

2008年度電磁気学講義録（前期分）

前野昌弘

平成20年8月5日

目次

第 0 章	電磁気学の歴史とその意義	1
0.1	電気と磁気はどのように発見されたか	1
0.2	電磁気学の発展	1
0.3	現在における電磁気学と、電磁気以後の物理学	3
0.4	電磁気学が重要である理由	3
第 1 章	真空中の静電気力と電場	5
1.1	静電気	5
1.2	クーロンの法則	6
1.2.1	逆自乗則	6
1.2.2	ベクトルで表現するクーロンの法則	8
1.3	重ね合わせの原理	10
1.4	電場 \vec{E} と電気力線	11
1.4.1	電場 \vec{E} の定義	11
1.4.2	電気力線	12
1.4.3	電気力線の力学的性質	14
1.5	いろんな電荷分布における電場 \vec{E} の計算	15
1.5.1	有限の長さの線上に広がった電荷による電場 \vec{E}	15
1.5.2	円状の電荷による電場 \vec{E}	18
1.6	立体角と電気力線	21
1.7	章末演習問題	22
第 2 章	ガウスの法則と電場 \vec{E} の発散	25
2.1	ガウスの法則	25
2.1.1	電気力線の流量 (flux) の保存	25
2.1.2	立体角から考えるガウスの法則	28
2.2	具体的計算でガウスの法則を確認する	28
2.2.1	中心からずれた位置に電荷が位置する場合	31
2.3	複数および連続的な電荷が存在する時のガウスの法則	32
2.3.1	面上に広がった電荷による電場 \vec{E}	33
2.3.2	一様に帯電した無限に長い棒	34
2.3.3	一様に帯電した球	34
2.3.4	平行平板コンデンサ	35
2.4	電場 \vec{E} の発散：ガウスの法則の微分形	35
2.4.1	直交座標系における発散	35
2.4.2	発散のない電場 \vec{E} の例	38
2.4.3	$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ の簡単な例	39
2.5	極座標での div	39
2.5.1	極座標の div の導出	39
2.5.2	$\vec{\nabla}$ を使った記法に関する注意	41
2.5.3	極座標の div を使って電場 \vec{E} を求める	43
2.6	章末演習問題	40

第 3 章	静電気力の位置エネルギーと電位	41
3.1	力学的エネルギーの復習 (1次元)	41
3.1.1	1次元の静電気力の位置エネルギーと電位	43
3.2	3次元の空間で考える電位	45
3.2.1	3次元の空間における位置エネルギー	45
3.2.2	電位と電場 \vec{E} の関係	46
3.2.3	位置エネルギーが定義できる条件	47
3.3	rot と位置エネルギーの存在	48
3.3.1	仕事が経路に依存しない条件	48
3.3.2	rot のイメージ: ポートの周回	49
3.3.3	rot のイメージ 2: 電場車	50
3.3.4	grad, rot, div の関係	51
3.4	電位の満たすべき方程式	52
3.4.1	位置エネルギーの微分としてのクーロン力	52
3.4.2	ポアソン方程式	53
3.4.3	ラプラシアンの物理的意味	55
3.5	電位の計算例	57
3.5.1	一様な帯電球	57
3.5.2	無限に広い板	61
3.5.3	電気双極子	61
3.6	静電場の持つエネルギー	63
3.6.1	位置エネルギーは誰のもの?	63
3.6.2	電場のエネルギー—電荷と電位による表現	63
3.6.3	電場の持つエネルギー—電場による表現	65
3.6.4	平行平板コンデンサの蓄えるエネルギー	66
3.7	章末演習問題	67
第 4 章	導体と誘電体	69
4.1	導体と電場・電位	69
4.1.1	導体表面の電場	70
4.2	導体付近の電場	71
4.2.1	点電荷と平板導体	71
4.2.2	平行電場内に置かれた導体球	72
4.3	誘電体と分極	73
4.3.1	分極	73
4.3.2	分極と電気双極子モーメント	74
4.4	誘電体中の電束密度	75
4.5	強誘電体と自発分極	79
4.6	誘電体中の静電場の持つエネルギー	79
4.7	章末演習問題	80

第0章 電磁気学の歴史とその意義

0.1 電気と磁気はどのように発見されたか

人類が最初に電磁気現象を発見したのはいつなのか、定かではないが、磁気現象については、2世紀の中国ですでに磁石が南北を指すことが知られていた。紀元前6世紀頃には小アジアのマグネシア地方で磁石が見つけたという話がある（magnet という言葉は、このマグネシア地方から来ている¹）。当時の哲学者タレスは、磁石で鉄をなでると鉄も磁石になるという現象を発見している。タレスはまた、琥珀をこすると物を引きつける性質を持つことも見つけている。これは静電気の発見である。

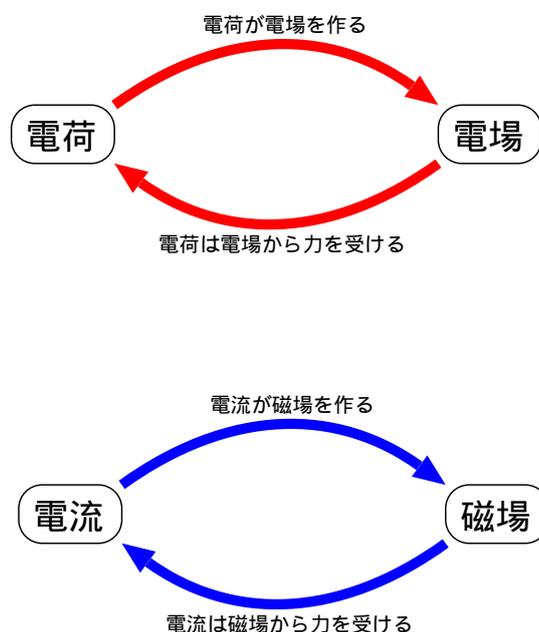
磁石はのちに羅針盤の発明を生み、大航海時代を支えることになる。1600年、ギルバート²は「磁石論」という本を書き、その中で地球が大きな磁石であることなどを示したが、同時に琥珀の力と磁石の力は別物であることも述べている（それ以前はこの2種類の力に、明確な区別はされてなかった）。ギルバートは琥珀などに生じる静電気を、琥珀を表すギリシャ語（elektron）から electric と名付けた。これが静電気学の始まりだと言える。

0.2 電磁気学の発展

電磁気学の歴史的発展の様子は次のページに示した通りである。この表からわかるように、18世紀後半から19世紀に電磁気は爆発的に発展している。これはいわゆる「古典物理学」が完成する時期だといってもいい³。

電気と磁気の間に関係があることがアンペール、ファラデーらによって発見されて法則化され（1800年代前半）、ファラデーがその現象を「電場」と「磁場」という「場」の考え方で統一的に理解しようとする。それらをマクスウェルが数式を使って見事に定式化⁴し、1865年のマクスウェル方程式という形で結実したものが現在の電磁気学である。

電気と磁気が相互作用するということは、たとえば電磁石（電流磁場）や電磁誘導（磁場の変化 起電力）に現れているわけである。1800年代は現象としてこのようなことが発見されていき、それを元に電気と磁気の対応が考えられていったわけであるが、現在完成された電磁気学の立場から振り返れば、右の図のような対応があることがわかる⁵。電荷が動くことが「電流」なのであるから、電場と磁場が深く関係するのは当然である。



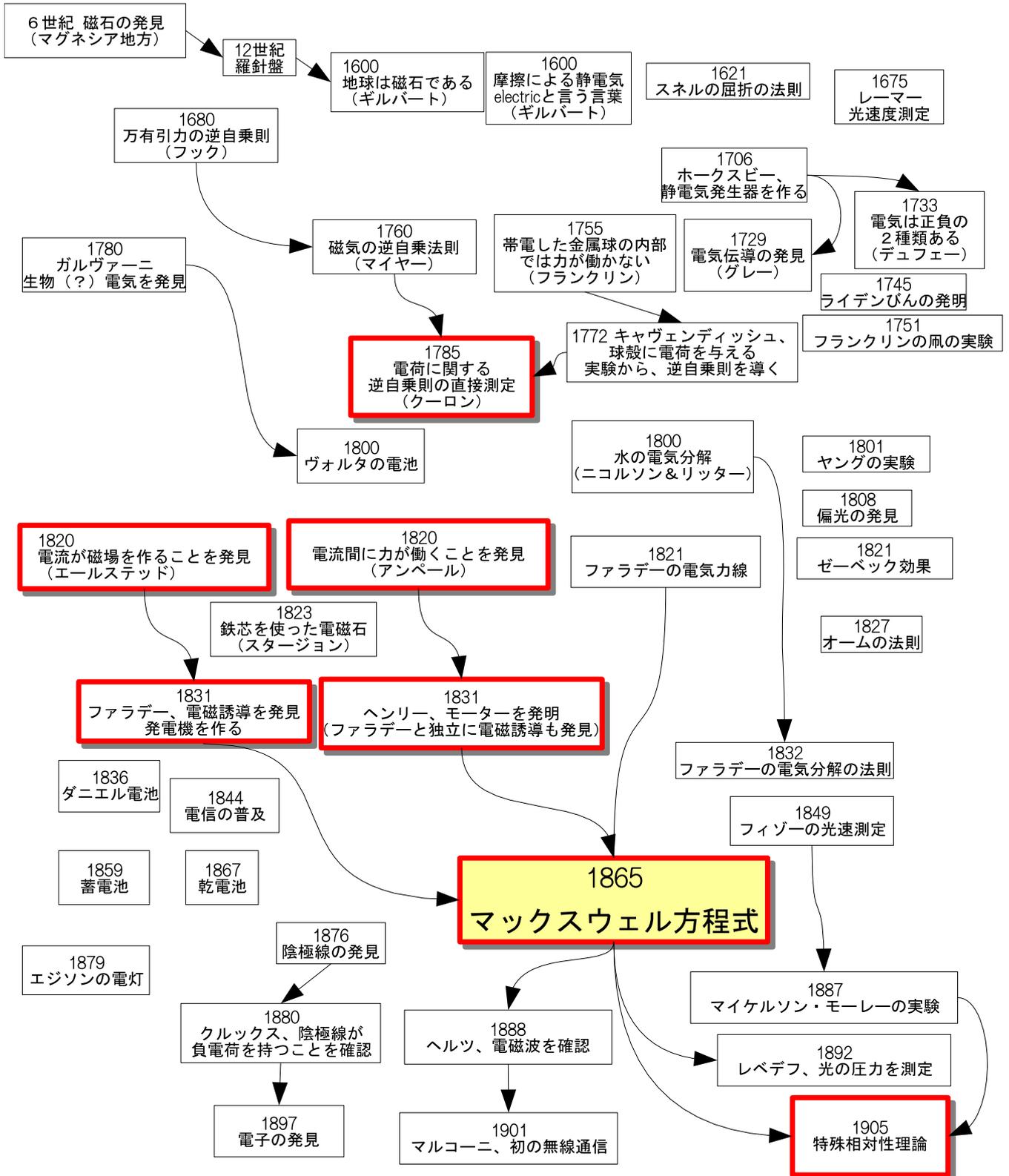
¹ ついでながら、マグネシア地方はマグネシウムがよく出土する地方でもある。磁石にならないマグネシウムに、磁石と関係ありそうな名前がついてしまったのはそういう理由。

² ギルバートは cgs 単位系の磁位の単位 Gb（ギルバート）にその名を残しているのだが、残念なことには cgs 単位系も、磁位という概念も現在ではあまり使われていない。

³ 物理において「古典 (classical)」とは「量子 (quantum)」力学以前だということ。ゆめゆめ「古典は古いから勉強しなくていいだろう」などとは思わないこと！

⁴ ファラデーは物理学者としては珍しく数学が全くできなかった。彼のアイデアをマクスウェルが数式で表現した、とも言える。ファラデーが数学ができなかったのは高等教育を受けることができなかったからだが、「生まれ変わったら今度は数学を勉強したい」と言っていたと言う。

⁵ 電場は電荷が、磁場は磁荷が作っていると考え方もあった。実際には、「磁荷」は存在しない。少なくとも、（発見しようという努力は精力的に行われたにもかかわらず）実験的には発見されていない。



つまり、「電場が動けば磁場ができる（あるいはこの逆も）」という現象が起こるわけだが、これが「同じ物理現象を、運動しながら観測すると違う現象のように見える（しかし、物理的内容は変わらない!）」という認識を生み、ついにはそれがアインシュタインの特殊相対性理論に発展する。20世紀が始まった直後の1905年に発表された特殊相対論は（古典）電磁気学の最後の one piece となり、これで古典的電磁気学は完結すると言っていいだろう⁶。

⁶相対論に関係する部分は、3年前期の「相対論」の授業で話そう。

0.3 現在における電磁気学と、電磁気以後の物理学

掃除機・冷蔵庫・テレビ・携帯電話と、現在の我々の生活を支える電器製品はすべて、電磁気学の成果を使って作られている。掃除機などに使われるモータは「磁場中の電流は力を受ける」という法則に基づいて作られたものだし、テレビや携帯電話は、マクスウェル方程式を解いた結果として出てきた電場と磁場の波である「電磁波」を使って遠いところとコミュニケーションすることができる。また、どのような電子機械にもトランジスタやICなどを使った電子回路が組み込まれているが、これらもまた電磁気学なしに製作することはできない。このように現在の生活の基盤に密着した技術の基礎となるのが電磁気学である。

電磁気学が重要である理由はこれだけではない。電磁気の基本方程式であるマクスウェル方程式が相対性理論を生み出すことはすでに説明したが、それ以外にももちろん、電磁気学はたくさんの物理を生み出している。20世紀前半までの常識ではこの世にある「力」は電磁氣的な力と万有引力だと思われていた。現在ではその他に「弱い力」と「強い力」が存在していることがわかっている⁷。そしてこれら4つの力は全て、現代物理にとって非常に重要な「ゲージ理論」と呼ばれる種類の理論で記述できることがわかっている。ゲージ理論を拡張することによって、重力・電磁力・弱い力・強い力を統一的に記述できるような理論ができあがるかもしれない。電磁気学はそのような「統一理論」へと続くゲージ理論の中でもっとも最初にできあがったものであると言える。つまり、この世の全ての力を記述するための基盤は、電磁気学にある。

0.4 電磁気学が重要である理由

なぜ電磁気学はこうも現代物理のキーポイントに成り得たのか？—電磁気の特徴のうち、現代物理を作っていく上で重要なものになっている点を述べよう。

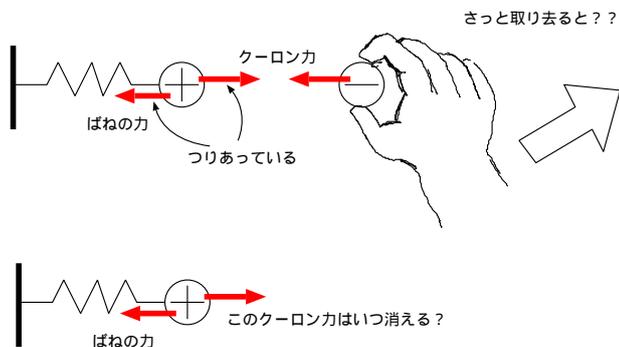
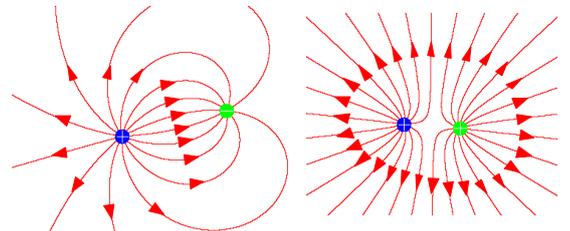
[実験的成功] まず何より指摘しなくてはいけないのは、電磁気学は非常にうまくこの現実を記述していることである。技術的、工学的応用もすばらしい成功を収めている。テレビが映るのも、携帯電話で話せるのもすべて電磁気学のおかげである。この講義の範囲からは外れるが、電磁気学を量子力学的に考えた「量子電磁力学」も非常によい精度で実験と一致する結果を出している。

[近接作用論] ファラデー以後の電磁気学の重要な概念が「場」である。

ファラデーは、電氣的な力が働く時、電荷と電荷の間に直接力が働くのではなく、そこに「電場」という媒介物が（目には見えないけど、空間に！）存在していると考えた⁸。

つまり、二つの物体に力が働く時、それは直接に「力」が伝わっているのではなく、それぞれの物体が「場」を作り（電荷は電場を作る、電流は磁場を作る）、その「場」の中にある物体が力を受ける（電場は電荷に力を与え、磁場は電流に力を与える）と考える。これを「場の相互作用 (interaction)」という呼び方をする。

大事なことは、電荷が場を作るのも、電場が電荷に力を与えるのも、その場所各点各点で起こる現象であり、遠い向こうの状態が今この場所に直接影響を及ぼしたりはしないということである（媒介する場なしに直接力が及ぶとする立場は「遠隔作用論」と言う）。



近接作用と遠隔作用の差を知るために、こんな思考実験を考えよう。

いま、ある正電荷と負電荷が引き合っており、つながれたばねによる引っ張り力とつりあって静止しているとします。この状態で、さっと負電荷の方を取り除いたとします。その時正電荷はどうなるか。もしこの正電荷と負電荷の間に働いていた力がクーロンの法則に完全に従うものであったならば、即座に正電荷のつりあいは崩れるであろう。しかし力が「電場」によって媒介されて伝わっているものならば、正電荷のつりあいが崩れるのは電場の変化が正電荷周辺に伝わってから、ということになる。

⁷この「弱い力」「強い力」は固有名詞である。つまり、そういう名前の（電磁力や万有引力とは全く別種の）力が存在しているのである。

⁸ファラデーはもちろん、単なる思いつきで「場」の存在を主張したわけではない。電荷と電荷の間に絶縁体や導体を置くと電荷の間に働く力が変化するという実験事実を踏まえて「空間に何かが伝わっているから力が働くのではないのか？」と考えたのである。

実験的には(この通りの実験が行われているわけではないが)、後者が確認されている。つまり、「電場」の変化が伝わって始めて電荷の間に力が変化する。ちなみに、電場の変化が伝わる速度は光速である⁹。光速は秒速約30万キロと、日常の感覚からすれば充分速いので、通常はこれを実感できない。

このように近接作用で物理が表現できる場合、それを表現する方程式は微分方程式となる。微分方程式は、「ある場所の物理量」と「ある場所の物理量の変化の様子(微分)」の関係を表現する式である。つまり、「この場所の電場」と「この場所の電場の変化の様子(微分)」の関係が、ある方程式によって決定される。遠隔作用を考えている場合、「この場所の情報」だけでは現象が記述できない(遠くにある電荷による力を考えなくては現象が予言できない)ので、微分方程式では法則を書き表すことができない。遠くにある物体の状態を知らないところで起こる現象が予言できないような場合、理論は「non-local(非局所的)」であると言う。現在知られている物理法則はみな微分方程式の形で書ける。つまり、non-localな物理理論はない¹⁰。

[ローレンツ不変性] 電磁気学に出てくる電場、磁場の持つ対称性として大事なのがローレンツ不変性である。ローレンツ不変性とは、「ローレンツ変換」と呼ばれる、時空間の対称性に対する不変性である。詳しい話は3年前期の「相対論」の授業で行うが、特殊相対論によって、時間と空間は別々のものではないことがわかる。空間というのは4次元時空間というものを適当な断面で切った切り口(3次元物体を切ると2次元の平面ができるように、4次元時空間を切ると3次元空間ができる)にあたるのがわかる。電磁気学は実はこのローレンツ変換(ひいては相対論)と深く結びついている。相対論以前の電磁気学の勉強の中でも「静止した電荷は電場を作り、動く電荷(電流)は磁場を作る」という形でローレンツ対称性が見えてくる。ローレンツ対称性は特殊相対論につながるだけでなく、その後に続く量子場の理論、素粒子論、宇宙論などの現代物理の柱となっている。

以上のように、電磁気学は現代物理の骨格となる部分を作り出した母体であり、そして今なお現代物理の中心課題を占めている。電磁気を征服することなく現代物理を理解することはできない。電磁気は現代物理の基礎的な考え方が詰まった宝石箱である。この1年の授業の中で、電磁気学の神髄をつかんでいただきたい。それが現代物理への扉を開くことになる。

これからの勉強についての注意!!

