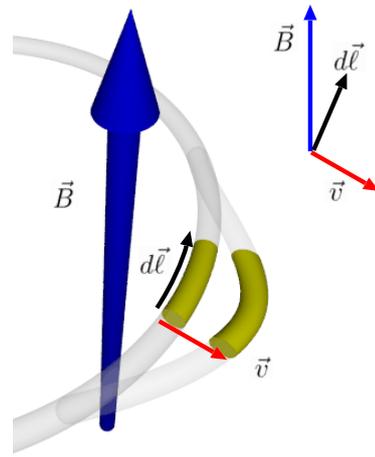
となる。

回路を一定角速度で回転させるために必要な仕事を考えよう。導線には  $Bla$  の力が働くが、そのうち回転を妨げる方向の成分は  $Bla \sin \omega t$  である。この力に抗する分だけの力を与えないと一定角速度の回転は続かない。

導線に対して行わなくてはならない単位時間当たりの仕事は (この力の働いている導線が 2 倍することを忘れずに)

$$Bla \sin \omega t \times \frac{a\omega}{2} \times 2 = \frac{B^2 a^4 \omega^2}{R} \sin^2 \omega t \tag{10.11}$$

となる<sup>6</sup>。これは電力とぴったり一致する (エネルギー保存則がちゃんと成立している)。



<sup>6</sup>実際には力は導線に加えるのではなく、軸受けの部分に加えられるだろう。てこの原理により、加えるべき力は  $Bla \cos(\omega t + \alpha)$  より大きくなる。しかし力学における仕事の原理により、仕事は等しい (力が大きい分、移動距離が小さくなっている)

【補足】この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

### 10.2.1 仕事をするのはいったい誰か？

ここで、ローレンツ力について説明した時に「ローレンツ力は仕事をしない」と述べたことを思い出し、「あれ、おかしいぞ」と疑問を持つ人がいるかもしれない。この导体棒に抵抗をつなぐと抵抗でジュール熱が発生するし、モーターをつないでおけば、それを通じて仕事をさせることができる<sup>7</sup>。誘導起電力の大本であるところのローレンツ力は仕事をしないはずであるのに、ローレンツ力の集合によって作られる誘導起電力による電流が仕事をできるとは、いったいいかなる理由なのであるのか？—という疑問が湧いてももっともなことである。

ここで、10.2 節では导体棒に何かをつなぐということを考えておらず、それゆえに電流が流れていなかったことを思い起こそう。もし、適当な抵抗が接続されていて、電流が流れていたとしたらどう違いが現れるであろうか？

この場合、電子の運動は导体棒が動くことによる運動の他に、電流としての運動が加わる。导体棒の運動方向は棒と垂直なので、この方向の速度を  $v_{\perp}$  と書き、電流としての電子の運動の速度を  $v_{\parallel}$  と書くことにする。

電流が流れていない時の磁場からの力は  $ev_{\perp}B$  で導線に平行な方向だが、電流が流れていると、これに加えて  $ev_{\parallel}B$  の大きさで導線に垂直で運動を妨げる向きの力が加わる。電子は導線内は自由に動けるが、導線から外に出ることはできないので、導線の端で止まってしまう。こうしてホール効果の時と同様の現象が起き、导体棒の端が帯電し、その電場による力がちょうど磁場の力の導線に垂直な成分  $ev_{\parallel}B$  を打ち消すようになった時に導線内の電子は導線に沿って運動するようになる。

電子に仕事をしているのはこの電場による力の方である（やっぱり、磁場は仕事をしなかった！）。

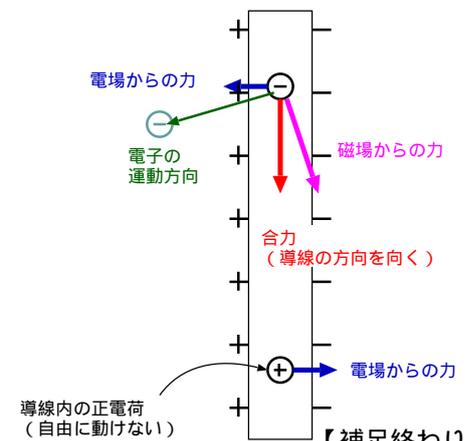
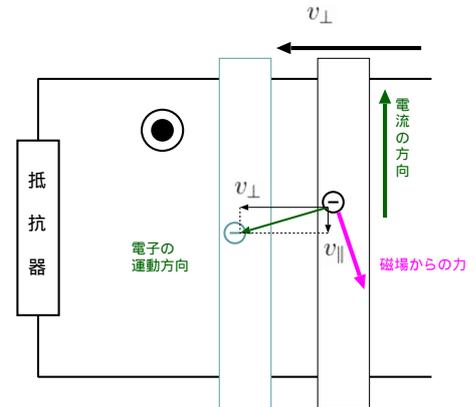
この電場は、导体中にある正電荷（金属の場合であれば陽イオン）に、電子とは逆（つまり、運動方向と逆向き）の力を及ぼす。导体棒が（10.2 節での仮定のように）等速直線運動するとしたら、誰か（何か）が棒に力を加え続けねばならない。電流によってなされる仕事の大本を作り出している（エネルギーを供給している）のは、この「誰か（何か）」なのである。

巨視的に見るならば、磁束密度  $B$  の磁場中の長さ  $\ell$  の導線に電流  $I$  が流れていれば（ $B, I$  は互いに直角とする）、その導線には磁場から  $B I \ell$  の力が働く。その力を打ち消すだけの力を加えないと、棒は等速直線運動しない。棒が速さ  $v$  で磁場  $B$  とも  $I$  とも垂直な方向に動いているとすれば、外部から単位時間あたり  $B I \ell v$  の仕事を加えられているのである。

この仕事が電力を供給する（運動する導線は電池として働くことに注意せよ）とすれば、

$$B I \ell v = IV \quad (10.12)$$

となって、よってエネルギーの収支の観点からも、起電力が  $V = B \ell v$  となることを導けるのである。



【補足終わり】

### 10.3 磁束密度の時間変化と電場

電磁誘導の法則は二つの物理現象をまとめて表現しているが、ここまではその一方である「回路が変化する場合」についてのみ考えてきた。ここからは磁束密度が変化する場合を考える。その時でも、回路内を通る磁束が変化すると起電力が発生する。この時には、運動していない電荷にも力が働いているので、ローレンツ力の式  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  と照らし合わせて考えれば、そこに電場が発生していると考えなくてはならない。つまり、磁束の変化と電場を関係づける物理法則が存在しているのである。これはここまではまだ導入していない、新しい物理法則である。

実験結果である  $V = -\frac{d\Phi}{dt}$  を前提として、その新しい物理法則はどのような式で表現されるのかを求めよう。

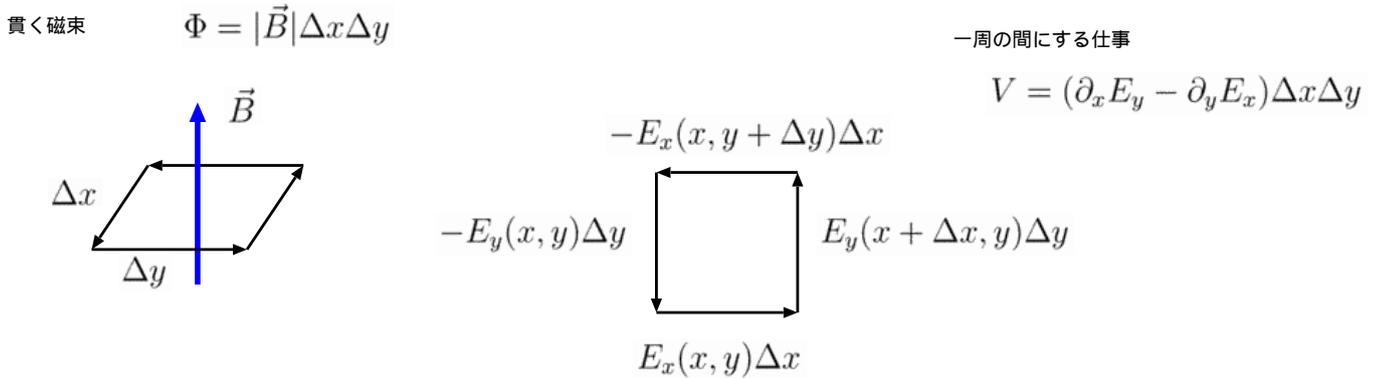
回路が静止している場合を考える。起電力  $V$  は回路を一周する電場  $\vec{E}$  の線積分で定義できるだろう。一方、磁束の方は  $\Phi = \int d\vec{S} \cdot \vec{B}$  のように面積積分で表される。

そこで、

$$-\int_S d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{x} \quad (10.13)$$

<sup>7</sup>話をもっと大がかりではあるが、我々が日常使っている「電気」はまさにこうして得られたものだ。発電所で誘導起電力を使って作られた電力を、各家庭で使っている。

という計算が成立する<sup>8</sup>。この式を微小面積  $dS$  に対して適用することで微分形の法則を出すことができる（これはアンペールの法則の積分形から微分形を出した時と全く同じ計算である。下の図参照）。



あるいはストークスの定理

$$\oint_{\partial S} d\vec{x} \cdot \vec{A} = \int_S d\vec{S} \cdot (\text{rot}\vec{A}) \tag{10.14}$$

を使って

$$-\int_S d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \int_S d\vec{S} \cdot (\text{rot}\vec{E}) \tag{10.15}$$

とした上で積分  $\int_S d\vec{S}$  をとっばらってもいい<sup>9</sup>。  
 どちらにせよ、

電磁誘導の法則の微分形

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{10.16}$$

という法則が作られる。こうして時間的に変動する場合の物理法則が得られた。

この法則は磁束密度の時間変化がない場合は  $\text{rot}\vec{E} = 0$  という静電場でおなじみの法則に帰着する。以後はこっちを覚えよう。

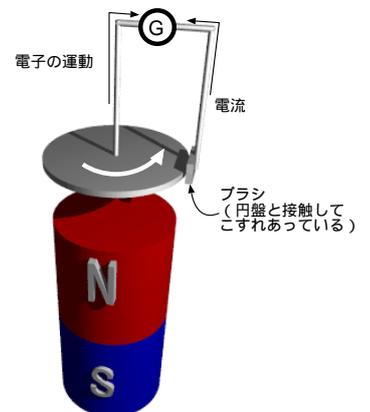
### 10.3.1 単極誘導

ここまでで、 $V = -\frac{d\Phi}{dt}$  という法則の中にローレンツ力  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  と、新しい物理法則  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  が含まれていることを見た。ではこの二つは  $V = -\frac{d\Phi}{dt}$  と等価なのかというと、そうではない。というのは電磁誘導の中には  $V = -\frac{d\Phi}{dt}$  では表すことができない現象があるのである。

その一つが単極誘導で、ファラデーが作った世界最初の発電機でも使われている。

右図がその装置の概念図である。磁石の極のそばで円盤を回転させることで起電力を得る。円盤には中心から導線が出て、導線は導電性のブラシにつながり、円盤の外周に接触し、こすれあいながら円盤が回転する。回転の角速度を  $\omega$  としよう。

この時、円盤の速度  $\vec{v}$  で運動している部分の自由電子には、 $-e\vec{v} \times \vec{B}$  のローレンツ力が働いて、電子を中心方向に引っ張る。これは結果として中心部の電位を下げ、円周部分の電位を上げることになり、起電力が発生して電流が流れる。



<sup>8</sup>  $\Phi$  に対する時間微分が常微分  $\frac{d}{dt}$  だったのに、 $\vec{B}$  に対する微分が偏微分  $\frac{\partial}{\partial t}$  になっていることを不思議に思う人がいるかもしれない。 $\vec{B}$  は場所と時間の関数  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  であるのに対し、 $\Phi$  は面積積分の結果として定義されているので場所  $\vec{x}$  の関数ではない ( $\Phi(t)$ )。よって  $\Phi$  に対する微分は偏微分で書く必要はない。

<sup>9</sup> 積分をとっばらってもいいのは、この法則が任意の面積  $S$  に対して正しいことが確認されているからである。そうでないならば「積分して 0」と「積分する前から 0」は等価ではない。

この起電力は  $V = -\frac{d\Phi}{dt}$  という形で記述することはできない。回路を貫く磁束は変化してないからである。

ここで、円盤を回転させずに磁石の方を回転させたとしても、起電力は全く発生しない。磁石を回転させても（図のように軸対称な磁石であれば）磁束密度は時間変化しないからである。

.....  
**【FAQ】**「磁石がまわれば一緒に磁力線もまわらないのですか？」

もともと、磁力線というのは磁場を表現するために便宜上導入されたものであって、実際にそういう線があるわけではない。つまり「磁力線が運動する」などという考え方は非物理的なのである。電磁気学において、磁力線には実体はない。各点各点の磁場なり磁束密度なりの「場」こそが実体である。そして、電磁誘導による電場が発生する条件はあくまで、 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$  なのである。

軸対称な磁石が軸の周りにまわっているだけでは、各点各点の  $\vec{B}$  は変化しないから電場は発生しない。

.....

**【補足】** この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

### 10.3.2 時間変動する電磁場の場合の電位

静電場における  $\text{rot} \vec{E} = 0$  は、電位が存在できるための条件であった。これが成立していないと、電位は一意的に決まらなくなってしまう。では、時間変動する電磁場では  $V$  は定義できないのだろうか？

もちろん静電場同様に考えたのでは電位は定義できない。電位を定義したければ、電位と電場の関係である  $\vec{E} = -\text{grad}V$  という式の方を修正するとよい。

実際、 $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  に  $\vec{E} = -\text{grad}V$  と  $\vec{B} = \text{rot}A$  を代入すると

これは間違えた式 !!

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(\text{rot}A)}{\partial t} &= \text{rot}(-\text{grad}V) \\ -\text{rot} \frac{\partial A}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \tag{10.17}$$

となってしまうと矛盾する。しかしよく見ると、 $\vec{E} = -\text{grad}V$  とするのではなく、

時間変動する電場とポテンシャルの関係

$$\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{10.18}$$

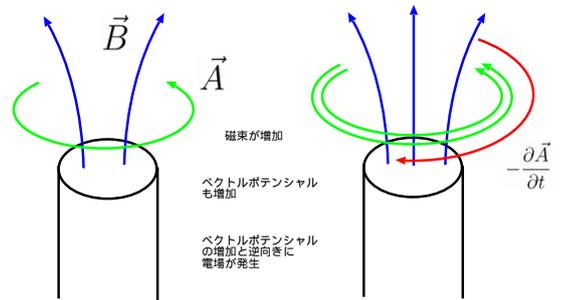
と定義することにすれば、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(\text{rot}A)}{\partial t} &= \text{rot}(-\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \\ -\text{rot} \frac{\partial A}{\partial t} &= -\text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned} \tag{10.19}$$

となつて無事成立する。

つまり、電場は電位の傾きで表現される部分と、ベクトルポテンシャルの時間微分で表現される部分があるのである（静磁場では後者は出番がなかった）。

(10.18) を図形的に表現すると、右図の通りである。磁束密度が増加するということは、 $\vec{B} = \text{rot}A$  からして、その  $\vec{B}$  の方向に対して右ネジの方向に渦を巻く形の  $\vec{A}$  が増加するということである。この時、その場所にはその逆向きに起電力が発生する。つまり  $\vec{E}$  が  $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  を含むということは、そのベクトルポテンシャルの増加と逆向きに電場が発生しますよ（電荷に力が働きますよ）ということの意味している。



.....  
**【補足終わり】**

## 10.4 自己誘導・相互誘導

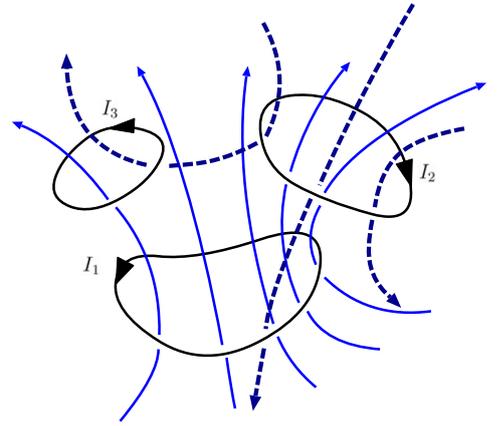
コイルに電流を流すとその内部に磁場ができる。この磁場が変化すればコイルには起電力が発生する。つまり、自分に流れた電流の時間変化によってコイルの両端の電位差は変化する。この現象を「自分で自分に起電力を発生させる」という意味で「自己誘導」と呼ぶ。一方、複数のコイルが存在している時、あるコイルに流れる電流が変化すると別のコイルに誘導起電力が発生する。これを「相互誘導」と言う。

### 10.4.1 自己インダクタンスと相互インダクタンス

あるコイルの作る磁場の磁束密度は、どの場所でもコイルを流れる電流に比例する。よって、その磁場が別のコイルを通る磁束の大きさも電流に比例するだろう。磁束に対しても重ね合わせの原理が成立するので、一個めのコイルを通る磁束を  $\Phi_1$  と書くと、

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2 + M_{13} I_3 + \dots \quad (10.20)$$