この電磁気学I・IIに限らず、2年生からの物理の授業では、これまでに比べて難しい数学をたくさん使うことになる。「数学は苦手だ」とか「こんな数学なんて使わずに物理をやればいいのに」とか思う人はきっと多いと思う。しかし、数学は必要である!高校までの物理は(1年の共通教育の物理も)それほど難しい数学を使わなくて済んだ。しかし、今後はそうはいかないということに覚悟しておいて欲しい。難しい概念を扱うには、数学を使った方が楽になるということもあるのである。前に「難しい数学を使わずに教えてください」とお願いされたことがあるが、それでは高校までの物理になってしまう。せっかく大学に来たのだから、大学レベルの物理を学ばなくてはわざわざ入学した甲斐がない。

それに、数学は物理にとっては全世界の共通言語である。日本語をしゃべる人も英語をしゃべる人も、物理をする時には「数学」という言葉を使って会話する。だから、物理をやる人は数学を嫌うわけにはいかないのである。

そこで、皆さんに数学が得意で物理も得意な人になってもらうために、数学とつきあうためにどうしていかなければいけないかを書いておこう。

数学は物理を簡単にするためにある。まず心に留めておかなければいけないのはこの点である。物理学者が(いっけん難しく見える)数学を使う理由は「使った方が簡単だから」なのである。「なぜこんな式を使うんだろう?」ということを手がかりに考えていこう。「なるほど、こういう利点があるからこういう式を使うのか」ということがわかれば、難しげに見える式にも親近感が持てる。

最初から毛嫌いせずに「新しく出てきたこれはどう役に立つのだろうか?」という前向きな気持ちで学習していこう。

いろんな方向から攻めよう 数式だけ見てもイメージが湧かない、という人は多い。この講義では、できる限り数式と図形などのイメージを並列して話していくつもりである。また、数式を使うにしても計算のやり方はいろいろある。数式でわからない人は図形で理解しよう。図形でわかりにくい人は数式で理解しよう。一つの概念を理解するには、それをいろんな方向から見るのが大切である。どういう説明がわかりやすいかには個人差があるようである。一つの方法でわからない時は他のアプローチをとろう。いろいろやっているうちに自分に適した理解方法が見つかる。

自分で手を動かして理解しよう 「先生の話聞いてるとわかるんですが、実際に問題を解こうとするとわかりません」という人は多い。こうなる理由の一つ、練習不足である。簡単な問題からでいいので、自分で手を動かして計算し、自分で図を書いてみよう。人の話だけ聞いてわかった気になっていると、絶対にどこかで行き詰まる。

勉強時間と理解度は比例しない 物理の勉強は、勉強したら勉強した分かるかという、そうはなっていない。「勉強しても勉強してももっとも理解が進まない」時期があるかと思えば「最近勉強してないな、と思って教科書開いてみたらあら不思議。前に読んだ時にわからなかったことがすらすらわかる」時期もある。成果があがらないような気がしても、我慢して続けていけば「すらすらわかる」時期が必ずやってくる。あきらめな。

物理の勉強は難しい。しかし、だからこそやりがいもあるし、わかった時の喜びも大きい。

⁹これが光速と同じなのはもちろん偶然などではなく、ちゃんと意味のあることだ。詳細はずっと後で述べよう。

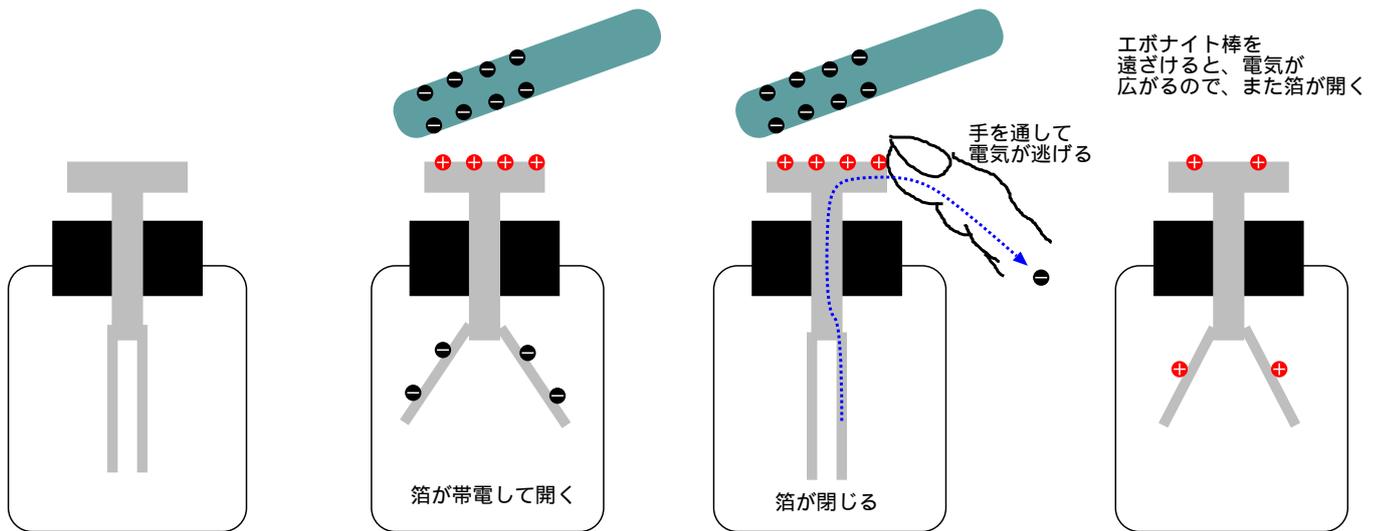
¹⁰例外と言えるのは量子力学における波束の収縮やEPR相関などだろうか。しかしこれももちろん電磁気学の範囲を外れる。

第1章 真空中の静電気力と電場

この章からしばらくの間は、「真空中」で、かつ「どの電荷も運動していない」という特別な場合について考える。非常に限定された状況での考察をしていることになるが、まずはこの簡単な場合から電磁気学を始めよう。ただ、電磁場に対する空気の影響はそれほど大きくないので、空気中の話をしていると考えてもそんなに大きく外れたことにはならない¹。

1.1 静電気

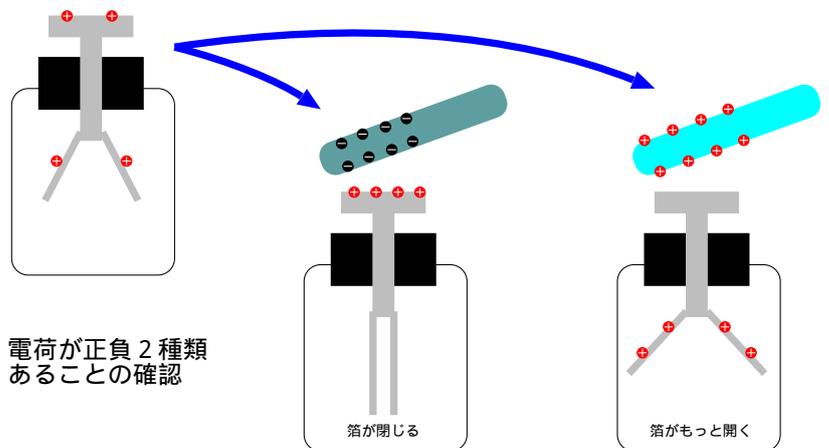
人類が最初に知った電気現象は静電気であるので、静電的な現象を理解するところから始めよう。静電気現象を目で見るよい方法は箔検電器を使うことである。箔検電器はガラス瓶の中にアルミ箔が封入され、そのアルミ箔とつながった電極が瓶の上部に飛び出している。アルミ箔は2枚以上が入っていて、電気を帯びさせると（帯電させると）アルミ箔が互いから離れて開く。エポナイト棒などをこすって静電気を帯びさせた後でこの箔検電器の電極に近づけると、アルミ箔が開く。エポナイト棒を遠ざけるとまた閉じる。このような現象が起こるのは、エポナイト棒の静電気に反応して、箔検電器の金属部分に電荷の移動が起こるからである。



この時、エポナイト棒を近づけると箔の開きは大きくなり、遠ざけると小さくなる。これは距離が近づくとエポナイト棒の静電気が電極の電荷を引きつける力が強くなることを示している。

この状態で電極に手を触れると、箔は閉じる。これは箔にたまっていた電荷が手を通じて逃げたからである（電極にたまっている方の電荷はエポナイト棒に引きつけられているため、逃げない）。ゆえにエポナイト棒を遠ざけると、また箔が開く（残った電荷が全体に広がるため）。

以上の説明でもわかるように、電荷は2種類あり、同種同士は反発し異種同士は引きつ



¹当たり前のことだが、最初に電磁気学の実験が行われた時、実験は空気中で行われている。空気中の電磁気が真空中とは全く違ったものであったら、きっと電磁気学は歴史とは全く違ったものになったであろう。

け合う。実はこの場合のエボナイト棒は - に帯電している。逆に + に帯電している物質（アクリルなど）を近づけると、逆の反応が起こることがわかる。

以上のような観察から、

- ・電気と電気は同種どうしが反発し、異種同士が引き合うこと
- ・通常の物質は電気を持っていないが、それは + と - が共存していて消し合っていると考えられること
- ・その力は遠距離になると弱まること

などがわかる。

1.2 クーロンの法則

さらに精密な実験が昔から行われており、静電気力に関する法則は次に述べる「クーロンの法則」という形でまとめられている。

1.2.1 逆自乗則



真空中に、距離 r だけ離れた置かれた電荷 Q と電荷 q の間には、

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.1)$$

で表される斥力 ($Qq > 0$ の場合) が働くというのがクーロンの法則である。

$Qq < 0$ の場合、すなわち異符号の電荷の場合は、この力は引力となる。この法則は 1769 年にロビソンが、1785 年にクーロン²が見つけているため、「クーロンの法則」と呼ばれている³。

式 (1.1) は SI 単位系と呼ばれる現在広く使われている単位系を使った場合で、電荷 q, Q はクーロン (記号は C) で表す。 ϵ_0 は「真空の誘電率」と呼ばれる量で、SI 単位系における具体的な値は $8.854187817 \dots \times 10^{-12} \text{F}\cdot\text{m}^{-1}$ である⁴。

電磁気の単位系について

クーロンの法則の前に係数 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ がついているのはうっとおしい限りであり、これが 1 になるように電荷の定義をやり直せばよいのではないかと思うかもしれない。実際一部の (古い) 教科書ではこの係数が 1 になるようにしたガウス単位系という単位系も使われている。また、「 $\frac{1}{4\pi}$ がつくのはすでに述べた逆自乗則の成り立ちから当然としても、 ϵ_0 が 1 になるように定義してもいいじゃないか」と思うかもしれない (こういう単位系の例としてはヘヴィサイド有理単位系というのがある)^a。

しかし、現在広く使われている SI 単位系では $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ が必要である。これは SI 単位系では、電流をまず定義して、1 アンペアの電流が 1 秒間に運んでくる電荷量をもって 1 クーロンを定義するという方法を使っているためである。一部の教科書では $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k$ と書いて省力化を図っている。 $k = 8.987551787 \times 10^9 [\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2]$ である^b。

電磁気の単位系は昔からいろいろなものが使われていて注意が必要であるが、現在は SI 単位系を使うのが時代の流れというものなので、このテキストでは全て SI 単位系で記述することにする。

^aなお、今は真空中の話をしているが、物質中では誘電率の値が ϵ_0 から変わることになる。

^bこの k の値は、実は「光速 (299792458m/s) の自乗 $\times 10^{-7}$ 」と表現できる。 10^{-7} が入るのは単位の定義の問題であり、光速の自乗が入るのは光も電磁気現象の一つであるからである。これについてはずっと後で明らかになる。

クーロンの法則は「逆自乗則」とも呼ばれる力の一種である。「逆自乗則」とは名前の通り、距離の自乗に反比例するような力であり、万有引力、それから磁力も逆自乗則に従う。

²クーロンは物理学者というよりは土木技術者で、いろんなものを測る技術にたけていたそうである。

³「磁極に対するクーロンの法則」というものもある。後で出てくるが、式としては全く同じ形をしていて、1760 年にマイヤーが見つけ (ただし発表は 1801 年)、1789 年にクーロンが再実験している。

⁴ここに F (ファラッド) という単位が登場するが、この単位の意味するところは先にいかないとわからない。組み立て方から考えると、 $\epsilon_0 = \frac{Qq}{4\pi r^2 F}$ であるから、 ϵ_0 の単位は $[\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2]$ ということになる。F は $\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}$ に等しい。

逆自乗則が物理の世界に何度も現れることは偶然ではない。これは空間が3次元であることと密接に結びついていることなのである。クーロン力よりも直観的にわかりやすい「逆自乗則」の例として、点光源による光の明るさを考えよう。我々の目が感知する「明るさ」というのは結局、目に飛び込んでくる光のエネルギーに関係している。

原点に100Wの電球があるとすると、(100Wとは1秒間に100Jのエネルギーを消費するということなので、)1秒あたりに100Jのエネルギーを持つ光が空間に放出されていることになる⁵。この1秒間に100Jのエネルギーが空間にまんべんなく広がっていくとするならば、 t 秒のちには半径 ct (c は光速。約秒速30万キロ)の球面の上に広がることになる。したがって、距離 r だけ光源から離れた場所を考えると、面積 $4\pi r^2$ の面を1秒に100Jのエネルギーが通過していくことになる。当然、距離が広がれば(抜けていくエネルギー自体は変わらないが、断面積が増えるので)エネルギーの密度は $4\pi r^2$ に反比例する形で減っていくことになる。これが逆自乗則が現れる理由である。もしこの世が2次元(平面)なら、光は球面ではなく円周の形で広がるので、エネルギー密度は $2\pi r$ に反比例するだろう。

クーロン力は電球から出た光の場合のような「流れ」ではないので、厳密にはこの比喻は正しくはないが、ある一点を源とし、何か(電球の場合はエネルギー)を保存するように広がっていく時には、逆自乗則が現れると思ってよい。

実は距離の逆自乗になるということ自体は、「電荷が帯電した金属の殻の内側のどこにいても、電気力は働かない」という実験結果から理論的にキャヴェンディッシュが導いている(1772年のこと)。こうなるためには殻の上の一方の側にいる電荷による力と逆側にいる電荷による力がうまく消し合わなくてはならないが、そうなるのは逆自乗の力が働く場合だけである(このことは後で具体的に計算しよう)。それゆえ、クーロンが実験的に直接確認するより前に、この法則は「たぶん成立しているだろう」という予想がされていた⁶。

1Cの正電荷二つが1mの距離にある時、働く力は、 $8.9875518 \times 10^9 \text{N}$ となる。ざっと10億キログラム重であるから、かなり大きい。ゆえに、日常では1Cの電荷が孤立している状況に出会うことはまずない。というのは、普段我々が眼にする物質は原子できており、原子は正電荷を持った原子核と、ちょうどそれにつりあうだけの負電荷を持った電子が集まってできている⁷。この正電荷と負電荷の和がほとんど0なのである。

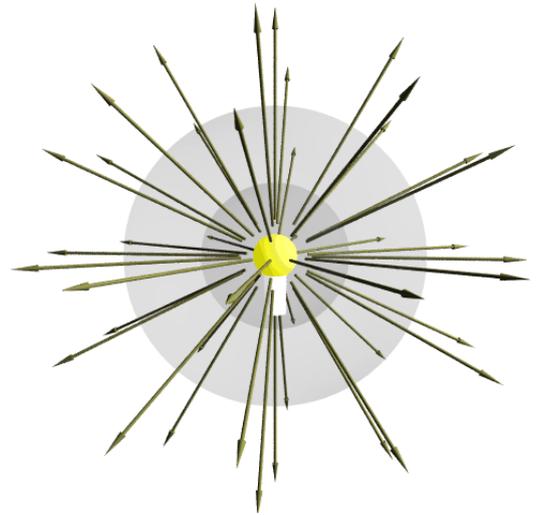
ここで人間の身体の中にどれだけの電荷があるかを概算してみよう。体重100kgの人間を考える。人間の質量のほとんどは原子核の中身である陽子と中性子できていて、陽子の質量はだいたい $1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$ 、中性子はこれよりちょっと重い程度であるから、人間の身体には $\frac{100}{1.67 \times 10^{-27}} = 5.99 \times 10^{28}$ 個の陽子または中性子がある。人間の身体を作っている原子のうち、炭素や酸素などではだいたい陽子と中性子が同じ数だから、この半分が陽子とすると、 2.99×10^{28} 個の陽子があることになる。陽子一個の持つ電荷は素電荷($1.60217733 \times 10^{-19} \text{C}$)であるから、これだけの数の陽子の持つ電荷は $2.99 \times 10^{28} \times 1.60 \times 10^{-19} = 4.79 \times 10^9$ クーロンである。

もし人間の身体に他に電気がなければ、1メートル離れた二人の人間の間には、

$$\frac{8.99 \times 10^9 \times (4.79 \times 10^9)^2}{1^2} = 2.06 \times 10^{29} [\text{N}] \quad (1.2)$$

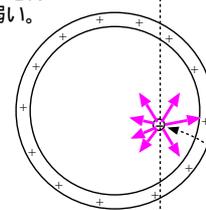
という莫大な力が働くことになる。

しかし、実際には人間の身体は電気的にはほぼ中性であり、ほぼ同数の電子がこの電気を打ち消している。マイナス電気による力がプラス電気による力を打ち消していると考えればよい(すぐ後で述べる重ね合わせの原理のおかげである)。



左にある電荷は多いが、遠いので一個一個の電荷による力は弱い。

右にある電荷は少ないが、近いので一個一個の電荷による力は強い。



どっちにも引っ張られない

⁵実際の電球では、熱など光以外のものにもエネルギーを消費するので、100Wの電球と言っても1秒で出てくる光のエネルギーは100Jよりは小さい。

⁶もう一つ、クーロンの法則が「たぶん成立しているだろう」と思われていた理由は、この法則が万有引力の法則とよく似ていることである。

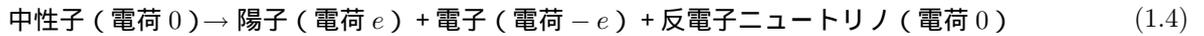
⁷原子がこのような構造を持つということは、1911年のラザフォードの実験で明らかになった。ラザフォードは薄い金属箔にアルファ線(正電荷を持つ粒子)をあててみたところ、非常に大きな角度で跳ね返されることがあることを見つけた。正電荷を強く跳ね返すということは、原子の中に正電荷の集中した「芯」があるということを示していた。これが原子核である。

もし、人間の持つ電気が完全に打ち消し合わずに1%ほど残っていたとしても、その時に働く力は

$$\frac{8.99 \times 10^9 \times (4.79 \times 10^7)^2}{1^2} = 2.06 \times 10^{25} \text{N} \quad (1.3)$$

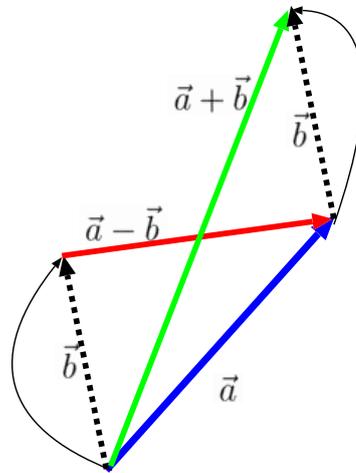
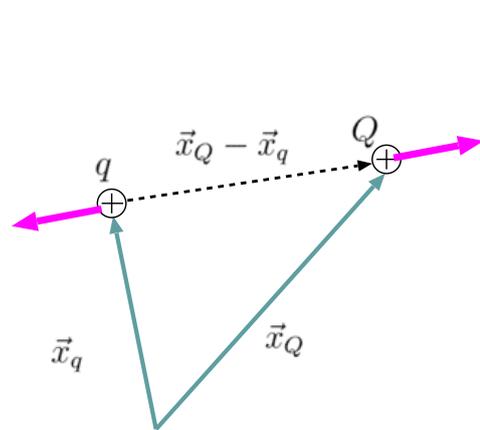
である。これでも十分大きい力である⁸。冬などに静電気がたまることがあるが、その時にたまっている静電気というのは、人間の体にある莫大な正電荷と負電荷のバランスがほんの少し狂ったことによって生まれる。

なお、電荷の量は現在知られているいかなる物理現象（化学反応、核反応、素粒子相互作用の全て）の前後で変化することはない。例えば



という反応（崩壊と呼ばれる）がある。この反応の前後では粒子の種類が変化しているものの、電荷の総量は変化していない。これを「電荷の保存則」と言う。これもまた、実験的に強く支持されている物理法則である。

1.2.2 ベクトルで表現するクーロンの法則



さて、(1.1) は力の大きさの式になっている。向きも含めてちゃんと表すにはベクトルで表現する。たとえば電荷 Q が位置ベクトル \vec{x}_Q の場所に、電荷 q が位置ベクトル \vec{x}_q の場所にあるならば、 q のある位置から Q のある位置へと向かうベクトルは $\vec{x}_Q - \vec{x}_q$ と書ける。 \vec{x}_Q から \vec{x}_q を引くという計算をすると、 \vec{x}_q の位置から \vec{x}_Q へと向かうベクトルになる。これは逆に「 \vec{x}_q には $\vec{x}_Q - \vec{x}_q$ を足せば \vec{x}_Q になる」と考えればわかりやすい。ある

いは、図にも書いたように、ベクトルの足し算は矢印の先を動かすが、ベクトルの引き算は矢印の根本を動かす、と考えても良いだろう。

Q に働く力はこのベクトル $\vec{x}_Q - \vec{x}_q$ の方向を向いている。そこで、この力を、

$$\vec{F}_{q \rightarrow Q} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_Q - \vec{x}_q|^3} (\vec{x}_Q - \vec{x}_q) \quad (1.5)$$

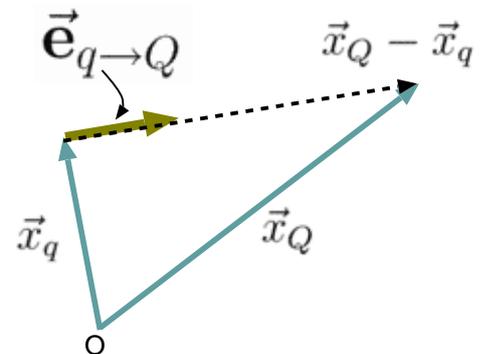
と書くことができる。この式では、分母が（距離）³ となっていて「おや？」と思うかもしれないが、後ろにかかっている $\vec{x}_Q - \vec{x}_q$ が距離に比例する量なので、力が（距離）² に反比例するという関係は同じである。

ベクトルの長さがわかりやすくなるように、この式を（ベクトルの長さ） \times （単位ベクトル）という形に書き直そう。

単位ベクトルとは「長さが1のベクトル」のことであり、向きだけを表現するベクトルだと考えてもよい。大きさは前にかかった係数に表現させるわけである。今の場合、 $\vec{x}_Q - \vec{x}_q$ の方向を向く単位ベクトルは

$$\vec{e}_{q \rightarrow Q} = \frac{1}{|\vec{x}_Q - \vec{x}_q|} (\vec{x}_Q - \vec{x}_q) \quad (1.6)$$

である。 $\vec{x}_Q - \vec{x}_q$ をその長さ $|\vec{x}_Q - \vec{x}_q|$ で割っているので長さ1となる。このテキストでは $\vec{e}_{\text{なんか}}$ という記号で、「なんか」に記された方向を向いた、長さ1のベクトルを表現することにする⁹。



⁸ちなみに地球の質量は $5.974 \times 10^{24} \text{kg}$ である。この力で、地球を 3.45m/s^2 で加速することができる。

⁹以後、 \vec{e} と表現されるベクトルは全て長さ1と思って欲しい。わかりやすいようにボールド体で表示する。

この記号を使えば

$$\vec{F}_{q \rightarrow Q} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}_Q - \vec{x}_q|^3} (\vec{x}_Q - \vec{x}_q) = \underbrace{\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}_Q - \vec{x}_q|^2}}_{\text{力の大きさ}} \underbrace{\vec{e}_{q \rightarrow Q}}_{\text{単位ベクトル}} \quad (1.7)$$

である。こう書くと「距離の二乗に反比例している」ということが納得できる。

$\vec{F}_{q \rightarrow Q}$ は「電荷 q が電荷 Q に及ぼす力」である。逆に「電荷 Q が電荷 q に及ぼす力」 $\vec{F}_{Q \rightarrow q}$ は、

$$\vec{F}_{Q \rightarrow q} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}_q - \vec{x}_Q|^3} (\vec{x}_q - \vec{x}_Q) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}_q - \vec{x}_Q|^2} \vec{e}_{Q \rightarrow q} \quad (1.8)$$

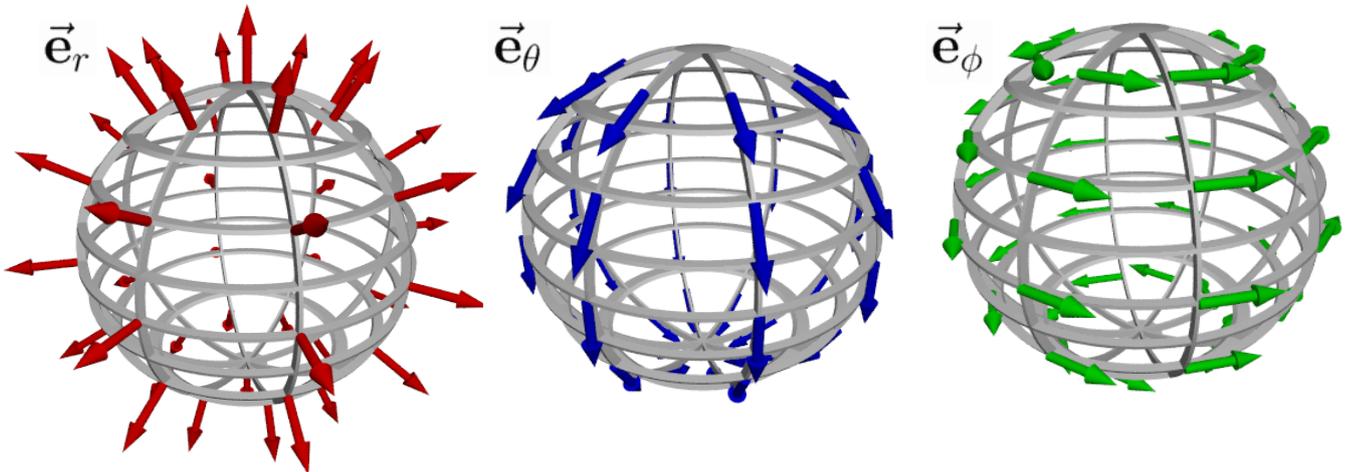
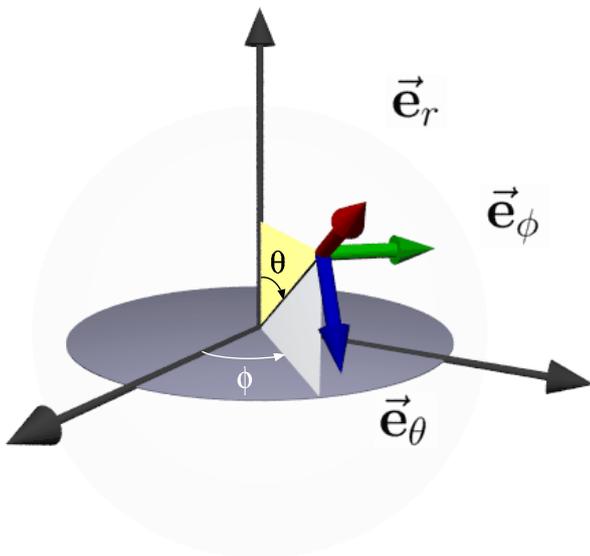
のように、 Q と q の立場を入れ替えたものになる。単に立場を入れ替えるだけでいい（自動的に逆を向くという結果を出してくれる）のがベクトルを使って書いた時の利点である。

ちょうど $\vec{F}_{q \rightarrow Q} = -\vec{F}_{Q \rightarrow q}$ である。すなわち、クーロンの法則はニュートン力学の作用反作用の法則にのっとっている¹⁰。

ここで、 q を原点に置く（つまり $\vec{x}_q = \vec{0}$ ）。そして Q のいる場所を極座標 (r, θ, ϕ) で表すことにすると、

$$\vec{x}_Q - \vec{x}_q = r\vec{e}_r \quad (1.9)$$

と書き直せる。ただし、 \vec{e}_r は、場所 (r, θ, ϕ) で、原点から離れる方向 (r 方向) を向いている単位ベクトルである。 x 軸方向を向く単位ベクトル、すなわち「 x が増加する方向を向いて長さが1のベクトル」を \vec{e}_x と書くのと同様、「 r が増加する方向を向いて長さが1のベクトル」を \vec{e}_r と書く。同様に、 $\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ も、それぞれ θ 方向、 ϕ 方向を向いた単位ベクトルとして定義されている（下の図を参照）。このような極座標における座標方向の単位ベクトルは、電磁気に限らず極座標を使う時には有用なので、覚えておくとよい¹¹。 $r\vec{e}_r$ は、長さ r のベクトルである。



「 r, θ, ϕ が増加する方向」は場所によって違うので、 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ は場所によって向いている方向が違う。この点が $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ とは大きく異なる点であることに注意しよう。

極座標を使って書くならば、 $|\vec{x}_Q - \vec{x}_q| = r$ なので、

$$\vec{F}_{q \rightarrow Q} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^3} r\vec{e}_r = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (1.10)$$

と書けることになる。

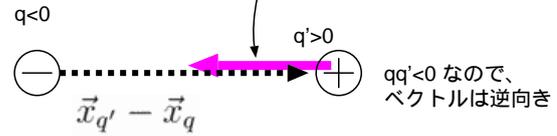
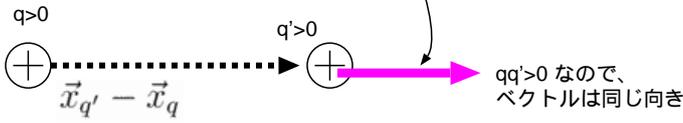
¹⁰実は単純に「クーロン力に関して作用・反作用の法則が成立する」と言っているのは静電場の時だけである。変動する電磁場を考えている時は、電磁場の変動が伝わるのに時間を要するため、ある時刻のクーロン力を見ると作用・反作用の関係が成立していない場合がある。

¹¹同様に、円筒座標では $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ が定義される。

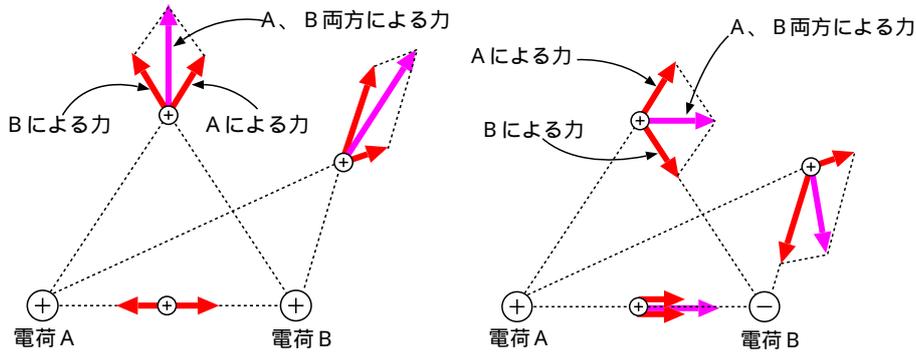
ベクトルで書いた式では、同符号 ($Qq > 0$) なら斥力、異符号 ($Qq < 0$) なら引力ということもちゃんと表現された式になっている。一方の電荷を原点とした時位置ベクトルと力のベクトルが同じ方向を向く時が斥力、逆を向く時が引力である。

$$\vec{F}_{q \rightarrow q'} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_{q'} - \vec{x}_q|^3} (\vec{x}_{q'} - \vec{x}_q)$$

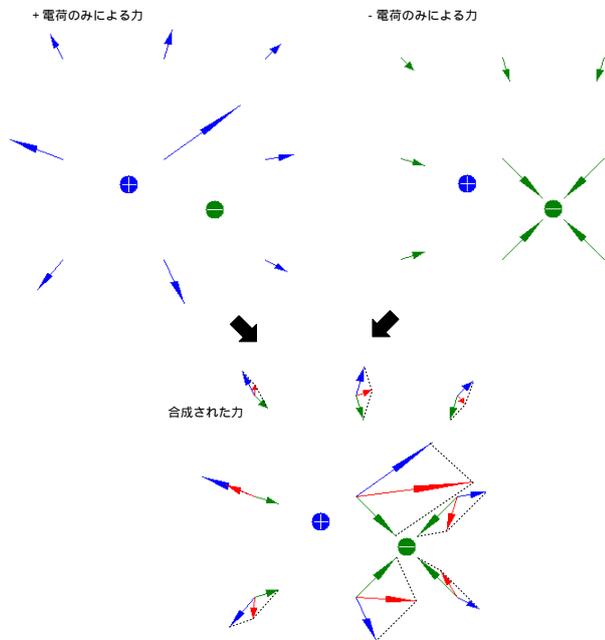
$$\vec{F}_{q \rightarrow q'} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_{q'} - \vec{x}_q|^3} (\vec{x}_{q'} - \vec{x}_q)$$



1.3 重ね合わせの原理



「クーロンの法則」は実験的に得られた式として認めよう。もう一つ、実験的に得られている関係として認めねばならないのは重ね合わせの原理である。すなわち、複数個の電荷 $Q_i (i = 1, 2, \dots, N)$ が存在する時、もう一個の別の電荷 q に働く力は、各々の Q_i によって及ぼされる力のベクトル和となる。



これを「二つの力が合成されているのだから当たり前ではないか」と考えてはいけない。上の図に書かれた「Aによる力」は、「Bが存在しなかったとした時、Aから働く力」であり、「Bによる力」は「Aが存在しなかったとした時、Bから働く力」である。この重ね合わせの原理は、二つの電荷AとBが両方存在していたとしても、それぞれによるクーロン力が互いとは独立な形で作用することを示している（これは実験なしに認めていいほど「あたりまえ」のことではないのだ）。

つまり、Aによるクーロン力は、Bが存在していることによって乱されることもなく、Aのみがあった時と同じだけの力を及ぼすということである¹²。AとBの両方が存在する時に働く力が、この二つの単純なベクトル和になるということは、そんなに自明なことではないのである。なお、物理のいろんなところでこの重ね合わせの原理は顔を出す。それはそのような現象の基礎となる方程式が線型であること（つまり、1次式で書かれていること）に由来している。物理の多くの方程式は幸いなことに線型である。方程式の線型性と重ね合わせの原理の関係については、後で

「電場を決定する方程式」を出した時にもう一度確認しよう。

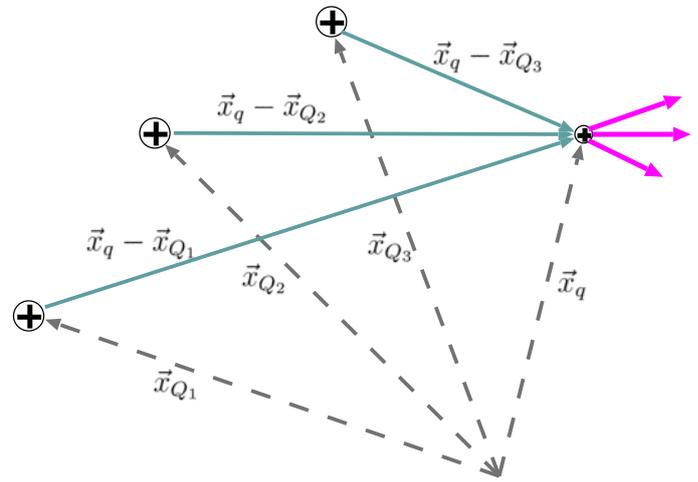
¹²物理現象においてはこういう独立性があることが多いが、人間関係はこうはいかない。Aさんがいる時には言えないことも、Bさんがいる時なら言えたりするし、逆にAさんとBさんがそろって初めて何か（喧嘩？）が起こることもある。

より一般的に重ね合わせの原理を表現しておく。今電気量 q の電荷が一つ（位置ベクトル \vec{x}_q の位置に）あるとする。その回りに、電気量が各々 Q_1, Q_2, \dots, Q_N であるような電荷が、各々の位置ベクトルが $\vec{x}_{Q_1}, \vec{x}_{Q_2}, \dots, \vec{x}_{Q_N}$ である位置に配置されているとする。

この時、電気量 q の電荷が受ける力は、

$$\begin{aligned} \vec{F}_q &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_{Q_i \rightarrow q} = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_q - \vec{x}_{Q_i}|^3} (\vec{x}_q - \vec{x}_{Q_i}) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{Q_i q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_q - \vec{x}_{Q_i}|^2} \vec{e}_{Q_i \rightarrow q} \end{aligned} \tag{1.11}$$