のように書ける。係数  $L_1, M_{12}, M_{13}, \dots$  はコイルの形から決まり、 $L_1$  すなわち「コイル1に流れる電流が自分自身を貫くように作る磁束を電流の強さで割ったもの」を「自己インダクタンス」と呼ぶ。 $M_{12}$  は「コイル2に流れる電流がコイル1を貫くように作る磁束をコイル2を流れる電流の強さで割ったもの」であり、「相互インダクタンス」と呼ぶ ( $M_{13}$  以降の量も同様に定義する)。インダクタンスは磁束 (単位 [Wb]) を電流 (単位 [A]) で割ったものなので、その単位は [Wb/A] と表現されるが、特別に [H] (ヘンリー)<sup>10</sup> という単位を使う。



以上のように考えていくと、

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_1 I_1 + M_{12} I_2 + M_{13} I_3 + \dots \\ \Phi_2 &= L_2 I_2 + M_{21} I_1 + M_{23} I_3 + \dots \\ \Phi_3 &= L_3 I_3 + M_{31} I_1 + M_{32} I_2 + \dots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (10.21)$$

とコイルの数だけ式ができる。 $i$  番目のコイルに発生する起電力は

$$V_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} = L_i \frac{dI_i}{dt} + M_{i1} \frac{dI_1}{dt} + M_{i2} \frac{dI_2}{dt} + M_{i3} \frac{dI_3}{dt} + \dots \quad (10.22)$$

となる。

具体的に相互インダクタンスを計算してみよう。

電流  $I_1$  が場所  $\vec{x}$  につくる磁束密度を  $\vec{B}_1(\vec{x})$  としよう。こ電流  $I_2$  が流れる回路の内部を通る磁束を  $\int_{I_2 \text{回路}} d\vec{S} \cdot \vec{B}_1$  と書くと、 $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  であることとストークスの定理を使って、

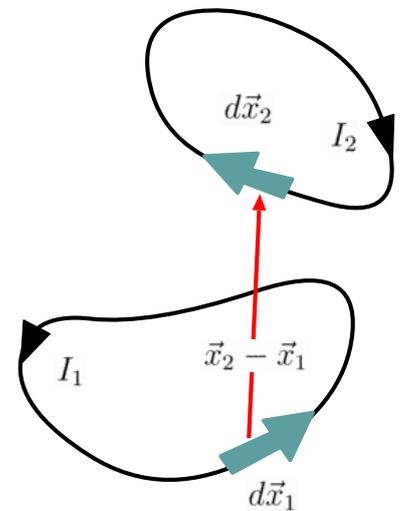
$$M_{21} I_1 = \int_{I_2 \text{回路}} d\vec{S} \cdot \vec{B}_1 = \int_{I_2 \text{回路}} d\vec{S} \cdot (\text{rot} \vec{A}_1) = \int_{I_2} d\vec{x}_2 \cdot \vec{A}_1(\vec{x}_2) \quad (10.23)$$

となる。最後の積分  $\int_{I_2}$  は電流  $I_2$  が流れているところでの線積分である。 $\vec{A}_1$  は電流  $I_1$  が作るベクトルポテンシャルであり、

$$\vec{A}_1(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{I_1} d\vec{x}_1 \frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \quad (10.24)$$

となる。これを代入すれば、

$$M_{21} I_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{I_2} \int_{I_1} d\vec{x}_2 \cdot d\vec{x}_1 \frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \quad (10.25)$$



<sup>10</sup>ヘンリーはファラデーとほぼ同時に電磁誘導を発見した物理学者。特に自己誘導現象はヘンリーの発見である。

となる。両辺を  $I_1$  で割って

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{I_2} \int_{I_1} d\vec{x}_2 \cdot d\vec{x}_1 \frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \quad (10.26)$$

となる。面白いことにこの式を見ると、 $M_{12} = M_{21}$  であることがわかる。つまり、「電流  $I_1$  が作る磁場のうち、電流  $I_2$  の回路を通るものの割合」と「電流  $I_2$  の作る磁場のうち、電流  $I_1$  の回路を通るものの割合」は等しいのである（これを「インダクタンスの相反定理」と呼ぶ）。

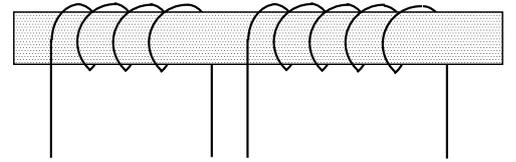
なお、自己インダクタンスについては、上で1,2としていた部分を同じ添字として

$$L_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{I_1} \int_{I_1} d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}'_1 \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}'_1|} \quad (10.27)$$

と積分すればよいのだが、この計算だと  $\vec{x}_1 = \vec{x}'_1$  のところで発散してしまう。自己インダクタンスを発散なしに計算するには導線に太さを与えていなくてはならない（自己インダクタンスの計算例は次の節）。

なお、以上の計算はベクトルポテンシャルを使わずにビオ・サバルの法則で計算することもできるが、少々面倒が増える。

相互誘導を利用して、交流の電圧を変化させることができる。1本の鉄芯などに2本の導線を巻き付けてコイルを作る。このようにすると二つのコイルの両方とも、一巻き分を通過する磁束はほぼ一定となる。この一巻き分の磁束を  $\Phi_1$  として、二つのコイルがそれぞれ  $N_1, N_2$  回巻かれているとすると、コイルの両端の電位差はそれぞれ  $-N_1 \frac{d\Phi_1}{dt}, -N_2 \frac{d\Phi_1}{dt}$  となる。つまり、コイル1の電圧とコイル2の電圧は巻き数に比例する。これを使って

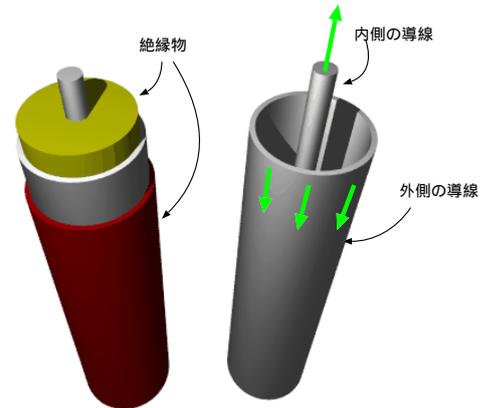


交流の電圧を変化させることができるのである。このような仕組みをトランス（変圧器）と言う。電力は、送電中は高電圧で送り、電柱の上にある変圧器で電圧を落としてから家庭に供給される。途中を高電圧にする理由は、同じ電力  $IV$  を送るのであれば、 $V$  を大きくして  $I$  を小さくした方が、送電線の抵抗によるジュール熱  $J = I^2 R$  を小さくできるからである。トランスは電圧は大きくするが、電力を変えることはできない（変えることができたらエネルギー保存則に反する）。

#### 10.4.2 同軸ケーブルの自己インダクタンス

円柱状の導線と、円筒状の導線を中心軸を合わせて組み合わせたものを同軸ケーブルと言う（通常、芯の部分と外側の部分の間には絶縁物を入れる）。この導線のそれぞれに逆向きに電流を流す。

内部の導線の半径を  $a$ 、外部の導線の内径を  $b$ 、外径を  $c$  としよう。電流  $I$  を流すとすると、電流密度は内部の導線では  $\frac{I}{\pi a^2}$ 、外部の導線では  $\frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}$  である。対称性から磁場は軸を中心とした円形にできる。アンペールの法則を使う。軸を中心に半径  $r$  の位置での磁場の強さを  $H(r)$  とすれば、この位置を一周した時の磁場の積分の値は  $2\pi r H(r)$  となる。この値は内部に流れる電流に等しいが、その電流の値は



$$r < a \text{ の時 内部を流れる電流が } \frac{I}{\pi a^2} \times \pi r^2 = \frac{Ir^2}{a^2}$$

$$a < r < b \text{ の時 内部を流れる電流は } I$$

$$b < r < c \text{ の時 内部を流れる電流は } I - \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \times \pi(r^2 - b^2) = I \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

$$c < r \text{ の時 内部を流れる電流は } 0$$

である。以下では、導線が非常に細いとして、 $a < r < b$  の部分だけが自己インダクタンスに関係するとして計算することにする。この範囲では磁場の強さは  $H(r) = \frac{I}{2\pi r}$  であり、磁束密度は  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  である。

磁束密度から磁束を計算する。この場合、磁束密度は一定でないで、単に面積をかけるのではなく、積分が必要となる。長さ  $\ell$  の部分を取り出して考えれば、

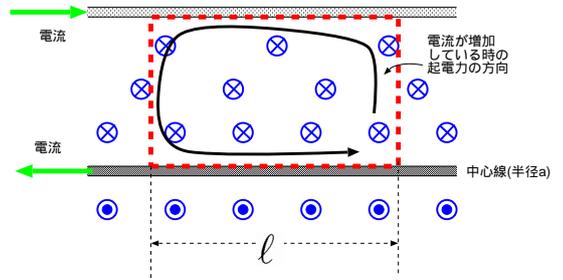
$$\Phi = \int_0^\ell dx \int_a^b dr B(r) = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} (\log b - \log a) \quad (10.28)$$