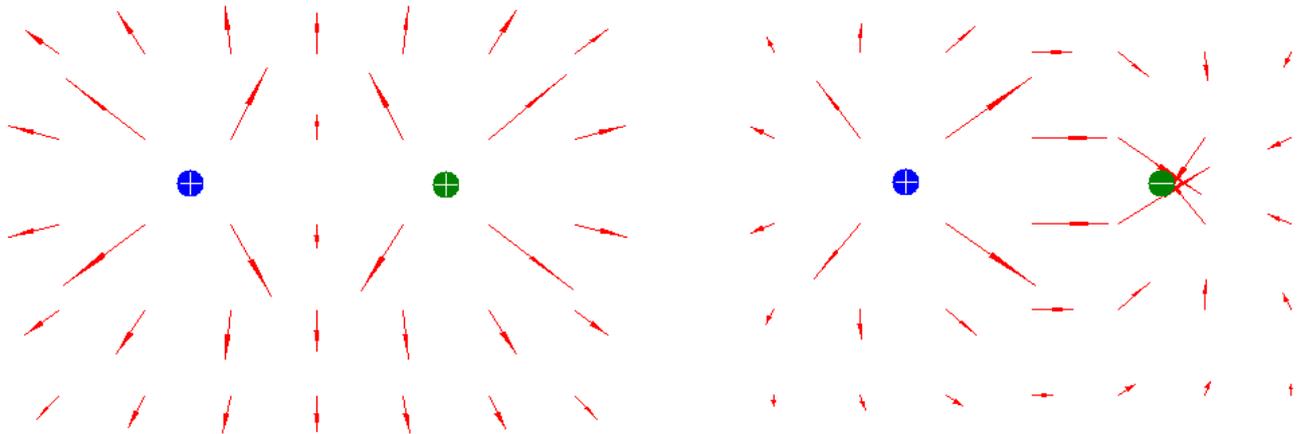
と表すことができる。もちろんこの和はベクトルの和として取られていることに注意。



1.4 電場 \vec{E} と電気力線

1.4.1 電場 \vec{E} の定義

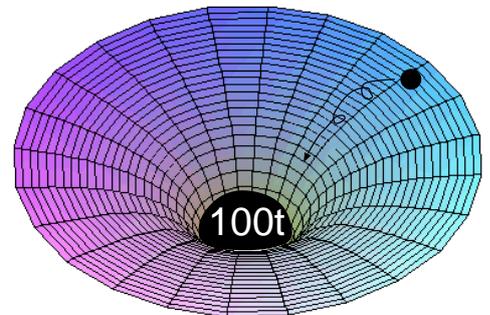
前節では「電荷と電荷の間に働く力」としてクーロン力を説明した。ファラデーは、電氣的な力は電荷と電荷の間に直接働く（「遠隔作用」）のではなく、電荷は周囲の空間にを作り、その電場によって他の電荷が力を受けるという「近接作用」の考え方を導入した。ファラデーは電場¹³という形で「そこに電荷が存在することによる物理的影響」が空間を伝わっていくと考えたのである。



上の左図は、二つの正電荷がある時、もう一個の正電荷を置いたとしたらどんな力を受けるかを図示したものである。右図は正電荷と負電荷がある時に、もう一個正電荷を置いたとしたらどんな力を受けるかを図示した。左の場合、両方からの反発力を、右の場合は正電荷から反発されつつ負電荷に引かれることになる。

この図に書き込まれた矢印を「この場所では二つの電荷からこんな力を受ける」と考えるのではなく、「この場所そのものが、『正電荷を置いたらこんな力を及ぼす性質』を持っている」と考える。これが「場」の考え方である。

イメージとしてはこのようにとらえてもよい。電荷があると周りの空間が影響を受けるわけであるが、トランポリンのような弾力のある物質の上に重い物体を置いた時に起こる現象をイメージするとわかりやすいかもしれない。重い物体によってトランポリンに凹みが生じる。すると、その凹みが作った傾斜のために、近くにある別の物質が（重い物体とは接触していない

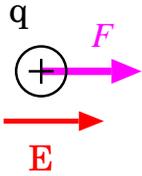


¹³ 「電界」と呼ぶ場合もあるが、意味には全く差はない。英語では electric field である。field はサッカー場などの「フィールド」と同じ言葉で、つまりは野原のこと。地面にアッチ向いたりこっち向いたりしながら芝生が生えている様子を思い浮かべると「field」のイメージがわかる。

にもかかわらず) 重い物体に近づく方向に力を受ける。このように物体が「場所(今の場合トランポリン)」に影響を与えたことで、別の物体に力が及ぼされる、というのが「場」の考え方なのである¹⁴。

「正電荷を置いたとしたら及ぼされる力」は、そこに置く正電荷の大きさにも比例するので、「場所の性質」としての電場 \vec{E} を考える時には、そこに置く正電荷の大きさを割り算して定義する。すなわち、

【電場 \vec{E} の定義】



ある場所に試験電荷 q を置いたと仮定すると、その電荷に力 \vec{F} が働くとする。この時、その場所には $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ の電場 \vec{E} が生じている。

と定義する。別の言い方をすれば、「電場 \vec{E} とは、その場所に単位電荷を置いた時にその電荷が受ける力である」としてもよい。実際には、そこに電荷を置くことによって回りの状況は変化する(たとえば置かれた電荷に引かれたり反発したりして他の電荷の位置が変わる)のが普通なので、この単位電荷はあくまで仮想的に置かれるものである。そこで「試験電荷」(または「仮想電荷」)という言い方をしている。

クーロンの法則によれば、場所 \vec{x} にいる電荷 q が、場所 \vec{x}' にいる電荷 q' に及ぼす力は $\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}' - \vec{x}|^2} \vec{e}_{x \rightarrow x'}$ であるから、場所 \vec{x}' における電場 \vec{E} は(この場合試験電荷にあたるものは q' であるから)

$$\vec{E}(\vec{x}') = \frac{\vec{F}_{q \rightarrow q'}}{q'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}' - \vec{x}|^2} \vec{e}_{x \rightarrow x'} \quad (1.12)$$

となる。

以上のようにして電場 \vec{E} を定義しても、電場 \vec{E} を定義せずにクーロンの法則のみを使った場合に比べて、物理的内容には違いがないように思えるかもしれない。電荷と電荷の間に直接力が働いても、電荷が電場をつくり、電場が電荷に力を与えても、結局のところ「電荷と電荷の間に引力や斥力が働く」という点は同じである。しかし、全く同等と思えるのはこれが静電場すなわち時間的に定常な電場を扱っているからであって、変動する電磁場を考えたりするとそうはいかなくなる。とにかくこの時点で把握して欲しいのは「電場 \vec{E} というものを導入することには、単なる数学的置き換えではない深い意味があるのだ」ということである。また、定常な電場に限りて考えた場合でも、電場という概念はとも便利である。それは以降の話で理解して欲しい¹⁵。

クーロン力に重ね合わせの原理が成立するので、クーロン力を単位電荷あたりに直した電場 \vec{E} にも当然、重ね合わせの原理は成立する。

電場 \vec{E} の単位

SI 単位系での電場 \vec{E} の単位は、 $\vec{F} = q\vec{E}$ からすれば \vec{F} は [N] (ニュートン) q は [C] (クーロン) なのだから、[N/C] (ニュートン毎クーロン) となる。ところが、後で電位 V というものが出てきて、電場 \vec{E} はその電位の空間微分で表す ($\vec{E} = -\vec{\nabla}V$) こともできる。電位の単位が [V] (ボルト) で、微分 $\vec{\nabla}$ は [1/m] (メートル分の1) なのだから、電場 \vec{E} の単位は [V/m] (ボルト毎メートル) を使うこともある。

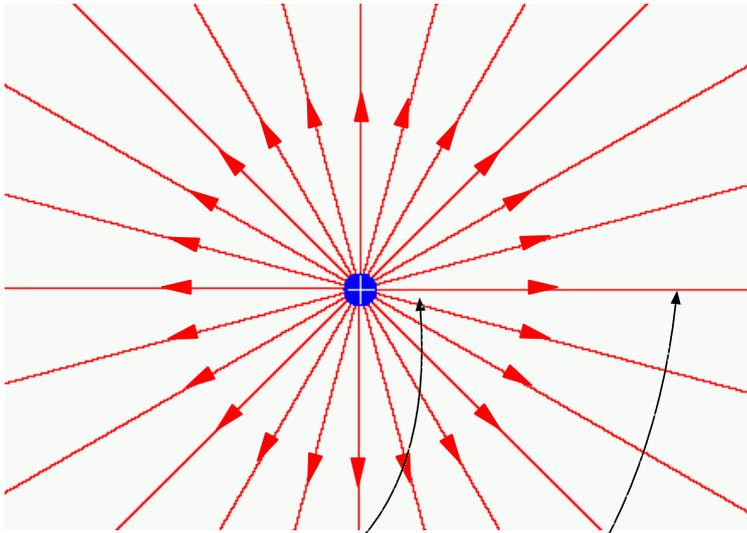
1.4.2 電気力線

電場 \vec{E} というものを視覚的に表す手段として、電気力線というものを定義しよう。あくまで視覚的に表現するための手段である！ つまり本当にそういう線が存在しているわけではないことに注意しよう。実ははしないが、こういう線を考えることで、電場の物理的、力学的イメージが明確になる。

電気力線とは「各点各点で電場 \vec{E} の方向を向いている線」である。ある点から出発して電場 \vec{E} の方向へ方向へと線を伸ばしていくことで、空間を埋め尽くすように電気力線を引くことができる。

¹⁴なお、ここで説明したイメージは後で導入する「電位」の考え方にも適用できる。

¹⁵なお、電荷によって空間に作られる物理現象としての「電場」と、「単位電荷あたりに働くクーロン力」として定義された「電場 \vec{E} 」は同じ言葉を使ってはいるが、前者は一般的な概念を表すもの、後者はちゃんと定量的に定義された量である。本書では「定義されたベクトル量としての電場」を表現する時には \vec{E} を付記する。



このあたりは電気力線の密度が濃い
= 電場が強い

このあたりは電気力線の密度が薄い
= 電場が弱い

この性質からわかるように、電気力線は正電荷からは離れる方向に、負電荷へと向かう方向に伸びていくことになる。ゆえに、電気力線は正電荷で始まり、負電荷で終わる。あるいは、負電荷に出会うことなく無限遠まで伸びていく電気力線もあるし、逆に正電荷から出たわけでもなく無限遠からやってくる電気力線もある。左の図は正電荷が一個ある場合の電気力線で、正電荷から放射状に無限遠に向かって伸びていく¹⁶。

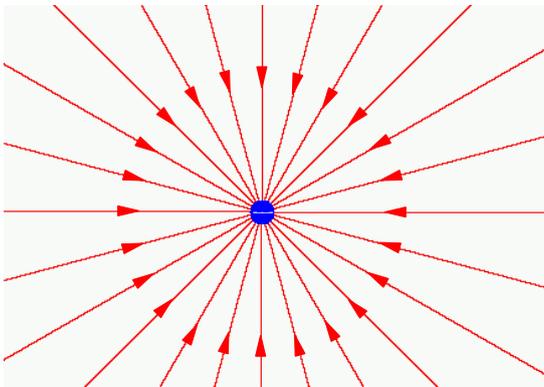
これで電気力線は電場 \vec{E} の方向を示すことができる。では電場 \vec{E} の強さはどのようにして表現するかというと、電気力線の密度が電場 \vec{E} の強さになる。

たとえば、電気量 Q の正電荷が一個だけある時、距離 r 離れたところでは電場 \vec{E} の強さは $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ であるから、この場所には 1m^2 あたりに、 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 本の電気力線を引くことになる。電荷から距離 r 離れた所、と言う条件を満たす場所は半径 r の球の表面であるから、面積は $4\pi r^2$ である。

ゆえに、引くべき電気力線の本数は

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.13)$$

となる¹⁷。この電気力線の総本数が距離 r によらないことに注意しよう。図に描いているように、電気力線は途中で増えたり減ったりせずに伸び続けていくことになるわけである。



以上から、電気力線は $Q[\text{C}]$ の電荷から $\frac{Q}{\epsilon_0}$ 本出ることになる。ちな

みに、 $\frac{1}{\epsilon_0} \simeq 1.13 \times 10^{11}$ であるから、 1C からは約 1130 億本出ることになる。実際に図に描くときには見やすい程度に適当に本数を調節して描くことになる。なお、ここでは電気力線を「本」という単位を使って計算しているが、だからと言って電場が「1本、2本」と数えることができるような不連続なものだということには注意しよう。

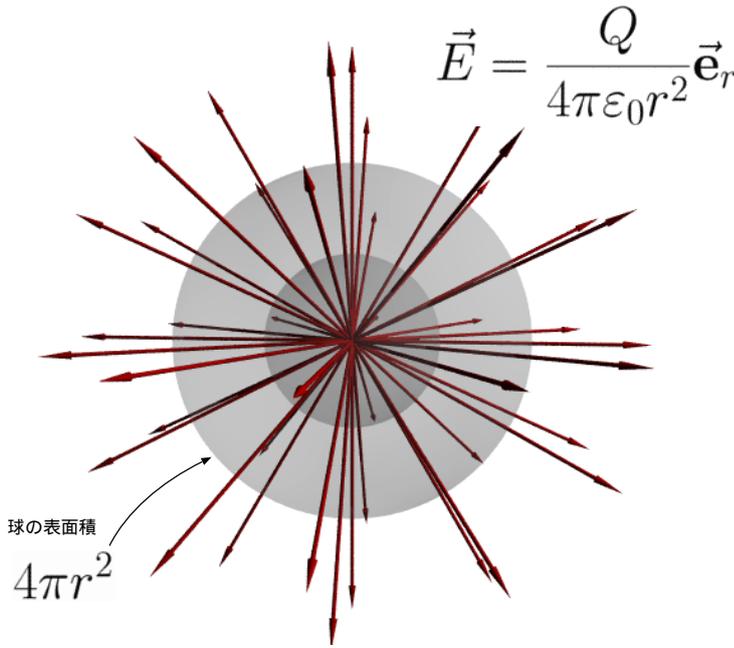
.....
【FAQ】「電気力線と電気力線の間には電場はないんですか？」

電気力線は電場 \vec{E} を表現するための描画方法なのであって、実際に線があるわけではない。実際の電場はもちろん隙間無く存在するが、隙間無く存在するからと言ってすべての場所に線を引いてしまったら、真っ黒になってしまって図を描く意味がなくなってしまう。「電気力線の本数」には（人間が図を描く時の都合はあれど）物理的意味はない。「電気力線と電気力線の隙間」にも物理的意味はない。ただ、図の上で電気力線と電気力線の間が広く開いているならば、その場所は電場 \vec{E} が弱いのだ、と判断できるだけのことである。

.....
点電荷のつくる電場 \vec{E} が $\frac{1}{r^2}$ に比例していたことは大きな意味がある。こうでなくては、「電気力線は枝分かれも合流もしない」という法則が成立しない。

¹⁶この節にあげた電気力線の図は、全て3次元的な広がりを無視して、2次元的に描かれている。実際はもちろん、紙面から飛び出す方向にも電気力線は伸びている。

¹⁷ここで 4π が消えることが SI 単位系を採用して簡単になった点。ガウス単位系では電荷 Q から $4\pi Q$ 本出る。



左の図で、電荷を中心とした球を貫く電気力線の本数を計算してみよう。電気力線の単位面積あたりの本数が電場 \vec{E} であるので、逆に電気力線の総本数を計算するには (電場 \vec{E}) × (面積) とやればよい。こう考えると、どんな半径 r の場所で考えたとしても、トータルの電気力線の本数は $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$ となる。これは半径によらない定数である。

電気力線が途中で枝分かれして増えたり、合流して減ってしまったりすることはないということを、クーロンの法則に基づいた計算でも確認することができた。

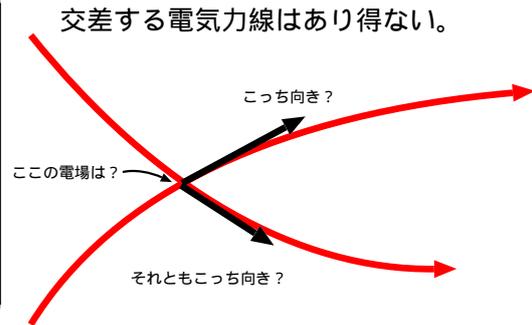
さらにもう一つ大事な電気力線の性質として「電気力線は交差しない」ということもある。もし交差していたとしたら、その場所には二つの電場 \vec{E} があることになり、定義に矛盾する。

以上から、電気力線の定義ならびに性質を

以下のようにまとめることができる。

【電気力線の定義と性質】

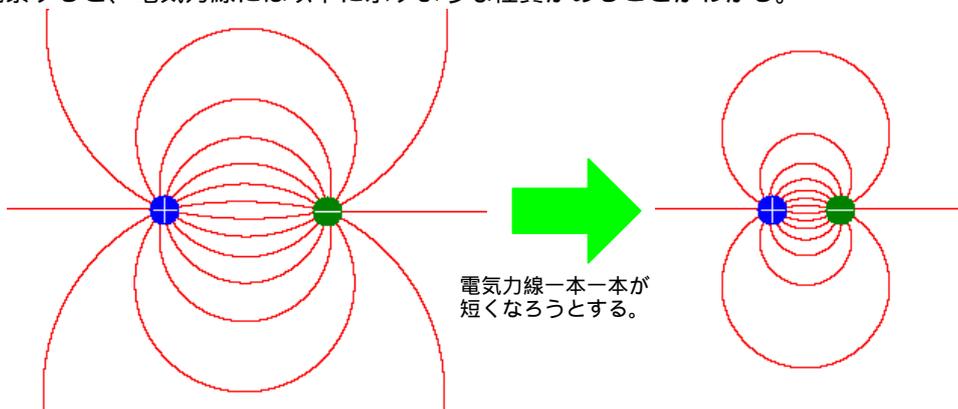
- (1) その場所の電場 \vec{E} の方向に伸びる。
- (2) 単位面積あたりの本数が電場 \vec{E} の強さに等しい。
- (3) 正電荷で始まり、負電荷で終わる。あるいは無限遠からやってくるか、無限遠まで伸びる。途中で途切れることはない。
- (4) 途中で分裂したり、合流したりすることはない。
- (5) 交差することはない。
- (6) 正電荷 $Q[C]$ から $\frac{Q}{\epsilon_0}$ だけ出る (負電荷 $-Q$ には $\frac{Q}{\epsilon_0}$ だけ入る)。



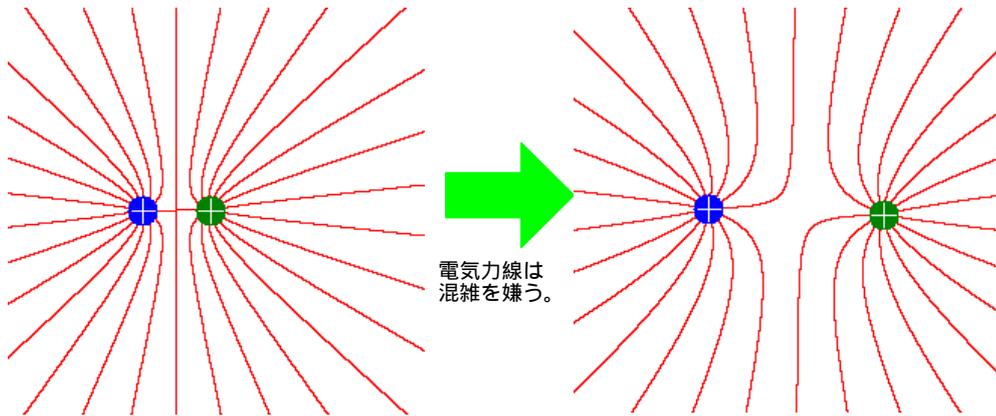
なお、電気力線は矢印で表現されるものの、何か物理的に移動している跡を示すものではないので、「正電荷はずっと電気力線を出し続けていますが、いつかなくなってしまったりしないのですか?」と心配する必要はない¹⁸。

1.4.3 電気力線の力学的性質

正電荷と負電荷が引き合っている時、正電荷と正電荷が反発しあっている時の電気力線の様子を描いて、静電気力を観察すると、電気力線には以下に示すような性質があることがわかる。



¹⁸ 同ような心配 (杞憂) として「地球は重力を出し続けているので、いつか重力なくなりませんか?」というものもある。静的な「場」というのは、消耗したりはしないものなのである。そもそも、力を出してもエネルギーを消費しないという状況は他にもいくらでもある。何かエネルギーを消費するのは、他に対して仕事をした時である。



電気力線がなるべく短くなるように、ということは正電荷と負電荷の引力を考えるとわかりやすい。また、電気力線の混雑を嫌う性質のおかげで正電荷と正電荷、負電荷と負電荷に斥力が働く¹⁹。

この性質は、磁場のところで出てくる磁力線と共通の性質であるという点でも重要である。N極とS極が互いに引き合うのは、N極とS極へ向かう磁力線の長さを少しでも短くしようとするからであるし、磁石のN極とN極を接触させようとすると、それにあらがう斥力を感じるのは、磁力線の混雑を嫌う性質の顕れなのである。

後で出てくる「静電場の位置エネルギー」を使って考えると、この性質は「自然は位置エネルギーの低い方向へ行こうとする」という一般的な法則による結果であることもわかる。これについては後で述べよう。とにかく、クーロン力という現象は電気力線（すなわち、電場）の性質を考えることで統一的にとらえることができる、ということを理解しておこう。つまり、クーロン力が本質なのではなく、電場が本質なのである。

1.5 いろんな電荷分布における電場 \vec{E} の計算

ここまでは電荷が点状である場合のみを考えてきたが、以下ではいくつかの例を述べて、広がった電荷分布によって作られる電場 \vec{E} を計算する方法を示そう。後でもう少し楽に計算できる方法をいくつか示すことになるが、だからこの節は無駄かという、そんなことはない。ここで使われる手法は物理のいろんなところで使われていて、それを知っておく意味は大きい。

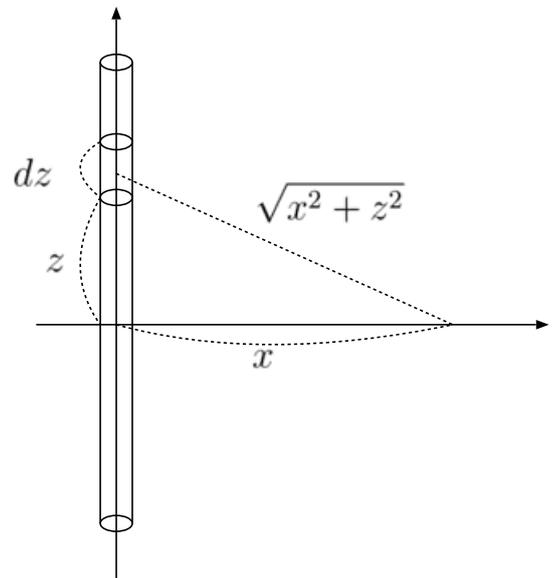
ここで、電場 \vec{E} に関しても重ね合わせの原理が使えるということに注意しよう。そのおかげで、点状ではなく、広い範囲に分布している電荷によって働く力を計算することができるのである。

1.5.1 有限の長さの線上に広がった電荷による電場 \vec{E}

例題として、有限の長さの線上に均等に分布した電荷によって、その線から距離 d 離れたところにいる電荷 Q に働く力を計算してみよう。

まず問題をちゃんと設定しよう。直角座標系 (x, y, z) を用意し、 z 軸に重なるように（半径が無視できるほど細い）円柱状の棒をおく。その棒に単位長さあたり ρ の電荷を与える²⁰。つまり、棒のうち微小長さ dz の部分が電荷 ρdz を持つようにする。棒は $z = -L$ から $z = L$ まで（つまり長さ $2L$ の範囲）に分布しているものとする。

まずおおざっぱに予想しておく。たとえば $(x, 0, 0)$ に単位電荷を置いたとすると、当然この単位電荷は棒から（ z 軸から）離れる方向の力を受けるだろう。遠方で感じられる電場 \vec{E} の強さは電荷 $2\rho L$ がある場合と同じになるはずである。



¹⁹近接作用の考え方では、力を及ぼす根源は電場、すなわち電気力線なのである。電場という概念を使って考える以上、主役は常に電場でなくてはならない。

²⁰この後「単位長さあたり」とか「単位面積あたり」「単位体積あたり」という言葉を頻りに使うであろう。意味がつかみにくい、という人はそれぞれ「1mあたり」「1m²あたり」「1m³あたり」と読み替えて考えればよい。もし長さの単位がmでなくcmだったりヤードだったり尺だったりする時は、もちろんそれに応じて取り替える。

$z = 0$ 平面上で z 軸から $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ はなれた場所の電場 \vec{E} の強さはいくらだろう?—言い換えれば、この場所に試験的に単位電荷を置くと、単位電荷が棒の上の正電荷から受ける力の大きさはどれだけになるだろう??—このような計算を行うには、以下のような物理の常套手段を使う。

【物理の常套手段：細かく区切って考えよう】

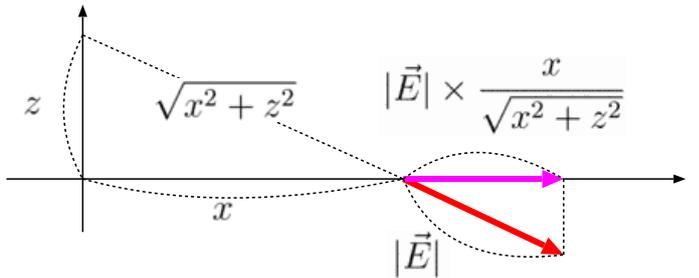
- Step 1. 広い範囲に広がっているものを微小な区間に分ける。
- Step 2. 微小な区間による影響を考える。微小な区間なので、この計算はまるでその微小区間が点であるかのごとく計算してもいい。
- Step 3. 全微小区間にわたって影響を足し上げる。

このような3つの Step を実行した結果が正しい答えになるためには(つまり微小部分の電荷による電場 \vec{E} の足し上げが全電荷による電場 \vec{E} になるためには) 重ね合わせの原理が成立しないといけないことは言うまでもない。

Step 1. すでに述べたように、長さ dz の微小部分は ρdz の電荷を持つ。

Step 2. 試験電荷のいる位置を $(x, 0, 0)$ としよう。 $(0, 0, z)$ から $(0, 0, z + dz)$ までの間にいる電荷 ρdz が作る電場 \vec{E} の大きさは、

$$\frac{\rho dz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + z^2)} \quad (1.14)$$

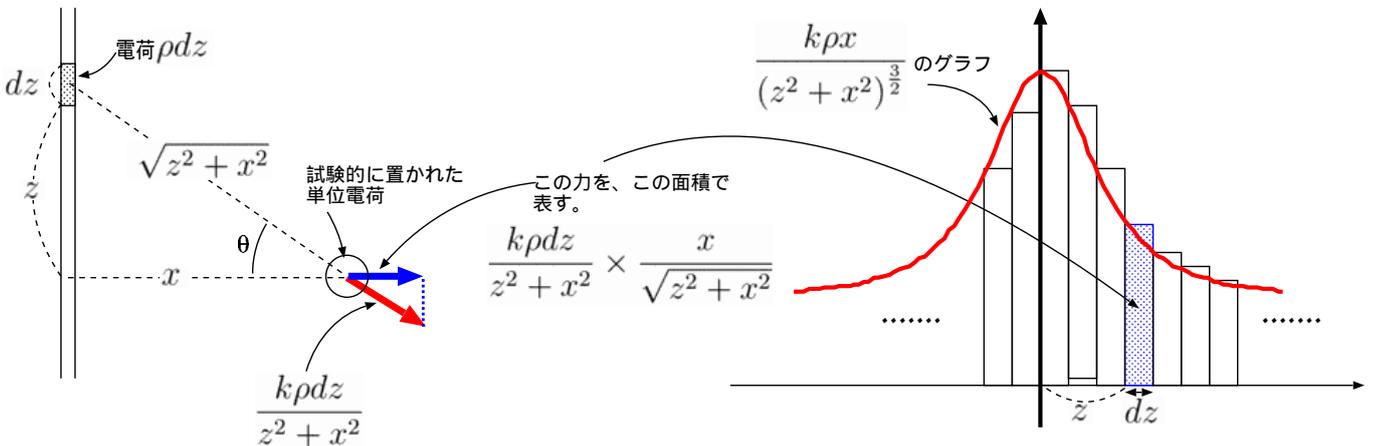


である。

ただし、この電場 \vec{E} は予想される方向である真横ではなく、斜めを向いている。これはこの力が「微小断片による力」だからで、全ての微小断片による力を足し算すれば、 z 方向の成分は消し合ってなくなるはずである。まじめに計算するならばこれを z 方向と x 方向にわけて考えて別個に足し算すべきだが、最初の予想によれば、 z 方向は足し算すると0になる。そこで、どうせなくなる部分を計算するのはやめにして、 x 方向だけを考えよう。三角形の相似により、

$$\frac{\rho dz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + z^2)} \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{\rho x dz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.15)$$

が断片による電場 \vec{E} の x 成分である。



Step 3. 断片による電場 \vec{E} を足す。

足すと言うことはすなわち、 z に関して $(-L, L)$ で積分するということ。上の図の長方形一個一個の面積が、 $\frac{\rho x dz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ であり、それを z を変化させながら足していく。それはすなわち、 $\int_{-L}^L \frac{\rho x dz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ という積分になる。上に書いた図では dz が有限の幅を持っているため、足し算の結果はでこぼこした角柱の足し算になる。しかし、積分においては dz は微小量である(つまり、 $dz \rightarrow 0$ の極限をとって面積を計算するのが積分である)。よって、積分することで今考えている電場 \vec{E} のトータルがちゃんと計算できることになる。

結局、 $\int_{-L}^L \frac{Q\rho x}{4\pi\epsilon_0(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz$ という積分をしなくてはいけないのだが、この積分は $z = x \tan \theta$ とおくことで簡単に

計算できる形になる。 θ の意味は図にある通りである。図を見るとわかるように、 $\sqrt{x^2 + z^2} = \frac{x}{\cos \theta}$ である²¹。

$z = L$ になる時は $\tan \theta = \frac{z}{x}$ になる時であるから、そうなる角度を α とおくと、

$$\begin{aligned} & \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\rho x}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{x}{\cos \theta}\right)^3 \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 x} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 x} [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 x} \sin \alpha \end{aligned} \quad (1.16)$$

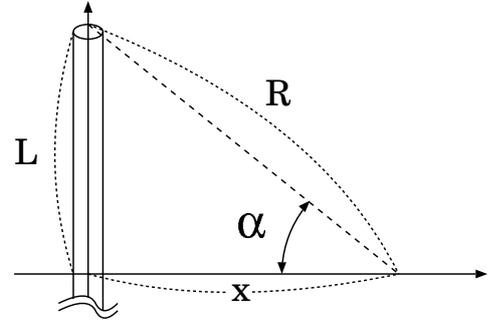
と計算できる。

もし、この直線が無限に長いならば、 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ となるので、電場 \vec{E} は $E = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 x}$ となる。実はこの場合には、後で出てくるガウスの法則を使う方が簡単に答が出るのである。この事は後で確認しよう。

なお、この棒に含まれている全電荷量 Q は密度 ρ に長さ $2L$ をかけたものであるから、この電場 \vec{E} は

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x L} \sin \alpha = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \times \frac{x}{L} \sin \alpha \quad (1.17)$$

と書くこともできる。この $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$ は、中心に電荷 Q が集中的に存在している場合の電場 \vec{E} である。 $\sin \alpha = \frac{L}{R}$ であることを考えると、 $\frac{x}{L} \sin \alpha = \frac{x}{R}$ であり、これは 1 より小さい。つまりこの時の電場 \vec{E} は、棒の中心に電荷 Q が全部集まったとした場合よりも弱くなる。弱くなってしまった原因は、電場 \vec{E} の z 成分が消し合ってしまったことと、電荷の大部分が x より遠い距離にいることの二つである。



【補足】この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

せっかくベクトルを使った記法も習ったので、それを使って計算する方法も書いておこう。微小部分 dz のつくる電場 \vec{E} はベクトルで書くと、

$$\vec{E} = \frac{\rho dz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + z^2)} (\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z) \quad (1.18)$$

となる。ここで、ベクトル $\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z$ は、 x 軸に対してマイナス方向に角度 θ だけ傾いている単位ベクトルである。上でやったように変数変換 ($z = x \tan \theta, dz = \frac{x}{\cos^2 \theta} d\theta$) をすると、(この場合、図から $x^2 + z^2 = \left(\frac{x}{\cos \theta}\right)^2$ となることに注意)

$$\vec{E} = \frac{\rho d\theta}{4\pi\epsilon_0 x} (\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z) \quad (1.19)$$

と書ける。つまり、 $\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z$ のところ以外は θ 依存性がなくなってしまった。

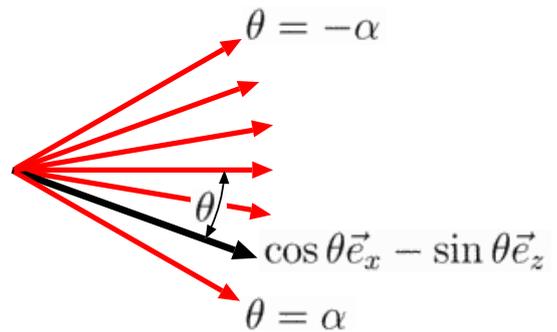
この積分

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z) d\theta \quad (1.20)$$

は、右の図のように単位ベクトルの角度を変化させつつ足していくという計算になる。図でも明らかなように、 \vec{e}_z の方向の成分は奇関数で消え、 \vec{e}_x 方向については

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta \vec{e}_x d\theta = [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} \vec{e}_x = 2 \sin \alpha \vec{e}_x \quad (1.21)$$

という結果になる。もちろん最終結果は (1.16) と同じである。



【補足終わり】

²¹これは $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ という公式を使っても確認できるが、図で考える方が楽だろう。

1.5.2 円状の電荷による電場 \vec{E}

次に、一様に帯電した円盤による電場 \vec{E} を考えよう²²。この円盤には単位面積あたり σ の電荷があるとして考えよう²³。

円盤を微小にわけるときは、図のように2次元平面上に極座標 (r, θ) を張って²⁴、まず $r \sim r + dr$ 、 $\theta \sim \theta + d\theta$ の範囲に入る部分を「微小面積」として取り出して考える。後で r を0から r_0 (円の半径) まで積分し、 θ を0から 2π まで積分すれば(つまり、円全体について足し上げれば)、円盤上の全電荷を考えたことになる。

この微小部分は、 r 方向に長さ dr を持ち、 θ 方向に長さ $r d\theta$ を持つ(長さ $d\theta$ ではないことに注意。ラジアン定義を思い出せ)ので、面積は $r dr d\theta$ となる。よってこの微小部分には、 $\sigma r dr d\theta$ の電荷が入っている。

この微小電荷が円盤の中央上空距離 z の場所(図のP点)に作る電場 \vec{E} は、 $\frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ である。しかし、さっき同様、この電場 \vec{E} は斜めを向いており、最終結果(足し算=積分が終わった後)に効くのは鉛直上向き成分だけであろう。ゆえに、

$$\frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times \frac{z}{R} \quad (1.22)$$

という電場 \vec{E} を積分すればよい。ここまで R と書いてきた量は実際には $R = \sqrt{z^2 + r^2}$ であるから、それを代入して、

$$\frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.23)$$

という積分を行えばよい(積分と関係ない数は先に外に出した)。

この積分のうち、 $d\theta$ 積分はなんなく終わり(被積分関数の中に θ がないから)、答は 2π である。つまり、後は

$$\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^{r_0} \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.24)$$

をすればよい。この積分も $r = z \tan \phi$ として考えればできる($r^2 = t$ において積分する方法もある)、 $dr = \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi$ と置き直して、

$$\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^{\phi_0} \frac{z \tan \phi}{(z^2 + z^2 \tan^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{z}{\cos^2 \phi} d\phi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\phi_0} \frac{\tan \phi}{(1 + \tan^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{\cos^2 \phi} d\phi \quad (1.25)$$

となる。 $1 + \tan^2 \phi = \frac{1}{\cos^2 \phi}$ 、つまり $\frac{1}{(1 + \tan^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} = \cos^3 \phi$ を使ってさらに簡単にすると、

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\phi_0} \sin \phi d\phi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [-\cos \phi]_0^{\phi_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [-\cos \phi_0 + \cos 0] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \phi_0) \quad (1.26)$$

図から、 $\cos \phi_0 = \frac{z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}}$ である。これで最終結果は

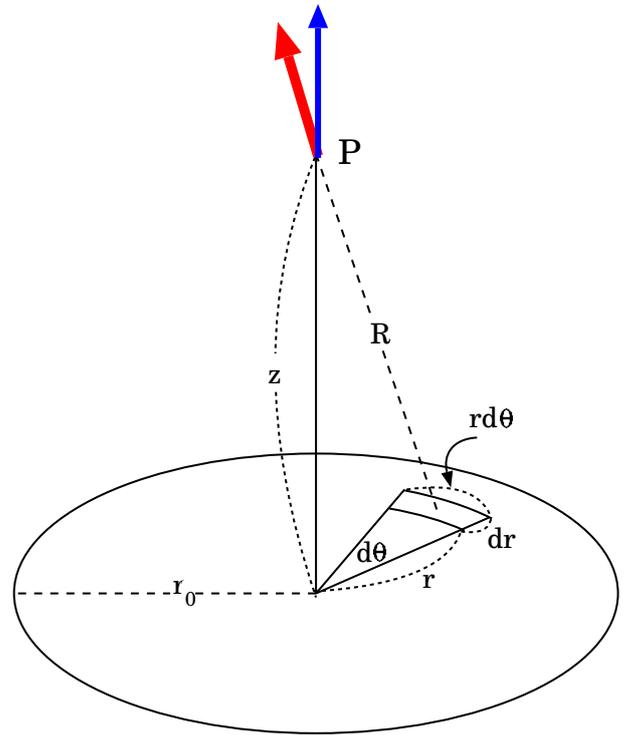
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 (r_0)^2} \times \frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}} \quad (1.27)$$

となった。最後の式では、 $Q = \pi (r_0)^2 \sigma$ であることを使って書き直している。

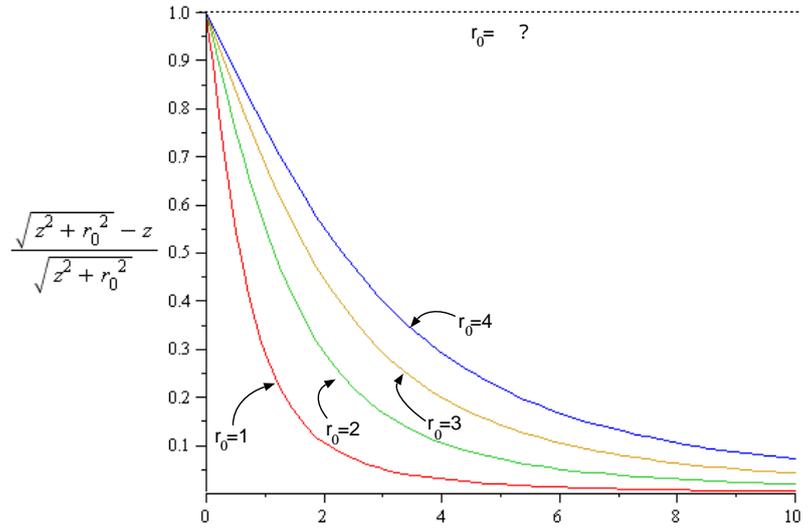
²²念のために述べておくが、単純に金属の円盤に電荷を与えたとしても、一様には帯電しない。同種電荷は反発するので、外側に偏る。