となるから、自己インダクタンスはこれを  $I$  で割って、

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \log \left( \frac{b}{a} \right) \quad (10.29)$$

となる（ただしこの量は長さ  $\ell$  あたりである）。

この自己インダクタンスにより、同軸ケーブルに流す電流を増加させようとするとき、それを妨げる起電力が発生することになる。



## 10.5 コイルの蓄えるエネルギー

自己インダクタンス  $L$  を持つコイルの両端の電位差は  $L \frac{dI}{dt}$  となる。ここに電流  $I$  が流れれば、(電流)  $\times$  (電位差) で  $LI \frac{dI}{dt}$  の電力が消費されることになる。電力とはすなわち単位時間あたりに消費される電気的エネルギーであるから、これを時間で積分すればコイルが蓄えているエネルギーが計算できることになる。積分は簡単に実行できて、

$$\int LI \frac{dI}{dt} dt = \frac{1}{2} LI^2 + C \quad (10.30)$$

積分定数  $C$  は通常 0 とする。

相互インダクタンスに関係しても同じような計算ができる。相互インダクタンスが  $M$  である二つのコイルにそれぞれ  $I_1, I_2$  が流れているとすれば、この二つにそれぞれ  $M \frac{dI_2}{dt}, M \frac{dI_1}{dt}$  の電位差が発生するので、必要な電力は

$MI_1 \frac{dI_2}{dt} + MI_2 \frac{dI_1}{dt}$  であり、これを積分すれば、

$$\int \left( MI_1 \frac{dI_2}{dt} + MI_2 \frac{dI_1}{dt} \right) dt = MI_1 I_2 \quad (10.31)$$

というエネルギーを持つことになる（積分定数は 0 とした）。

まとめると、

$$\frac{1}{2} \sum_i L_i (I_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} M_{ij} I_i I_j \quad (10.32)$$

となる（第 2 項に  $\frac{1}{2}$  がついていないのは、和を取ると  $M_{12} I_1 I_2$  と  $M_{21} I_2 I_1$  というふうに、同じものが 2 回現れるからである）。

前節で説明したトランス（変圧器）の場合、電流は周期的に変動するから、このエネルギーも振動することになるが、その平均は一定を保つ。つまりトランスを出入りするエネルギーは長期的に見れば保存することになる。

このエネルギーの書き方は「エネルギーはコイルを流れる電流が持っている」という考え方だが、「エネルギーは磁場が持っている」という考え方をすることもできる<sup>11</sup>。(10.32) を、

$$\frac{1}{2} \sum_i \left( L_i (I_i)^2 + \sum_{j \neq i} M_{ij} I_j \right) = \frac{1}{2} \sum_i I_i \left( L_i I_i + \sum_{j \neq i} M_{ij} I_j \right) = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i \quad (10.33)$$

<sup>11</sup>数式の表現上で、エネルギーが何に分布しているかは選択の余地がある。エネルギーはもともと「仕事によって増減する量」と決められているから、仕事とエネルギーの出入りの関係がちゃんとあっていれば、何がそのエネルギーを持っていなくても定義には反しない。

と書き直す。ここで、

$$\begin{aligned}
 \Phi_i &= \int_{\text{回路 } i \text{ に囲まれた面}} d\vec{S} \cdot \vec{B} && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (\vec{B} = \text{rot}\vec{A}) \\
 &= \int_{\text{回路 } i \text{ に囲まれた面}} d\vec{S} \cdot (\text{rot}\vec{A}) && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (\text{Stokes の定理}) \\
 &= \int_{\text{回路 } i} d\vec{x} \cdot \vec{A}
 \end{aligned} \tag{10.34}$$

という変形を行う。これで、 $\frac{1}{2}I_i\Phi_i = \frac{1}{2}I_i \int_{\text{回路 } i} d\vec{x} \cdot \vec{A}$  となるわけだが、この線積分  $\int d\vec{x}$  は  $\int d^3\vec{x}$  に置き換えることができる。こうして、コイルの持つエネルギーは

$$\frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \vec{j} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} (\text{rot}\vec{H}) \cdot \vec{A} \tag{10.35}$$

となる。ここで  $\vec{j} = \text{rot}\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$  を使った。さらにベクトル解析の公式

$$\text{div}(\vec{V} \times \vec{W}) = \vec{V} \cdot (\text{rot}\vec{W}) - (\text{rot}\vec{V}) \cdot \vec{W} \tag{10.36}$$

を使うと、

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} (\text{rot}\vec{H}) \cdot \vec{A} &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \vec{H} \cdot (\text{rot}\vec{A}) - \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \text{div}(\vec{H} \times \vec{A}) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \vec{H} \cdot \vec{B} + (\text{表面項})
 \end{aligned} \tag{10.37}$$

を得る<sup>12</sup>。表面項を無視すれば、 $\frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \vec{H} \cdot \vec{B}$  が磁場の持つエネルギー密度の式である。この式は電場のエネルギーの式  $\frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \vec{D} \cdot \vec{E}$  に非常に良く似ている。

**【補足】** この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

このエネルギー密度が  $\frac{1}{2}\vec{j} \cdot \vec{A}$  という形をしていて、前に出てきたベクトルポテンシャル内の電流の持つ位置エネルギー密度  $-\frac{1}{2}\vec{j} \cdot \vec{A}$  と違うことを不思議に思う人がいるかもしれない。この違いはどこから来るかという、 $\frac{1}{2}\vec{j} \cdot \vec{A}$  の方は電流を作るのに必要なエネルギーであり、 $-\frac{1}{2}\vec{j} \cdot \vec{A}$  の方はすでに存在している電流を外部から持ち込む時のエネルギーなのである（同行電流は引き合うので、このエネルギーはマイナスになる）。

従って、上のような「電流を流す時に注ぎ込まなくてはいけないエネルギーはいくらか」という問題には  $\frac{1}{2}\vec{j} \cdot \vec{A}$  を使わなくては行けないが、「既に存在している）電流と電流の間にどんな力が働くか」という問題の時は  $-\frac{1}{2}\vec{j} \cdot \vec{A}$  を使わなくては行けない。

【補足終わり】

<sup>12</sup> 「表面項」とは  $\int d^3\vec{x} \text{div}(\text{なんとか})$  の形の項のこと。ガウスの定理により、これは積分範囲の表面での積分に直せる。よって積分の端（無限遠とする事が多い）で（なんとか）が 0 になるならばこの項は無視できる。

# 第11章 マックスウェル方程式

ここまで作った電磁気学の基本方程式を考えてきたが、実は最後にもう一つの修正を行う必要がある。それによって「マックスウェル方程式」が完成する。

## 11.1 変位電流

### 11.1.1 マックスウェルによる導入

電磁誘導の法則は

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (11.1)$$

と書け、アンペールの法則は

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} \quad (11.2)$$

と書ける。また、電場と磁場に対するガウスの法則は

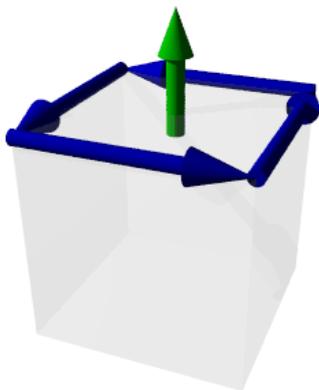
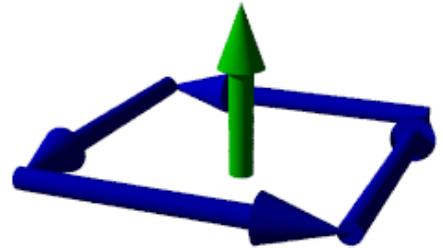
$$\text{div}\vec{D} = \rho, \quad \text{div}\vec{B} = 0 \quad (11.3)$$

であった。

1865年、マックスウェルは上の方程式が矛盾を含むことに気づく（正確に言うと、マックスウェルの使っていた式は上の式より少々ややこしい。現在使われているいわゆる「マックスウェル方程式」は後にヘヴィサイドたちが整備したものである）。

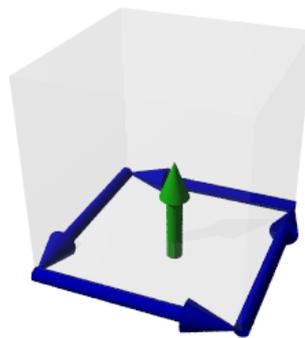
マックスウェルが問題としたのは  $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$  である。この式を図で表現したものが右上の図である。微小面積をまわりながらの  $\vec{H}$  の積分が、その微小面積を通る電流に等しい。

この両辺の div を取る。特に  $z$  微分の項を図示すると以下ようになる。



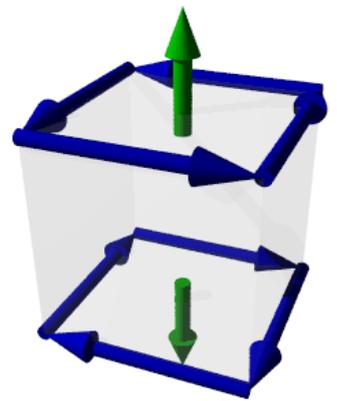
$$(\text{rot}\vec{H})_z(x, y, z + \Delta z)$$

—



$$(\text{rot}\vec{H})_z(x, y, z)$$

=

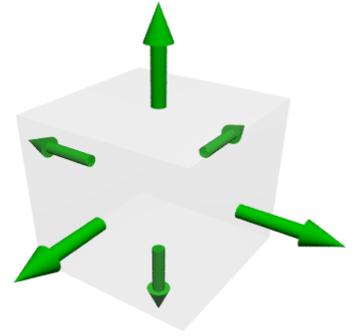
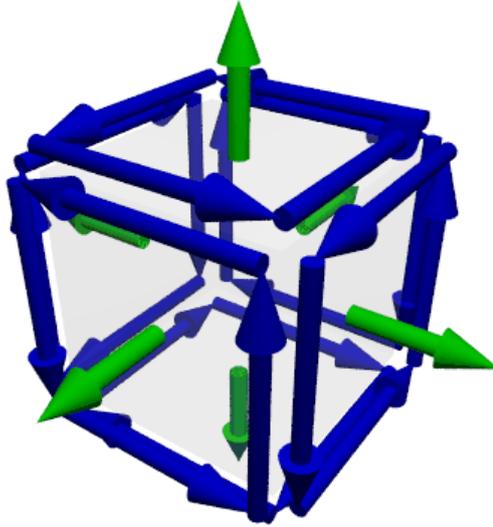


$$\frac{\partial}{\partial z}(\text{rot}\vec{H})_z(x, y, z)\Delta z$$

div は  $x, y, z$  の3方向の微分の和であるが、そのうち  $z$  方向の微分を表現したのが上の図である（引き算をベクトルを逆向きにして足すことで表現した）。3方向全部を足すと次の図のようになり、 $\text{div}(\text{rot}\vec{H}) = 0$  が結論できる。

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{H}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{rot}\vec{H})_x \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{rot}\vec{H})_y \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{rot}\vec{H})_z \end{aligned}$$

Hの線積分が互いに  
消し合って0になる



では、 $\operatorname{div}\vec{j} = 0$  なのか??

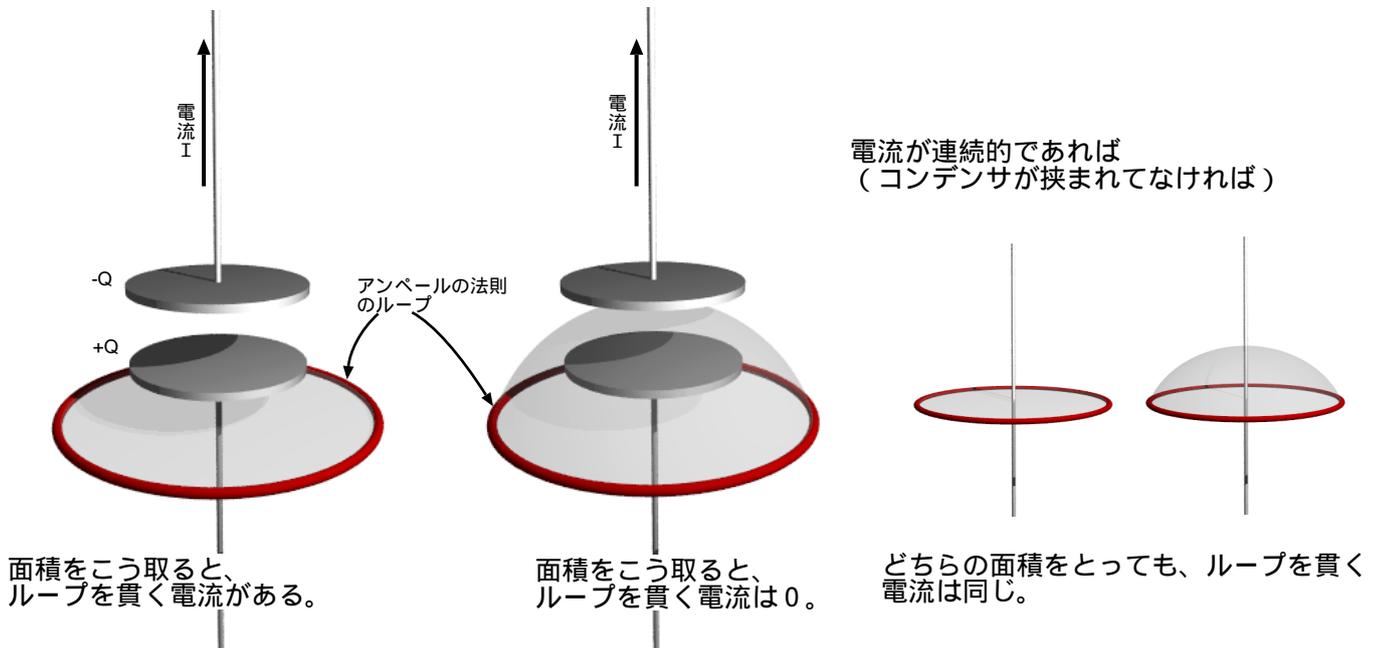
rot の div は 0 であるから  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{H}) = 0$  であるのだが  $\operatorname{div}\vec{j}$  は 0 ではない。今考えている「箱」の中にある電荷が変化しないのであれば  $\operatorname{div}\vec{j} = 0$  なのだが、例えば箱内の電荷が減っているのであれば、その分だけ外に出て行ってもいいことになる。

つまり、電流密度の div をとると、

$$\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{11.4}$$

でなくてはいけない。この式の左辺は「考えている微小体積からどれぐらい電荷が外へ流れ出していくか」を表している。当然、電荷が流れ出せば、その中の電荷密度は減少する。その減少が右辺である（マイナス符号がついているので、 $\rho$  が減少している時に正になる）。この式は「連続の式」と呼ばれ、電荷の保存則を表現している<sup>1</sup>。

この数式上の矛盾点は、以下のような物理現象の考察にも現れる。



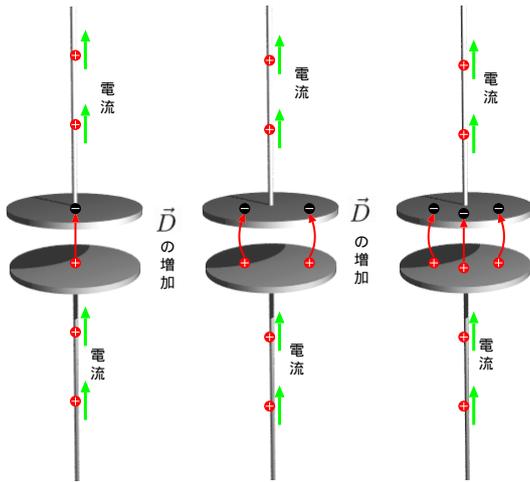
長い直線電流の一カ所をカットして、そこにコンデンサをはさむ。コンデンサの極板間の電場は外に漏れないものとしてしよう。

アンペールの法則は積分形で表現すると、「磁場  $\vec{H}$  の線積分はその線を境界とする面積を貫く電流に等しい」ということになるが、このコンデンサの極板の間には電流は流れていない。

そのため、同じループでも面積の取り方を変えると答が変わるといった困った結果を生む（ここでは安心してアンペールの法則を使えない）。

<sup>1</sup> $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  に関して同様の計算をすると、左辺はやはり消える。右辺は  $\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{B})$  となるが  $\operatorname{div}\vec{B} = 0$  なので 0 となり、こちらの式は問題ない。

そこでこの法則を修正して、この状況でも適用できるようにしたい。



極板間には確かに電流は流れていないが、そこにある電場（あるいは電束密度）が時間的に変動していることにマクスウェルは気づいた。しかも、コンデンサの極板間にある電束<sup>2</sup>はコンデンサにたまっている電荷に等しいから、電束の時間微分は（コンデンサ外部への漏れはないものとする）電流に等しくなる。

つまり、実際には極板間に電荷が動いているわけではないが、その代わりに「 $\vec{D}$ が増加している」ということを電流の代わりとみなす。

そこでマクスウェルはアンペールの法則  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$  を修正した。よく考えてみると、アンペールの法則が実験的に確認されているのは静磁場の場合である。だから、電場や磁場が時間変動している時に正しい式である保証は元々ない。そこでこの部分を修正する必要があるのである。