²³さっきのは線密度、つまり「単位長さ当たりの電荷」で、今度は面積密度、つまり「単位面積当たりの電荷」である。「密度」といってもいろんな意味があるので注意。

²⁴ z も含めて3次元円筒座標 (r, θ, z) を張ると考えた方がいいかもしれない。



右のグラフは r_0 をいろいろ変化させていった時の関数 $\frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}}$ の様子である。 z が大きくなるとこの関数はどんどん小さくなっていく(減衰していく)。 r_0 が大きいほど、減衰の割合は小さくなっていることわかる。



ここで $r_0 \rightarrow \infty$ の極限を取ってみよう。つまり、無限に広い平面上に電荷がたまっている場合である。この時、 $\cos \phi_0 = 0$ である(図で考えるとわかるように、この極限は ϕ_0 が直角になる極限だ)。よって、この時の電場 \vec{E} は $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ となってしまふ。つまり、場所によらない定数なのである。もし、無限に広い板に様に電荷が溜まっていたら、その板の作る電場 \vec{E} はどんなに遠くに行っても弱まらないことになる。

現実には無限に広い平面に電荷を一様に溜めるなどということはできないから、どこまでも弱まらない電場 \vec{E} というのはもちろんできない。

なぜこのようになるのかは、ガウスの法則を学ぶと納得できる(さらに、なぜ分母に2があるのかも深く納得できるはずだ)。

r_0 が有限で z が大きいところでのこの減衰の様子は、だいたい $\frac{(r_0)^2}{2z^2}$ であることを以下で示そう。 r_0 に比べて z が大きいことから、 $\frac{r_0}{z}$ が1より非常に小さい数字である ($\frac{r_0}{z} \ll 1$) というのを使って近似を行う。 E の式のうち、 $\frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}}$ の部分を考えよう。まず分母と分子を z で割って、

$$\frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (\frac{r_0}{z})^2} - 1}{\sqrt{1 + (\frac{r_0}{z})^2}} \tag{1.28}$$

とする。ここでルートの展開公式 $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x + \dots$ を使うと、

$$\frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}(\frac{r_0}{z})^2 + \dots - 1}{1 + \frac{1}{2}(\frac{r_0}{z})^2 + \dots} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{r_0}{z})^2 + \dots}{1 + \frac{1}{2}(\frac{r_0}{z})^2 + \dots} \tag{1.29}$$

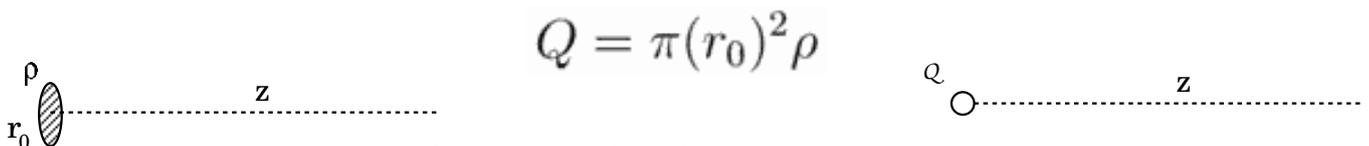
であるから、 z が大きいところでは、

$$\frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{z}\right)^2 \tag{1.30}$$

となる。これを E の式 (1.27) にいれると、

$$\frac{Q}{2\pi\epsilon_0(r_0)^2} \times \frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}} \simeq \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(r_0)^2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{z}\right)^2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \tag{1.31}$$

となって、普通の逆自乗則が出てくることになる。ただし、 z が有限ならば常に逆自乗則よりも弱くなる。これは直線上に分布した電荷の場合と同じである。



遠くにある円盤の作る電場は、点電荷による電場と区別がつかない。

【補足】この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでください。

ここでもベクトルを使った記法で計算する方法も書いておこう。この場合で z 方向を向いた単位ベクトルを \vec{e}_z 、 r 方向を向いた単位ベクトルを \vec{e}_r と書くことにすると、微小電荷 $\sigma r dr d\theta$ から点 P に向かうベクトルは $z\vec{e}_z - r\vec{e}_r$ と書くことができる。ベクトルで書いた電場 \vec{E} の式は、(1.12) を使って $\vec{E}(\vec{x}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}' - \vec{x}|^3}(\vec{x}' - \vec{x})$ と書ける (\vec{x} にある電荷 q が \vec{x}' に作る電場 \vec{E})。この式を使って表現すれば、ここで考えた電場 \vec{E} は

$$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{|z\vec{e}_z - r\vec{e}_r|^3} \times (z\vec{e}_z - r\vec{e}_r) \quad (1.32)$$

と書くことができる (この式では電場 \vec{E} の全ての成分をいっきに表現している)。まず \vec{e}_r に関する部分、

$$-\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{|z\vec{e}_z - r\vec{e}_r|^3} r\vec{e}_r \quad (1.33)$$

を考えることにしよう (上で考察したように、もちろんこれは 0 になるのである)。

ここで、 \vec{e}_r は定ベクトル²⁵ではないということに注意しよう。 \vec{e}_r は r の増える方向を向いたベクトルであり、これは場所によって違う。これを一周積分すると、

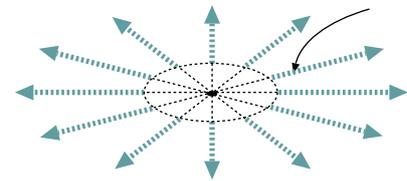
$$\int_0^{2\pi} d\theta \vec{e}_r = 0 \quad (1.34)$$

になる。図を見るとわかるように、一周積分の中で必ず逆向きの \vec{e}_r が現れて消し合うからである。(1.33) をよく見ると、分母が $|z\vec{e}_z - r\vec{e}_r| = \sqrt{z^2 + r^2}$ であることを考えると、 θ に依存する部分は \vec{e}_r しかない。ゆえにこの \vec{e}_r に比例する部分の積分は (1.34) と同じ形になっていて、0 になる。 \vec{e}_z の部分は、

$$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{|z\vec{e}_z - r\vec{e}_r|^3} z\vec{e}_z \quad (1.35)$$

であるが、この部分の積分は上で書いたのと同じ計算を行えばよい。

\vec{e}_r



【補足終わり】

²⁵「定数」と言ったら「どこでも一定値をとる数」。「定ベクトル」は「どこでも同じ長さ、同じ向きを向くベクトル」。たとえば $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ は定ベクトル。

1.6 立体角と電気力線

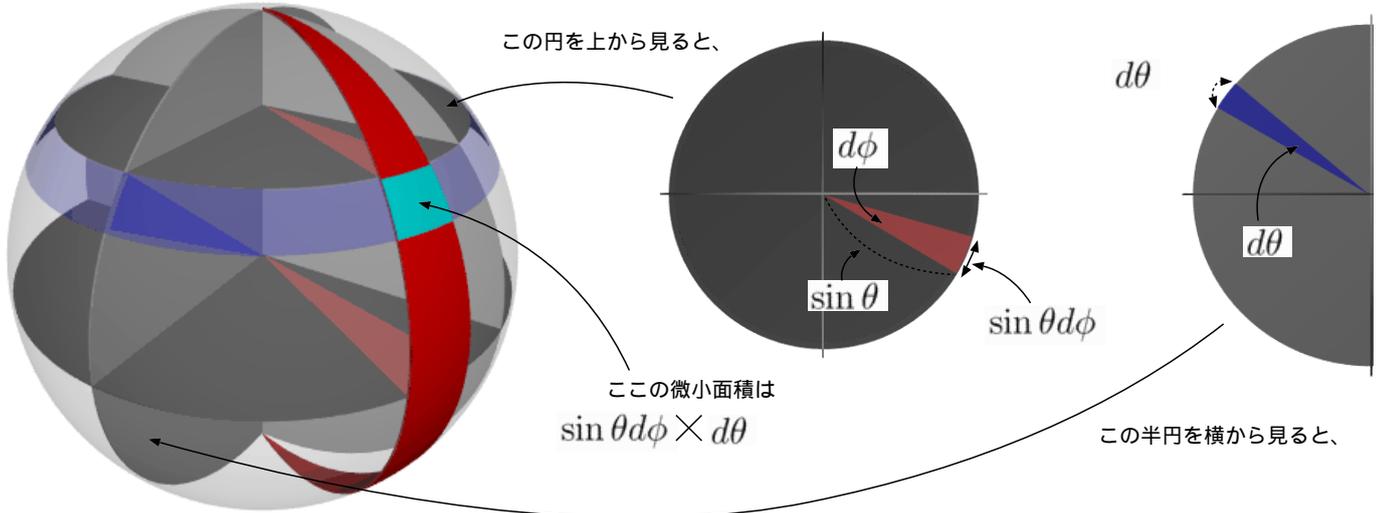
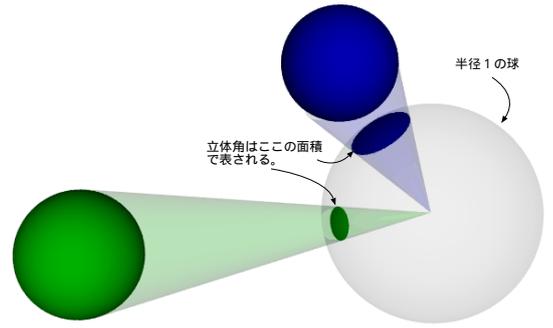
ここで、便利な概念である立体角を紹介しておこう。立体角は、ある場所から他の物体を眺めた時の「見かけの大きさ」を表す量だと思えばよい。同じ大きさのもので、遠くにあると小さく見える。それは、目から見た時に視野を占める面積が、遠いほど小さくなるからである（右の図参照）。

そこで、物の見かけの大きさを、目から見た時、目の回りに仮想的なおいた単位球（半径1の球）の表面のうちどれくらいの面積を占めているかで計算する。これが立体角である。ゆえに立体角は最大でも単位球の表面積 4π である（目から、どっちを向いてもその物体が見える場合に対応する）。単位はステラジアン（steradian）を使う。

立体角 Ω を計算するには、単位球の上での面積を計算すればいいので、考えている範囲に関して

$$\Omega = \int d\theta d\phi \sin \theta \tag{1.36}$$

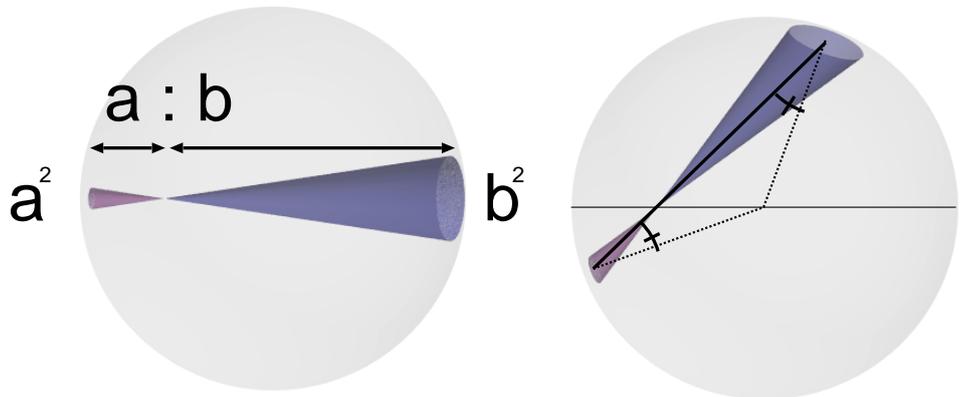
という積分を行えばよい。 $\sin \theta$ が入る理由は、下の図のようにして単位球の表面積を考えるとわかる。単位球の表面上の微小な範囲（ $\theta \sim \theta + d\theta$ 、 $\phi \sim \phi + d\phi$ ）の面積は、縦が $d\theta$ 、横が $\sin \theta d\phi$ の長方形の面積だと考えればよいのである。



目に対応する場所に電荷 Q を置いたとする。そこからは電気力線 $\frac{Q}{\epsilon_0}$ 本が出ていき、それが全方向（立体角 4π ）に広がる。ゆえに、その場所から立体角 Ω の範囲に広がっている部分には、電気力線 $\frac{Q\Omega}{4\pi\epsilon_0}$ が通る。つまり「電荷から見た立体角が同じなら、通る電気力線の本数も同じになる」ということになる。こうなるのはもちろん、点電荷の作る電場 \vec{E} が距離の自乗に反比例するという関係のおかげである。

立体角を使って「一様に帯電した球体の内側では電荷は力を受けない（すなわち、電場 \vec{E} は0である）」という関係を図形的に証明しよう。

球体の内部のある点から左右にむいた微小立体角の視野を考える（図の円錐である）。この立体角内に入る電荷の量を考える。球は一様に帯電しているのであるから、この円錐の底面に含まれている電気量は、距離の自乗に比例する。ところが、この電気の作る電場 \vec{E}



は距離の自乗に反比例して減衰する。よって、この二つの（互いに反対側の立体角に位置している）電荷量による電場 \vec{E} はちょうど打ち消し合うことになる。

左図のように一直線の場合はそれでいいが、右図のように斜めになっている場合でも大丈夫だろうか？—考えている面が視点から見ると傾いた面になるので、その分中に入っている電荷の量が増えそうである。ありがたいことに、図のようにちょうど正反対側の立体角どうしを比べると、傾きは同じになる（図に描いた三角形が二等辺三角形であることに注意！）。同じ立体角でも斜めになっているとその立体角内に入っている電荷の量はその分多くなるのだが、反対側でも同じだけ大きくなるので、「反対側の立体角上に配置された電荷による電場 \vec{E} どうしはちょうど消し合う」という関係は保たれる。逆自乗則が成り立っていればこそ、これが成立することに注意しよう。

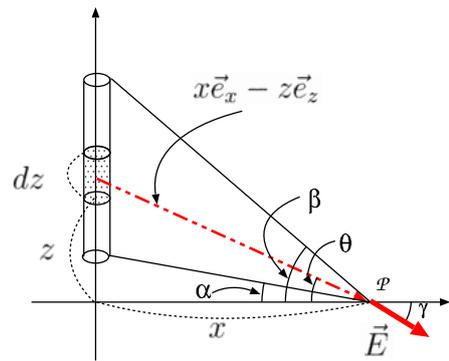
1.7 章末演習問題

【演習問題 1-1】(1.36) を球面全体について行えば（すなわち、 θ を $[0, \pi]$ 、 ϕ を $[0, 2\pi]$ で積分すれば）、答が単位球の表面積 4π になることを示せ。

【演習問題 1-2】1.5.1 節で有限長さの線に一樣に分布した電荷による電場 \vec{E} を計算した。

その時の状態から、棒の位置を z 軸方向に平行移動させた。棒の位置を表すパラメータとして、図のように角度 α, β を設定する。全ての電荷による電場の和を考えて（積分して）、この場合の電場 \vec{E} を（ベクトル式で）求めよ。

電場 \vec{E} が図の水平となす角 γ は α と β のちょうど中間 $(\frac{\alpha + \beta}{2})$ であることを示せ。



【演習問題 1-3】半径 R の細い（太さが無視できる）リングに、単位長さあたり ρ の一樣な密度で電荷が与えられている。リングの中心から真上に z 離れた位置での電場 \vec{E} の強さを計算せよ。

【演習問題 1-4】

半径 r の球の表面に、一樣な電荷密度 σ （単位面積あたり）の電荷が分布している。球の中心から z 離れた場所での電場 \vec{E} を求めよ。

結果は、球の中心に全電荷が集中したのと同じ結果になる。そのことを確認せよ。

また、 $z < r$ の場合（つまり、球の内側）ではどうなるか？

ヒントその1：この場合、 z 方向以外の電場 \vec{E} は0になるので、 z 方向だけを求めればよい。

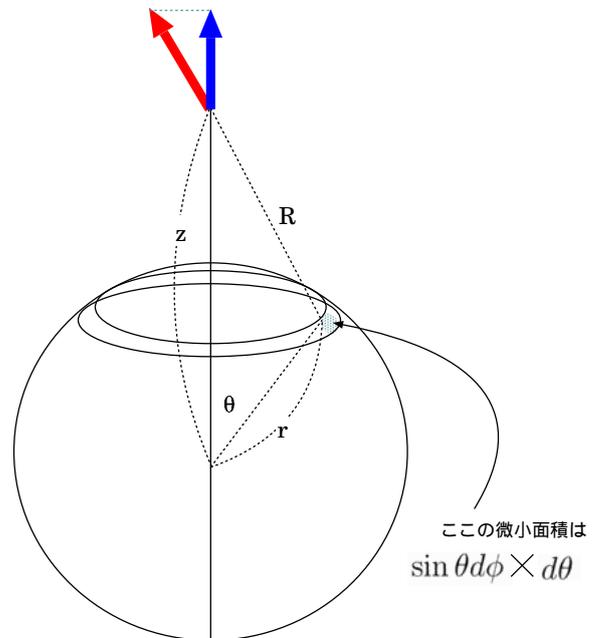
ヒントその2：図の R は $\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}$ である（余弦定理）。

ヒントその3：微小面積に入っている微小電荷 $\sigma r^2 \sin \theta d\phi d\theta$ が作る電場 \vec{E} の z 成分を求めて積分すればよい。

ヒントその4： $\int_0^\pi F(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ という積分が出てきたら、 $\cos \theta = t$ と置くのが定番である。

【演習問題 1-5】前問で、電荷が球面のみではなく、球全体に詰まっている場合はどうなるか？

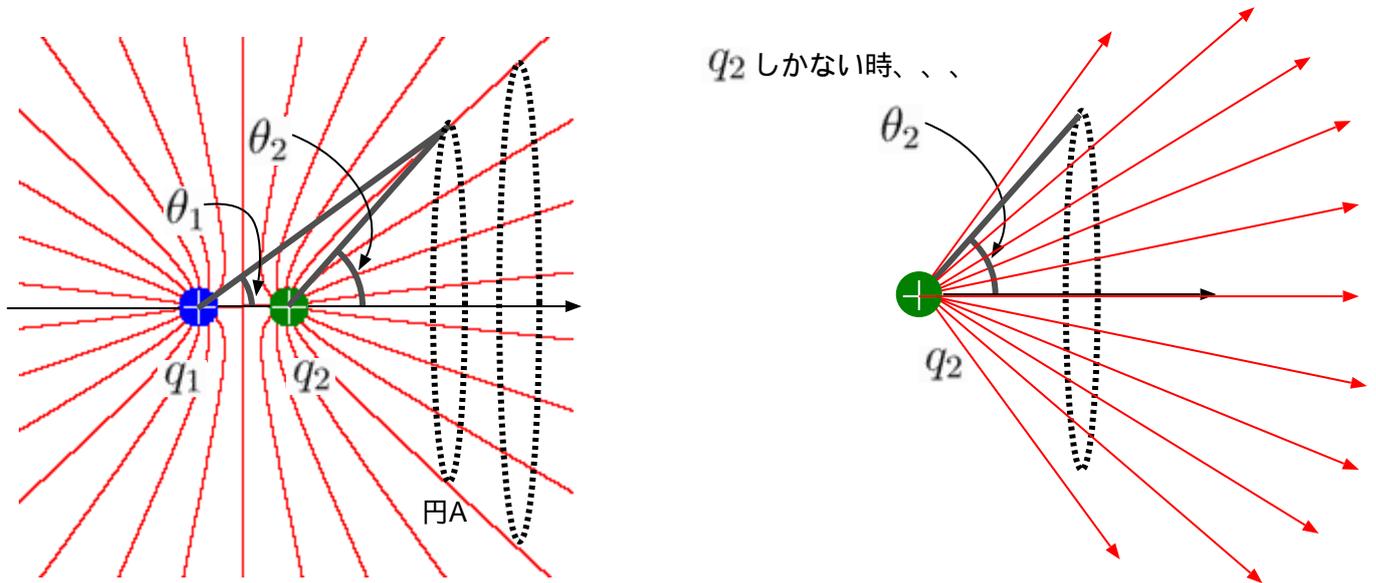
今度は ρ を単位体積あたりの電荷密度として計算してみよ。



【演習問題 1-6】図のように二つの電荷がある。この空間内の一本の電気力線を考えると、その線上では、

$$q_1 \cos \theta_1 + q_2 \cos \theta_2 = \text{一定} \tag{1.37}$$

という式が成立している。ただし、 θ_1, θ_2 は二つの電荷を結ぶ直線と、電荷から電気力線上の 1 点を結ぶ直線のなす角である。



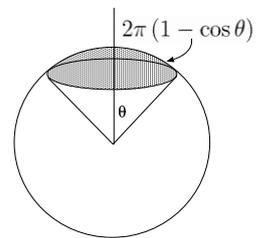
この式を、以下のように考えて導出せよ。

(1) 図の円 A を考える。A を通っている電気力線に沿って、A を二つの電荷から遠ざけていく。電気力線に沿って半径を大きくしながら遠ざけるので、円の中を通っている電気力線の本数は変化しない(「電気力線は交わらない」ことを思い出せ)。

(2) 円 A を通る電気力線の本数を、重ね合わせの原理から求めよう。電荷 1 しかなかったとした時の円 A を通る電気力線の本数と、電荷 2 しかなかったとした時の電気力線の本数をそれぞれ計算し、和をとればよい。

(2') その計算には、右図のように北極から角度 θ までの範囲は中心から見ると立体角にして $2\pi(1 - \cos \theta)$ になるということを使う。

(3) 円をいかに動かしても電気力線の本数が一定である、ということから、 $q_1, q_2, \theta_1, \theta_2$ の間にはどんな関係があるか、求めよ。



【演習問題 1-7】 1.5.2 節で計算した円状の電荷による電場 \vec{E} の式は $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}(1 - \cos \phi_0)$ であったが、この式は

$$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \times (\text{点 } P \text{ から円盤を見た時の立体角}) \tag{1.38}$$

と表現することができる。なぜこうなるのか?—理由を考察せよ。

ヒント: 二つの点を考察しなくてはいけない。

- (1) 電場 \vec{E} が距離の自乗に反比例すること、一方同じ立体角を占める面積は距離の自乗に比例すること。
- (2) 同じ立体角に含まれている部分でも、視線に対して斜めになっていると中に含まれる電荷量は多くなること、一方斜め方向にある電荷のつくる電場 \vec{E} は z 方向を向かないので、 z 方向を計算する時には射影することが必要であること。

この二つの効果をうまく考えれば、ここに立体角が出てくる理由がわかるはず。

第2章 ガウスの法則と電場 \vec{E} の発散

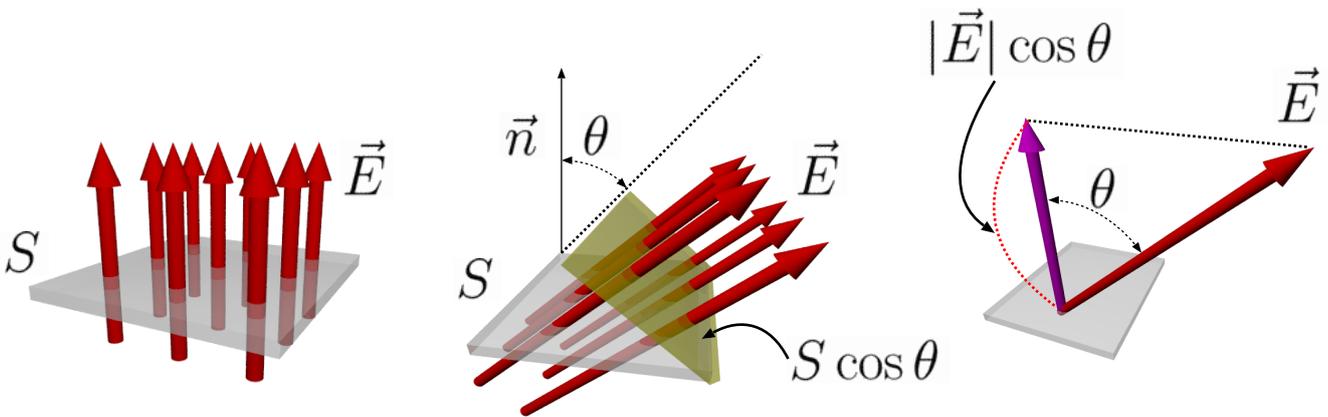
2.1 ガウスの法則

前の章では、電場 \vec{E} の図的表現として電気力線を導入し、その性質を求めた。これらの性質は非常に有用である。なぜなら、これを使って電荷分布から電場 \vec{E} を求めることができるのである。たとえばこの性質だけから逆にクーロンの法則を導き出すことができることは既に示した。もともとクーロンの法則に合うように電気力線の性質を定義したのだから当然といえば当然であるが、ここで大事なことは、この新しい考え方は応用範囲が広いということである。これを使って電場 \vec{E} を求めることが比較的簡単にできる。そのためのたいへん便利な法則が「ガウス (Gauss) の法則」である。ガウスの法則の基本的な内容は、実はすでに紹介している。ガウスの法則は数学的に表現されるものであるが、これを図形的に表現すれば、「電気力線は途切れない、枝分かれしない」ということに他ならないのである。

2.1.1 電気力線の流量 (flux) の保存

原点にある点電荷 Q の作る電場 \vec{E} を $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ と書こう。原点を中心とした半径 R の球 (表面積は $4\pi R^2$) を貫く電気力線の本数は、球の半径によらず $\frac{Q}{\epsilon_0}$ となった。また、電荷から離れた位置にある無限平面を貫く電気力線は、電荷と面との距離によらず $\frac{Q}{2\epsilon_0}$ (電荷から出た電気力線のうち半分) であった。

ここで、「電気力線の密度が電場 \vec{E} の強さ」という点をより正確に述べておく。電気力線に対して垂直な仮想的な面を考える。この面を貫いていく電気力線の本数を数え、この面の面積で割る。すると電場 \vec{E} の強さとなる。考えている面積が電場 \vec{E} と垂直ではない場合も考えると、単純に「本数 ÷ 面積」とやったのでは電場 \vec{E} とは一致しない。

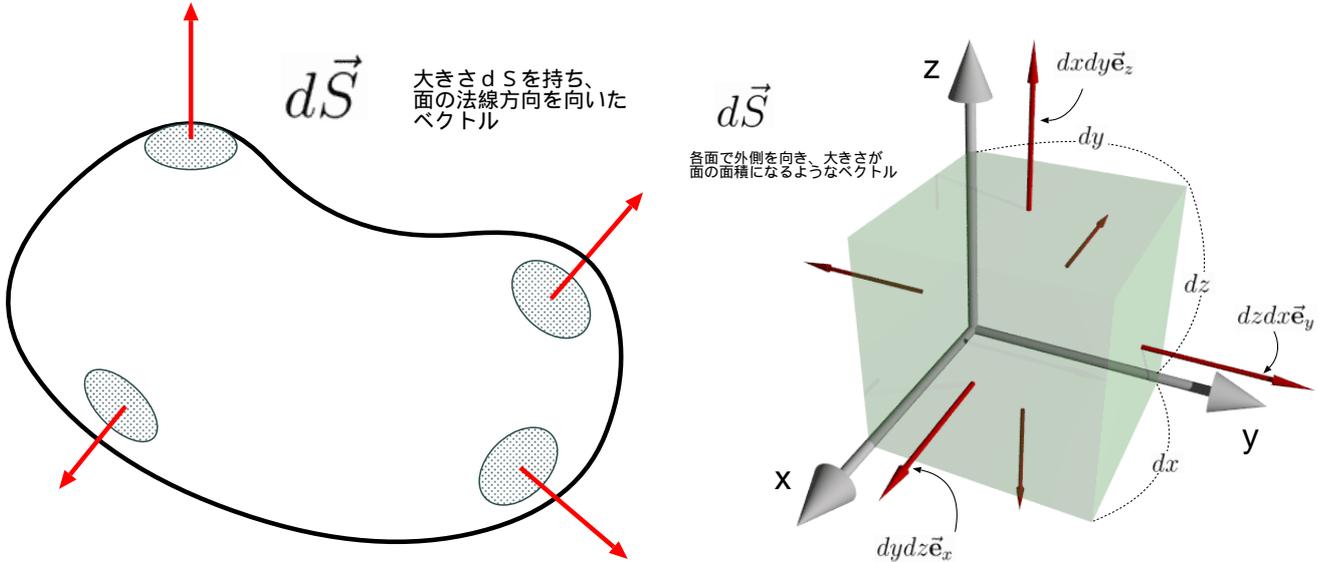


図のように、電気力線に対して斜めになっているような面積を考えた時、電気力線の本数は電場 \vec{E} の強さを $|\vec{E}|$ 、面積を S とすると、 $|\vec{E}|S \cos \theta$ となる。 θ は面の法線ベクトル (図の \vec{n}) と電場 \vec{E} のなす角である。このような式になる理由は (中央の図のように)「今着目している面積は S だが、電気力線と垂直な面積で考えると $S \cos \theta$ になる」と考えてもいいし、(右の図のように)「電場 \vec{E} のうち、着目している面積と垂直な成分 $|\vec{E}| \cos \theta$ だけが関係するから」と考えても良い。

$|\vec{E}|S \cos \theta$ は、「電気力線の本数は $\vec{E} \cdot \vec{n}S$ である」と、内積を使って表現することもできる。さらには、 $\vec{n}S$ をまとめて \vec{S} という「面積ベクトル」として書いて、 $\vec{E} \cdot \vec{S}$ とする場合もある。面積ベクトルはその大きさが考えている面積であり、向きはその面積の法線方向となる¹。

¹法線方向というだけでは表から裏か裏から表かは指定されていない。実際に面積ベクトルを定義する時にはそこも厳密に決めてから計算しないといけない。通常は、領域内から領域外へと出る方向に面積ベクトルを向ける。

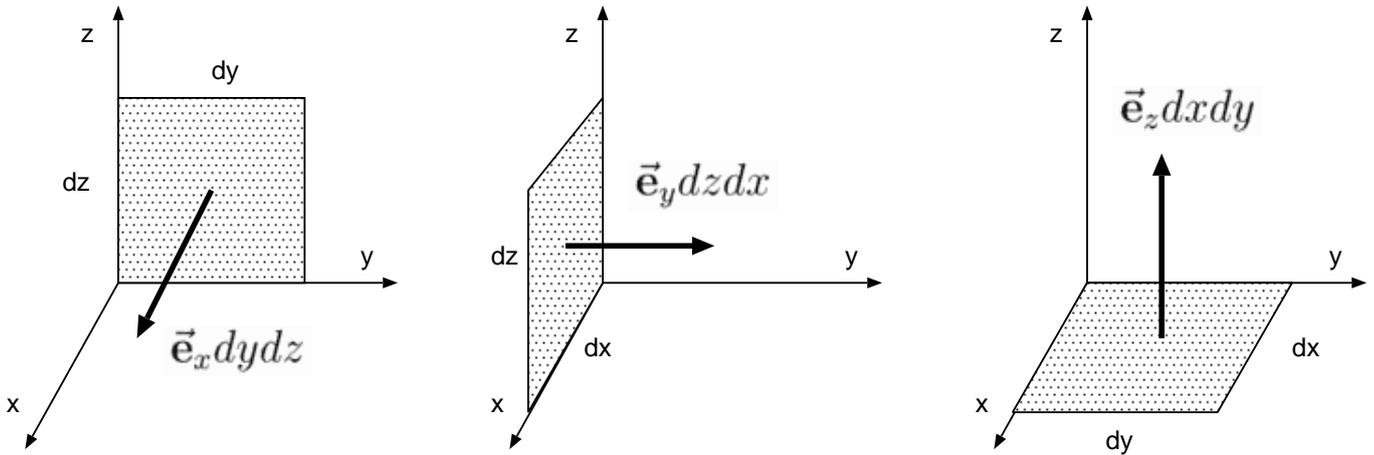
以下ではまず、球面ではない任意の閉曲面²に対して、貫く電気力線の本数が $\frac{Q}{\epsilon_0}$ となることを確かめよう。



まず任意の曲面に対して「貫く電気力線の本数」は既に述べた通り、

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \vec{E} \cdot \vec{n} dS \tag{2.1}$$

で計算される量である。積分は、今考えている面全体に対してなされる。 \vec{n} はその面における「外」を向いた規格化された法線ベクトルである。



$\vec{n}dS$ をまとめて $d\vec{S}$ と書く。たとえば \vec{n} が x 軸方向を向いているなら、それに垂直な平面は yz 面であるから、その時 $dS = dydz$ となる。同様に \vec{n} が y 軸向きなら $dS = dzdx$ 、 z 軸向きなら $dS = dxdy$ である³。

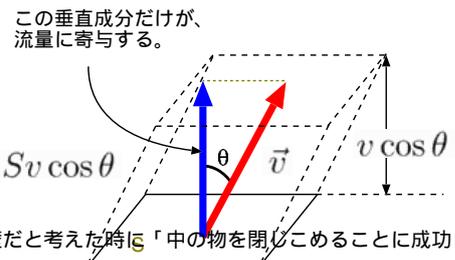
被積分関数は \vec{E} と $d\vec{S}$ の内積になっているので、 \vec{E} と \vec{n} のなす角を θ とすれば、 $|\vec{E}| \cos \theta$ を積分することになる (\vec{n} の長さは1であることに注意)。

上の式にあるような $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ で計算される量のことを、面を通る「流量 (flux)」、「流束」と書く場合もある) と表現する。

この計算自体は流体が流れていく時に微小面積を単位時間に通り返けていく流体の量を計算する式

$$\rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \tag{2.2}$$

に非常によく似ている。この場合も、図の流れベクトルのうち、面に垂直な成分だけが「流れ出す量」に関係する (もし流れが面に平行なら、何も流れ出さない) ため、 $\cos \theta$ がかけられてる。図に書かれた平行六面体は、単位時

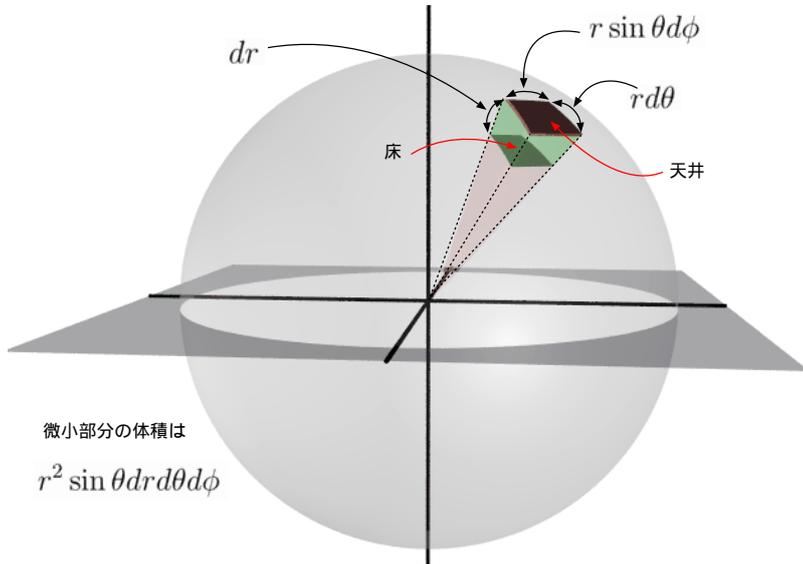


²閉曲面とは、その曲面によって空間が二つに分断されているような曲面のこと。その曲面が壁だと考えた時に「中の物を閉じこめることに成功している曲面」と考えればよい。

³一般の方向を向いている時は、 $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ (ただし、 $(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2 = 1$ を満たす) とすれば、 $d\vec{S} = n_x dydz \vec{e}_x + n_y dzdx \vec{e}_y + n_z dxdy \vec{e}_z$ と書かれる。

間にこの面積 S を通り抜けた流体を表す。この平行六面体の体積 $Sv \cos \theta$ に流体の密度をかけたものが単位時間の流量である。

電場 \vec{E} の場合の flux ($\vec{E} \cdot d\vec{S}$) はその面を通り抜ける電気力線の本数を意味する。電場 \vec{E} 自体は何かは流れているわけではないが、同様の式が使えるというわけである。

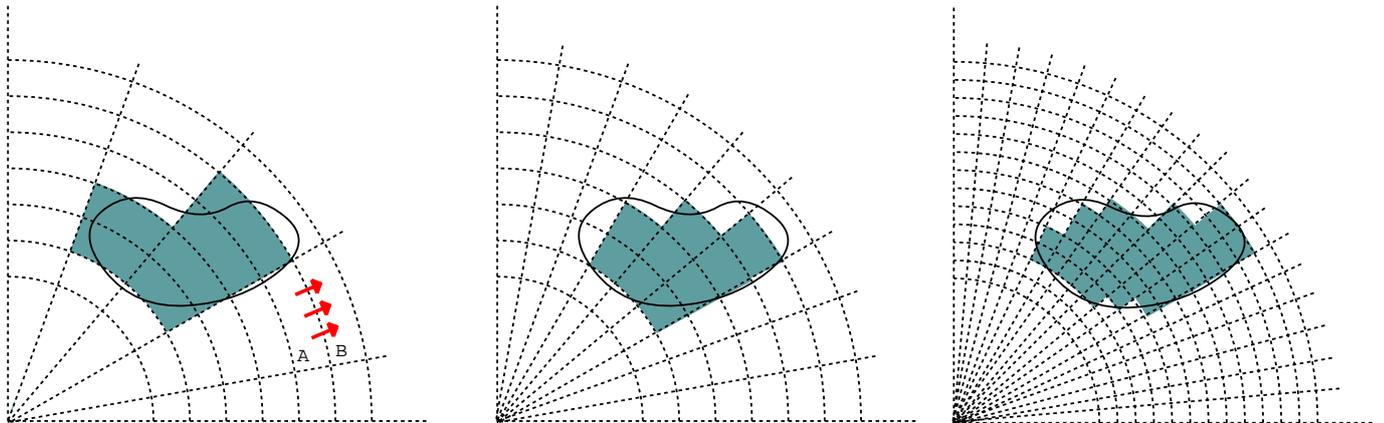


任意の曲面で考えるための準備として、まず左図のような微小部分について考えよう。座標原点に電荷があるとすると、この微小部分に外から貫く電気力線と、中から貫く電気力線の本数はちょうど同じになる。この微小部分には6つの面があるが、床と天井にあたる場所以外は、電気力線は入ってこないし出ていかない(電場 \vec{E} は常に r 方向を向いている)。