マクスウェルは、 $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$  の右辺に  $\text{div}$  をとった時に  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  になる項を付け加えることで矛盾を解消した。  $\text{div } \vec{D} = \rho$  であるから、付け

加えるべき式は  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  である。

すなわちマクスウェルはアンペールの法則からくる方程式を

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} \\ &\downarrow \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (11.5)$$

と修正したのである。この付加項  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  は「変位電流 (displacement current)」と呼ばれる<sup>3</sup>（「電束電流」と書いている本もある）。この式がなければ実験を正しく説明できない。

真空中の場合を考えて変位電流を導入しない場合の電磁気の法則の数式を並べて見てみると、

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= 0 & \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 & \text{rot } \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (11.6)$$

となつて、明らかに対称性が悪い。電場の  $\text{rot}$  に磁場の時間変化が現れるなら、磁場の  $\text{rot}$  には電場の時間変化が現れてもよさそうである。上記物理的考察から  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  が追加されたことで、電磁気の方程式は対称性を保ったきれいな形にまとまったことになる<sup>4</sup>。

電磁場の基本法則は以上で完結し、

—— マクスウェル方程式 ——

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= \rho & \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (11.7)$$

が電磁気学の基本法則となる<sup>5</sup>。

これに、物質中での関係式である  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$  を加えれば、電磁気学で必要な量は全て計算できる<sup>6</sup>。本質的な電磁場は  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  であり、 $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  は媒質の  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$  の影響を繰り込んだものである、と考えることにして、基本的な場は  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$  であるとするならば、マクスウェル方程式は、

<sup>2</sup>磁束同様、電束密度 × 面積で定義。

<sup>3</sup>電流ではないが、電束密度の変化が電流と同じ役目をする、ということを表した名前である。実際にはもちろん、電荷が移動しているわけではないので誤解しないように！

<sup>4</sup>ほんとうに対称だというなら、磁極や磁流も入れるべきだ、という考え方もあるが、単磁極（モノポール）はまだ見つかっていない。

<sup>5</sup>既に述べたように、これらの式はヘヴィサイドらが整理したものである。

<sup>6</sup>電流の保存則  $\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  は、すでにマクスウェル方程式の中に含まれている。これに付け加えるとしたらローレンツ力の式  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  だろう。

—  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{P}, \vec{M}$  で書いたマックスウェル方程式 —

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} &= \rho - \operatorname{div} \vec{P} & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} &= \vec{j} + \operatorname{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (11.8)$$

と書ける。 $\rho - \operatorname{div} \vec{P}$  は分極によって生じた電荷を含めた電荷密度であるし、 $\vec{j} + \operatorname{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  は磁化と分極の時間変化によって生じる電流も含めた電流密度である<sup>7</sup>。

### 11.1.2 変位電流は磁場を作るか？

変位電流はアンペールの法則がどのような状況でも満足されるように、という要求から導入される（と考えてもよい）ことをすでに述べた。ここで、磁場を求める方法としてはもう一つ、「ビオ・サバルの法則」があったことを思い出そう。こちらの方はどうだろう？—ビオサバルの法則にも電流が現れているが、これはやはり「電流 + 変位電流」に置き換えておくべきなのであろうか？

ここで一つ注意しておかなくてはならないことは、ビオ・サバルの法則は本来「定常電流による定常磁場」を求めるための法則だということである。だから、電流が時間的に変化している場合に適用してはいけない<sup>8</sup>。したがって、変位電流が時間変化している場合にビオ・サバルを使ってはいけないことは当然である。

電束密度  $\vec{D}$  は変化してもよい。しかし、その時間微分であるところの  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  は変化してはいけない（平たく言えば、 $\frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0$  ということだ）。以下ではそのような場合だけを扱うことにする。

結論を言うと、ビオ・サバルの法則の中に変位電流の項を付け加える必要はない。一つの実例でそれを示そう。

$z = -\infty$  から  $z = 0$  まで、 $z$  軸上を正の方向に電流  $I$  が流れていくとする。原点で電流が止まる。ということは、原点にある電荷が単位時間あたりに  $I$  ずつ増えていくということである。 $t = 0$  で電荷がたまっていなかったとして、原点に  $Q = It$  の電荷があると考えよう。それによって作られる電束密度は、

$$\vec{D} = \frac{It}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad (11.9)$$

である。

ここで、厳密には時刻  $t$  において電荷が  $It$  だからと言って、距離  $r$  離れた場所に作られる電場は上の式の通りではないことを注意しておこう。というのは、電荷の変化に応じて電束密度が変化するにも時間がかかると考えられるからである<sup>9</sup>。ここではその影響を無視して考える。よって、変位電流

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{I}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad (11.10)$$

が空間に分布していると考え。もし、ビオ・サバルの法則に変位電流を入れるとすると、

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \vec{x}' \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \times (\vec{j}(\vec{x}') + \frac{\partial \vec{D}(\vec{x}')}{\partial t})}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (11.11)$$

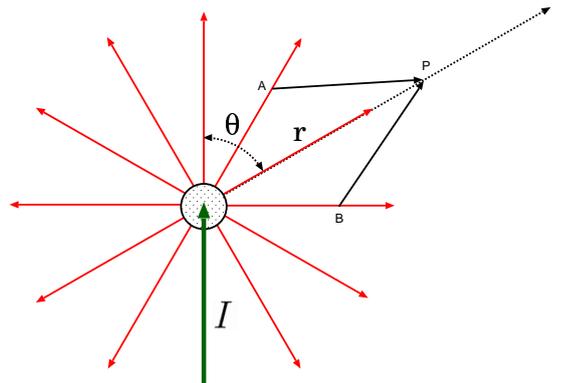
という形になるだろう。しかし、この変位電流の項は常に 0 になるのである。図の点 P に変位電流が磁場を作ると考えてみよう。電荷から P まで延ばした線（図の点線）に関して対称な点 A と B を考える。この 2 カ所にある変位電流の大きさは対称性から等しく向きが違う。外積をとることで  $(\vec{x} - \vec{x}') \times \frac{\partial \vec{D}(\vec{x}')}{\partial t}$  がちょうど逆符号となる。つまり点 A の変位電流による磁場と点 B の変位電流による磁場は消し合ってしまう。他の全ての点において同じことが言える<sup>10</sup>ので、全空間で  $\vec{x}'$  積分を行うと、変位電流の項はきれいさっぱりなくなってしまう。

<sup>7</sup>  $\vec{D}$  を「電気変位 (electric displacement)」とも呼ぶ。昔は真空も一種の誘電体で、分極を起こすようなものだと考えられていた。「物質の分極 + 真空の分極」が  $\vec{D}$  だったのである。「電気変位」も「変位電流」も、真空が誘電体だと考えられていたことの名残である。

<sup>8</sup> 適用すると何が困るといって、電流の変化が全く遅延なく離れた場所の磁場の変化を生むことになる。これは超光速現象であり、相対論的に考えると因果律が危ない。本当はこういう場合には遅延ポテンシャルという方法を使って解く必要がある。

<sup>9</sup> 後で示すが、電束密度の変化は真空中ならば光の速度で伝わる。日常的に考えれば速いが、有限の速度である。

<sup>10</sup> 唯一対称点がないのは図の点線の上だが、この部分は外積が 0 になるからやはり寄与しない



以上はビオ・サバルの法則を使った計算であり、この計算には変位電流の出番はなかった。ビオ・サバルの法則に従って考えるかぎり、変位電流は磁場を作らないということになる。

では、アンペールの法則で考えるとどうなるか。たとえば  $z$  軸から角度  $\theta$  離れて、距離  $r$  の方向での磁場を考えよう。電流の作る磁場は（対称性ももちろん考慮に入れて） $z$  軸を右ネジの向きにまわるようにできる。この磁場の強さを  $H(r, \theta)$  とすると、アンペールの法則を使えば、

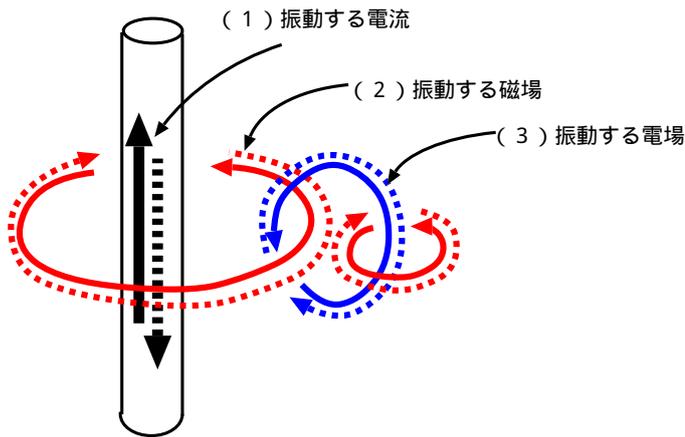
$$H(r, \theta) \times 2\pi r \sin \theta = \int_{ループ内} d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{11.12}$$

という計算になる（今考えているループ内には真電流はない）。この積分の結果は  $I$  よりは少なくなる（ $z = 0$  を完全に覆うように積分すれば、ちょうど  $I$  に等しい）。無限に長い導線の場合と比較して、アンペールの法則を使う場合は「電束の一部しかループを通らない」という理由で磁場が弱くなり、ビオ・サバルの法則を使う場合は「電流が途中で終わっている」という理由で磁場が弱くなる。

詳しい計算は章末演習問題とするが、こうやって計算した磁場の値と、 $z = 0$  より下にある電流のみを考えてビオ・サバルの法則を使って計算した磁場の値は、ちゃんと一致する。アンペールの法則においては変位電流がちゃんと寄与する。

## 11.2 電磁波

マクスウェル方程式で表される物理現象を組み合わせると、以下のようなしくみで電磁波が発生することがわかる。



(1) ある場所に振動する電流または電束密度が発生する（たとえば電波のアンテナなら周期的に変動する電流を流している）。

(2) 「電流」もしくは「電束密度の時間変化」は、周囲に渦をまくような磁場を伴う ( $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ )。

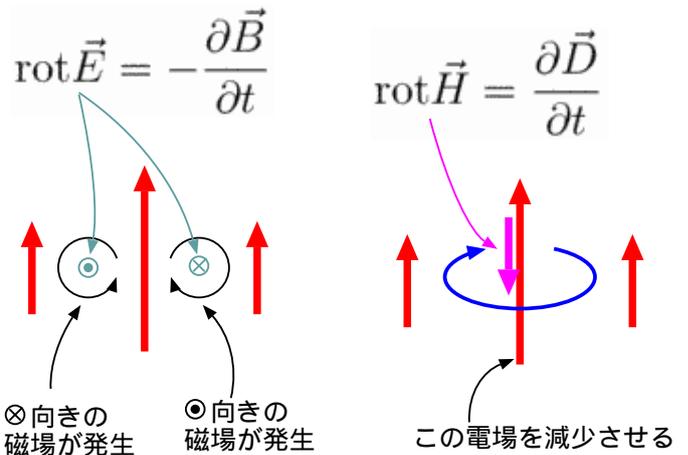
(3) 周囲の空間の磁場の時間変動には、さらにその周囲に渦をまくような電場を伴う ( $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ )。

以上がくりかえされることにより、空間の中を電場と磁場の振動が広がっていく。振動現象が出現するためには、その系に復元力と慣性が必要である。電場と磁場にもこの二つがある。レンツの法則に代表されるように、外部から加えられた変化を妨げ、平衡状態に戻そうとする作用が電磁気の法則には含まれている。これはいわば「慣性」で

ある。

電磁場の復元力もちゃんと電磁気の法則に含まれている。もし、空間に一部に強い電場、周りに弱い電場があるような状態があったとしよう（右図の左側）この空間では  $\text{rot} \vec{E}$  が0ではないから、必然的に  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  にしたがって磁場が発生する。発生する磁場は  $\text{rot} E$  と逆を向くから、図にあるように、強い電場の周りに渦を巻くような磁場ができる。すると今度は  $\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  にしたがって<sup>11</sup>電場が発生するが、この電場は元々あった電場を弱める方向を向いている。

つまり、マクスウェル方程式の中には、一部分だけ電場が強い領域があったら、その電場を弱めようとするような性質が隠れている。マクスウェル方程式は空間的変



<sup>11</sup>ここでは電流が存在しない場合を考えたので、 $\vec{j}$ の項はなし。

動 ( $\text{rot}\vec{E}$  など) と時間的変動 ( $-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  など) を結びつける式になっており、しかもその組み合わせによって空間的な変動を解消しようとする方向へ物理現象が進む (言わば「復元力が発生する」) のである。

電場と磁場が波となる可能性に気づいたのはファラデーであり、1846 年にそのことを発表し「この波こそ光ではないのか」と述べている。しかし、その波が実際にどのような速度でどのように伝わるかを計算することはできなかった。マクスウェルは彼の方程式を使ってこの問題を解いたのである。

### 11.2.1 電磁波の方程式

電磁波の方程式を出す。目標は、真空中のマクスウェル方程式から、電場  $\vec{E}$  のみまたは磁束密度  $\vec{B}$  のみの式を作ることである。真空中で電荷・電流がない場合のマクスウェル方程式を書こう。

$$\text{div}\vec{E} = 0, \quad \text{div}\vec{B} = 0, \quad \frac{1}{\mu_0}\text{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (11.13)$$

真空中であるから、 $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$  と  $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$  を使って  $\vec{D}$  と  $\vec{H}$  は消去済みである。

ここで、 $\vec{E}$  のみ、もしくは  $\vec{B}$  のみの式を作ろう。 $\text{rot}\vec{B} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$  という式が代入できるように、まず  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$  の両辺の  $\text{rot}$  を取る。

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot}\vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\text{rot}\vec{B})}_{=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} \\ \underbrace{\text{grad}(\text{div}\vec{E})}_{=0} - \Delta\vec{E} &= -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \\ -\Delta\vec{E} &= -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (11.14)$$

という式が出る ( $\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$  という公式を使った)。

この式は  $(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)\vec{E} = 0$  と書き直すことができ、これは 3 次元の波動方程式  $(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)u = 0$  で  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$  と置いたものに等しい。つまり、電場は速さ  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$  の波となって真空中を伝わる。磁束密度の方についても、

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot}\vec{B}) &= -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\text{rot}\vec{E})}_{=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \\ \underbrace{\text{grad}(\text{div}\vec{B})}_{=0} - \Delta\vec{B} &= -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \\ -\Delta\vec{B} &= -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (11.15)$$

となって、同じ速さで伝播する波となる。

この速さを計算してみると、

$$\frac{1}{\sqrt{8.854187817 \dots \times 10^{-12} \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (11.16)$$

である。これは光速である。つまり、マクスウェルは「電場と磁場が波になるだろうか?」と計算してみた結果、光が電場と磁場の波であることを見つけてしまったのである。

なお、ここではあくまで「波」としての電磁波を求めたが、波動になっていないような電磁場であっても、その変化が伝わるのは光速であること、つまり有限の速度でしか電磁場の変化は伝わらないことに注意しよう。

ここで、いわゆる平面波解を求めてみよう。簡単のため、 $z$  方向に進行する波を考える。光速を  $c$  とし、求めるべき電場と磁場はみな  $z - ct$  の任意の関数  $f(z - ct)$  になっているとする。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)f(z - ct) &= \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f(z - ct) \\ &= \frac{1}{c^2} \times c^2 f''(z - ct) - f''(z - ct) = 0 \end{aligned} \quad (11.17)$$

となって、これは解である。よって、まず  $\vec{E}(z-ct), \vec{B}(z-ct)$  という形の解であることがわかる。マクスウェル方程式にこの形を代入してみる。  $\text{div}\vec{E} = 0$  から

$$\text{div}\vec{E}(z-ct) = \frac{\partial}{\partial z} E_z(z-ct) = E'_z(z-ct) = 0 \tag{11.18}$$

であるから、この場合、電場の  $z$  成分は定数でなくてはならない。同様に、磁束密度の  $z$  成分も定数である（この定数はいわば外部から一様な電場・磁場がかかっていることを意味する）。よって、「電磁波」として振動する部分は  $x, y$  方向しかない。電磁波を構成する電場と磁場は進行方向に垂直な方向を向く（つまり、光が横波だということ）。

簡単のため、電場はみな  $x$  方向を向いているとしよう ( $E_y = 0$ )。  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$  に代入してみると、

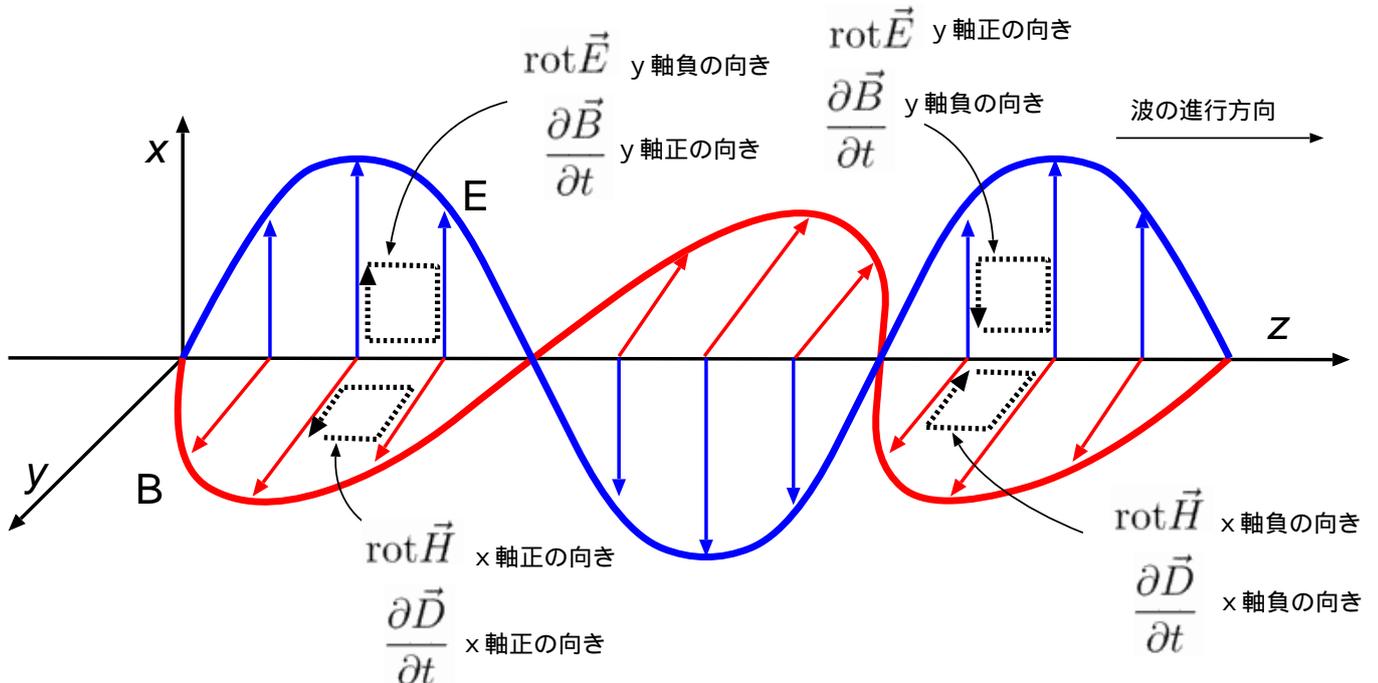
$$\begin{aligned} x \text{ 成分} \quad & \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y = -\frac{\partial}{\partial t} B_x \\ & 0 = -\frac{\partial}{\partial t} B_x \\ y \text{ 成分} \quad & \frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z = -\frac{\partial}{\partial t} B_y \\ & E'_x(z-ct) = -\frac{\partial}{\partial t} B_y \\ z \text{ 成分} \quad & \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x = -\frac{\partial}{\partial t} B_z \\ & 0 = -\frac{\partial}{\partial t} B_z \end{aligned} \tag{11.19}$$

となって、 $B_x, B_z$  は定数でなくてはならない。ここでは電磁波に興味があるので、その定数を 0 としよう。  $B_y(z-ct)$  とすると、  $E'_x(z-ct) = cB_y(z-ct)$  となる。つまり、磁束密度は進行方向 ( $z$  方向) とともに、電場の方向 ( $x$  方向) と垂直な方向 ( $y$  方向) を向き、大きさは電場の  $\frac{1}{c}$  である。まとめると、

$$\vec{E} = (E_x(z-ct), 0, 0), \quad \vec{B} = (0, \frac{1}{c}E_x(z-ct), 0) \tag{11.20}$$

となる。この解は  $\text{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$  も満たしている。

以上から、電磁波を構成する電場・磁場は進行方向と垂直で、かつ電場と磁場も互いに垂直であることがわかった。



電磁波の進行の様子は上の図の通りである。各場所各場所でマクスウェル方程式が成立するように電磁場の時間変化が起こっていることに注目しよう。

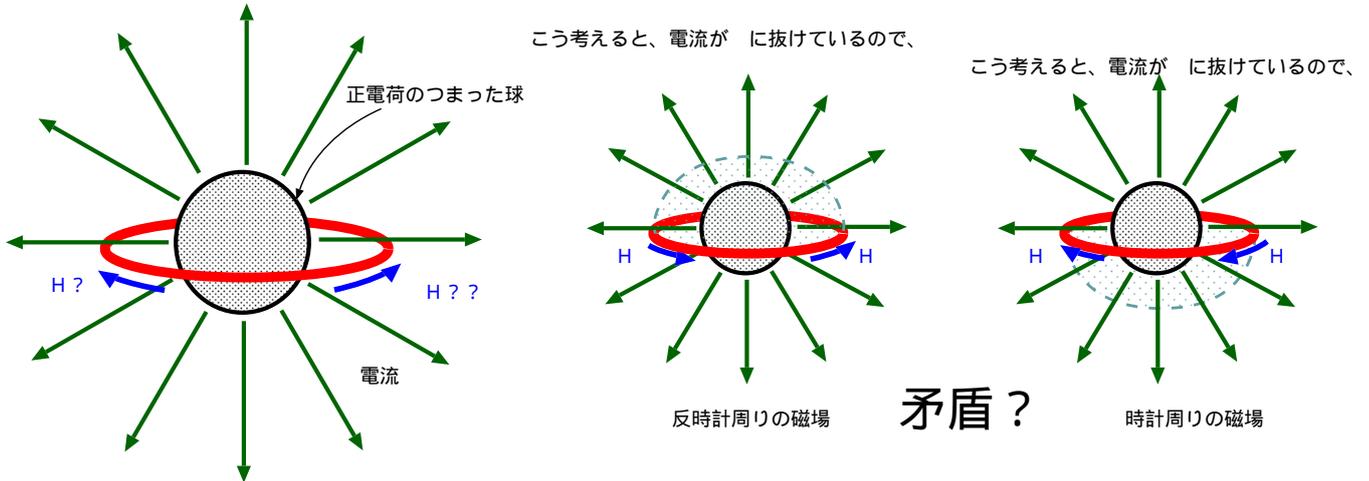
なお、ファラデーが電磁波を予言したのは 1846 年（この時、光が電磁波である可能性も述べている）、マクスウェル方程式が完成したのは 1865 年、ヘルツが電磁波を発見するのはそれから 23 年たった 1888 年である。1901 年にはマルコーニが無線通信に成功する。現代においても、ラジオ、テレビ、携帯電話と、電磁波は有効に活用されているが、着想から定式化、実験的発見、実用化までに半世紀以上がかかったことになる。

### 11.3 章末演習問題

【演習問題 11-1】 11.1.2 節で考えた、 $z = -\infty$  から  $z = 0$  までの直線電流の作る磁場を、ビオ・サバルの法則を使って求め、変位電流を取り入れたアンペールの法則を使って求めたものと比較せよ。

【演習問題 11-2】 図のように、原点にから放射状に四方八方に球対称に電流が流れ出しているという状況を考えよう（原点には巨大な正電荷の塊があり、そこからあらゆる方向に電荷が放出されていると考えればよい）。

全部で  $I$  の電流が流れているものとするれば、原点から距離  $r$  の場所の電流密度は  $\frac{I}{4\pi r^2}$  である。この時赤道にあたる経路で積分してアンペールの法則を適用すると、電流のうち半分が北半球を抜けていくので、赤道を東向きに一周すると、 $2\pi r H = \frac{I}{2}$  という式が成立することになる。



ところが、全く同じことを南極側に抜ける電流に関して考えると、電流の向きが逆を向いているのだから、逆向きの磁場（西向き）ができていくことになる。

どちらが正しいかというと、どちらも正しくない。正しい答は  $H = 0$  である。今状況は球対称なのだから、東向きの磁場ができて、西向きの磁場ができてもおかしいことになるので、 $H = 0$  は実にもっともな解である。しかしアンペールの法則を使うと 0 にはならない。ではなぜ実際には 0 になるのだろうか??—以上の話はどこを間違えているのだろうか??

【演習問題 11-3】 電磁波によって荷電粒子が跳ね飛ばされるという現象がある（量子力学的な現象になることもあるが、ここでは量子力学は考えないことにしよう）。A 君は以下のように考えた。

「電子は電磁波によって跳ね飛ばされるらしい。電子はマイナスの電荷を持っている。ということはプラスの電荷を持っている粒子は、電磁波がくるとむしろ電磁波のやって来た方向に近づくのだろうか？」

疑問を持った A 君は電磁波が進行して正電荷や負電荷に当たるところの図を書いてみた。そしてさらに疑問を持った。

「電子が静止していると考えたと、働く力は電場によるものはず。だが電場は進行方向と垂直だ。ということは電子が跳ね飛ばされる方向は、進行方向と垂直なのだろうか？」

実際には、正電荷であろうが負電荷であろうが、飛ばされる方向は電磁波の進行方向である。そのことを図解して示せ。

なお、このことは電磁波が進行方向向きの運動量を持っていることを示している。