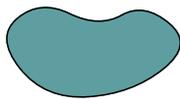
床から入ってくる電気力線の本数は $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ であり、天井から抜けていく電気力線の本数は $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r+dr)^2} \times (r+dr)^2 \sin \theta d\theta d\phi$ となる。この二つはちょうど同じなので、結局この微小体積の表面で $\int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ を計算すれば0になるということになる。

例によって物理の常套手段である「細かく区切って考える」を使うと、任意の曲面に関

しても $\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ が成立していることが言える。なぜなら、この微小体積を「ブロック」としてくみ上げていけば、任意の形の曲面に囲まれた図形を作ることができるからである。



上の図は、その状況を次元を一つ落として平面図で表したものである。ブロック A から出る電気力線(図では3本の矢印で書いてある)は同時に、ブロック B に入る電気力線でもある。よって、今ここで定義したように、「考えている範囲から出る電気力線の正味の数 = 考えている範囲から出る電気力線の本数 - 考えている範囲に入る電気力線の本数」⁴を計算して足し算していくと、結局今考えている部分の外側での電気力線だけが計算結果として残ることになる。今本



当に計算したいのは から出る電気力線の flux であるが、それは小さいブロックから出る正味の電気力線を次々計算して足していったものと同じになる(もちろん、ブロックをどんどん小さくしていった極限でのことである)。ところが小さいブロックを通る電気力線の正味の数は0なのだから、全体を通る電気力線の正味の数も(たくさんの0を足した結果だから)結局0となる。

つまり、ブロックのくみ上げを行う時に、内部に電荷を含まないように組み立てることにすれば、ブロックから出る電気力線の総量は0になる(入ったものは必ずどこから出る)ので、 $\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ となる。

⁴このようにして、出る量から入る量を引いたものを「正味の量」という言い方をします。「正味の」とつくくと、「出たり入ったりするけど、入る量はマイナスにして足すという約束だからね」ということを意味する。

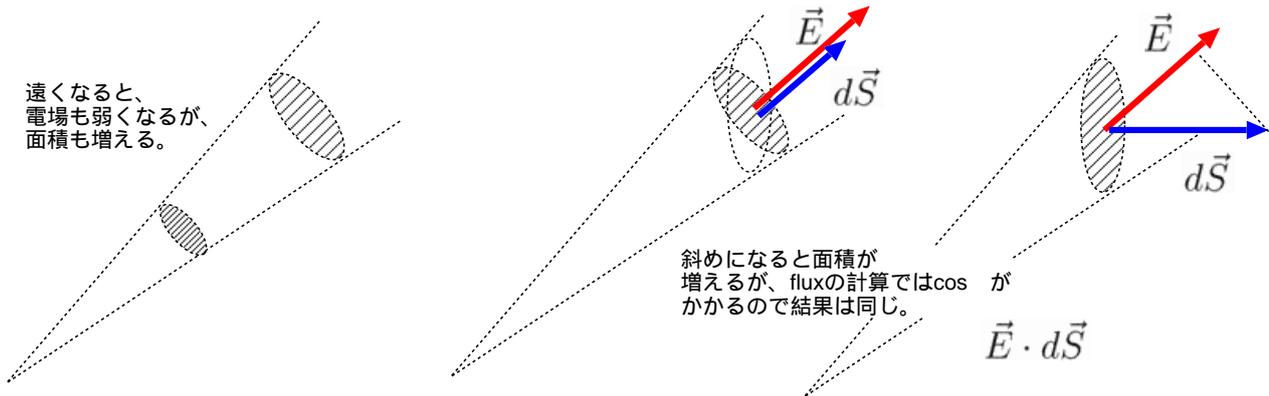
内部に電荷を含むブロックについてだけ出る電気力線の正味の本数0ではなく $\frac{Q}{\epsilon_0}$ であるから、 $\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ となる。これは任意の形の面について正しい。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

2.1.2 立体角から考えるガウスの法則

先に説明した立体角の考え方からガウスの法則が成立することを説明することができる。今度は電荷を原点に置いて、原点を囲むように任意の閉曲面を設定する。

この閉曲面の上で $\int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ を計算してみるわけだが、点電荷が原点にのみあるとすると、原点から見て同じ立体角を占める部分を通る電気力線の本数は、形によらず一定である。



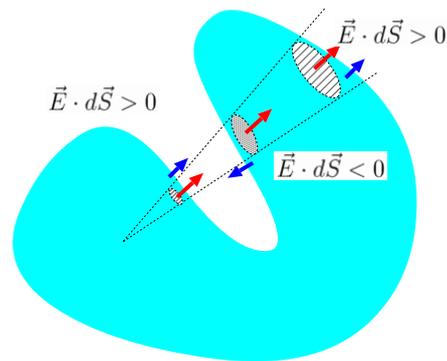
これは電気力線の flux が保存するという性質からももちろんわかるし、

- ・ 電場 \vec{E} は距離の自乗に反比例して減少し、同じ立体角に含まれる面積は距離の自乗に比例して増大する。
- ・ 電場 \vec{E} と考えている面積要素の法線ベクトルが傾いていると、同じ立体角に含まれる面積は増える。しかし電気力線の本数を計算する時には、その傾き角度を θ とした時の $\cos \theta$ がかけられる。

という二つの事情を考えると、原点に電荷がある時に原点から見て同じ立体角の方向にある場所からに抜け出していく電気力線の本数は等しくなる。

考えている閉曲面が複雑で、同じ電気力線が何度も出たり入ったりするような場合もありえる（右の図を参照）。

右の図の場合だと、上の計算で「同じ立体角に含まれる面積」とした場所が3カ所現れることになりそうである。しかし、fluxの定義に現れた $d\vec{S}$ は閉曲面図形で必ず「外」（もしくは、「裏から表」）を向いている。そのため、3カ所のうち一カ所に関しては $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ が負になって、3つあるが正味の量は1個分、ということになる。よって複雑な面であっても、ガウスの法則が成立すると結論できる。



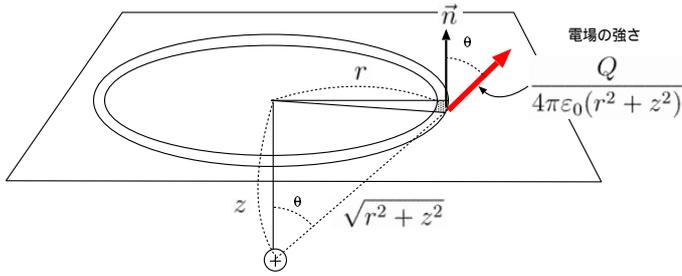
2.2 具体的計算でガウスの法則を確認する

念のために、実際に積分計算をしてもガウスの法則が成立していることを確認しておこう。もちろん先の証明が信用できないというわけではなく、あくまでも「念のために」である（計算の練習にもなる）。

既に行った計算として、1.4.2 節の後半で、無限に広い平面を通る電気力線の本数が $\frac{Q}{\epsilon_0}$ になったのも、ガウスの法則が成立していることを示している。

ここで、考えている面積と電場 \vec{E} が垂直とは限らない場合の計算練習をしておこう。たとえば点電荷の上に無限に広い平面を考えて、その平面を貫く電気力線を計算するとする。もちろん答は $\frac{Q}{2\epsilon_0}$ となる（電荷 Q が出した電気力線のうち、半分が通る）はずである。

これを積分で考えるために、図の微小面積 $rdrd\phi$ を貫く電気力線を考える。



電場 \vec{E} は $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(r^2+z^2)}$ の強さであるが、向きは面に垂直ではなく、図で示した角度 θ だけ傾いている。ゆえにこの微小面を貫く電気力線の本数は

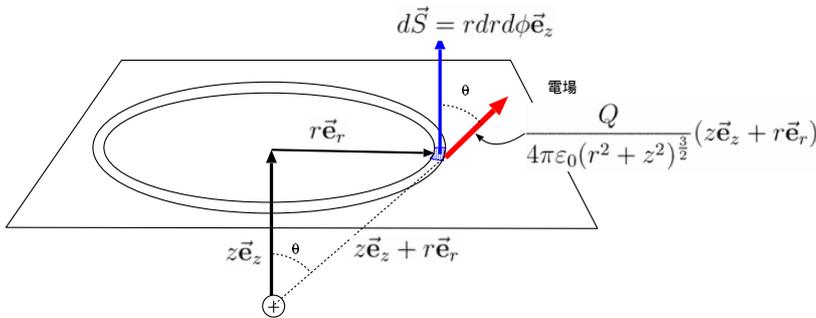
$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(r^2+z^2)} \times r dr d\phi \times \cos\theta \quad (2.3)$$

となる。これを積分していくわけであるが、この場合 θ が r の関数なので、 r を θ で表して $r=0$ から $r=\infty$ まで積分するか、 r を θ で表して $\theta=0$ から $\theta=\frac{\pi}{2}$ まで積分するか、どっちかにしなくてはならない。

$r = z \tan \theta$ であることがわかるので、 $dr = z \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$ として

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cos^2 \theta \times \tan \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} d\phi \times \cos \theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\phi d\theta \sin \theta \quad (2.4)$$

となつて、 $\int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta = 1$ と $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$ より、 $E = \frac{Q}{2\epsilon_0}$ という、予想どおりの結果を得る。



なお、もう一つの計算法として、図のようにベクトルを考えて、

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} (r\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \quad (2.5)$$

とする方法もある。微小面積に対する面積ベクトルは $d\vec{S} = r dr d\phi \vec{e}_z$ であるから、これと内積をとって、

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} z r dr d\phi \quad (2.6)$$

となり、あとは ϕ と r の積分を行えばよい。 ϕ 積分は単純に 2π を出すだけであり、 r 積分は $r^2 = t$ とおいて、 $2r dr = dt$ を代入するという方法で積分できる。実行すると、

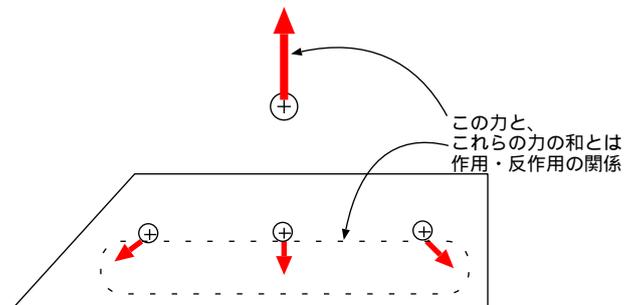
$$\begin{aligned} \int_{\text{全平面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \underbrace{r dr}_{=\frac{1}{2} dt} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} z \\ &= \int_0^{\infty} dt \frac{Q}{4\epsilon_0(t+z^2)^{\frac{3}{2}}} z \\ &= \left[-2 \frac{Q}{4\epsilon_0(t+z^2)^{\frac{1}{2}}} z \right]_0^{\infty} = \frac{Q}{2\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる。計算結果はもちろん一致する。

ところで、この計算をよく見ると、1.5.2 節で円盤の上に一様に分布した電荷が作る電場 \vec{E} を考えた時と全く同じ計算をしていることに気づく。

一方は面上の電荷が点電荷に及ぼす力（実際に計算したのは電場 \vec{E} であるが、つまりは単位電荷に働く力である）を計算し、もう一方は点電荷が面上の電荷に及ぼす力を計算している（こちらは実際に計算したのは電気力線の総本数であるが、それは電場 \vec{E} の垂直成分を足しているのと同じ）。クーロン力に関しても作用・反作用の法則が成立するので、実はこの二つは互いに作用・反作用を計算しているのだと考えてよい。似たような計算になるのはある意味当然なのである。

なお、静電場においては作用・反作用の法則が成立するが、静電場でない場合は必ずしもそうではない。作用・反作用の法則は運動量保存則と結びついている。実は電場や磁場にも運動量がある。静電場の場合、電場の持つ運動量が変



化しないので、安心して電荷など電場以外の物体について運動量保存則が使える（ということは、作用・反作用の法則が使えるということ）。しかし、電場や磁場が時間変動する場合、電場の持つ運動量が時間変動するので、電荷だけを見ても運動量が保存しないのである⁵。ゆえにこの時は作用・反作用の法則が成立してないように見える。

2.2.1 中心からずれた位置に電荷が位置する場合

仮想的球の中心に電荷 Q がある場合については計算したが、中心からずれた場所にある場合はどうだろうか？

図のように定ベクトル \vec{a} だけ電荷の位置が中心よりずれているとする。この時、電荷から図の微小面積へと向かうベクトルは $r\vec{e}_r - \vec{a}$ である（ \vec{e}_r は、今考えている場所において r が増加する方向を向いている単位ベクトル）。また、この場所の $d\vec{S}$ は $r^2 \sin\theta d\theta d\phi \vec{e}_r$ と書ける（法線の向きは r の増加する方向である）。

よってこの微小面積 $r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ をつらぬく電気力線は

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |r\vec{e}_r - \vec{a}|^3} \times (r\vec{e}_r - \vec{a}) \cdot \vec{e}_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.8)$$

となる。 $\vec{e}_r \cdot \vec{a} = a \cos\theta$ (a は \vec{a} の長さ) であることに注意して、

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2 - 2ar \cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \times (r - a \cos\theta) r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.9)$$

と書き換えてから積分をしよう。こういう時の定番として、 $\cos\theta = t$ とおくと、 $-\sin\theta d\theta = dt$ となる。 θ の積分範囲が $(0, \pi)$ だったので、 t の積分範囲は $(-1, 1)$ である。積分範囲をひっくりかえすことで $-\sin\theta d\theta$ のマイナス符号をとることにすれば⁶、

$$\frac{Qr^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 dt \int_0^{2\pi} d\phi \frac{r - at}{(r^2 + a^2 - 2art)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.10)$$

という積分をすればよい。 ϕ 積分は定数 2π を出すだけで終わる。 t 積分はもちろんまじめにこつこつやってもできるのだが、

$$\frac{r - at}{(r^2 + a^2 - 2art)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{-1}{(r^2 + a^2 - 2art)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (2.11)$$

と置き換えて計算すると早い⁷。 t で積分するのと r で微分するのは順番を変えてよいので、

$$\frac{Qr^2}{2\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_{-1}^1 dt \frac{-1}{(r^2 + a^2 - 2art)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (2.12)$$

とする。積分 $\int_{-1}^1 dt \frac{-1}{(r^2 + a^2 - 2art)^{\frac{1}{2}}}$ は

$$\int_{-1}^1 dt \frac{-1}{(r^2 + a^2 - 2art)^{\frac{1}{2}}} = \left[\frac{1}{ar} (r^2 + a^2 - 2art)^{\frac{1}{2}} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{ar} \left(\sqrt{(r-a)^2} - \sqrt{(r+a)^2} \right) \quad (2.13)$$

となる。

r, a はどちらも正であるから、 $\sqrt{(r+a)^2}$ は常に $r+a$ となるが、 $\sqrt{(r-a)^2}$ の方は $r > a$ なら $r-a$ となり、 $r < a$ なら $a-r$ となる。

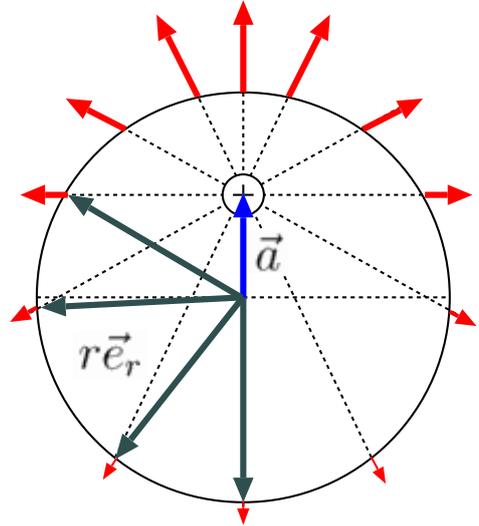
結局この積分の結果は $r > a$ なら $\frac{1}{ar} (r-a - (r+a)) = \frac{-2}{r}$ となり、 $r < a$ なら $\frac{1}{ar} (a-r - (r+a)) = \frac{-2}{a}$ となる。

(2.12) を見ると、後はこれを r で微分してから、 $\frac{Qr^2}{2\epsilon_0}$ をかければよい。結果は $r > a$ なら $\frac{Q}{\epsilon_0}$ 、 $r < a$ なら 0 となる。つまり、電荷が外にあるなら電気力線の総本数は 0、内にあるなら $\frac{Q}{\epsilon_0}$ ということが確認できたわけである。

⁵電場や磁場の運動量まで含めて考えれば、どんな場合でもちゃんと保存する。

⁶以上をまとめて、 $\int_0^\pi \sin\theta d\theta \rightarrow \int_{-1}^1 dt$ と覚えておこう。頻繁に使う。

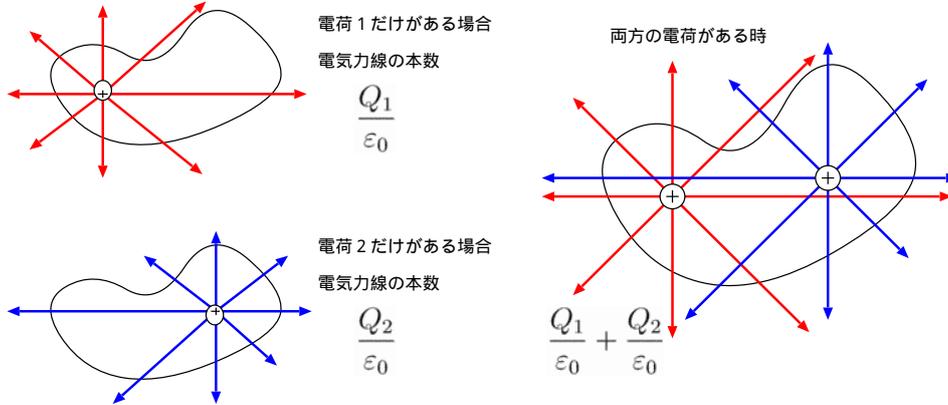
⁷この置き換えにはちゃんと物理的意味がある。



以上、代表的な例についてガウスの法則の成立を確認したが、もちろんガウスの法則はちゃんと成立しているのだから、今後は念のための確認などは不要である。どんどん使っていこう。

【補足終わり】

2.3 複数および連続的な電荷が存在する時のガウスの法則



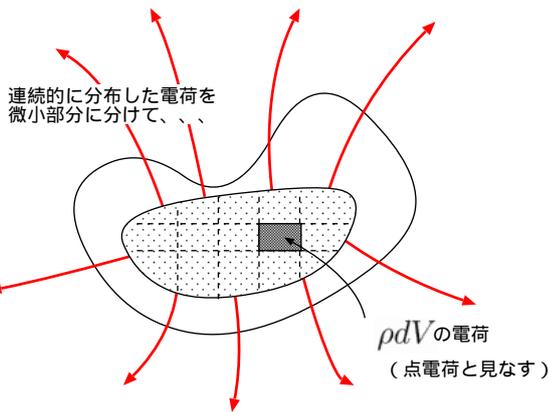
ここまでの説明は一個の点電荷の作る電場 \vec{E} に対するものであった。しかし電場 \vec{E} には重ね合わせの原理が成立するのだから、複数個の電荷の作る電場 \vec{E} であっても、

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{内部}} Q_i \quad (2.14)$$

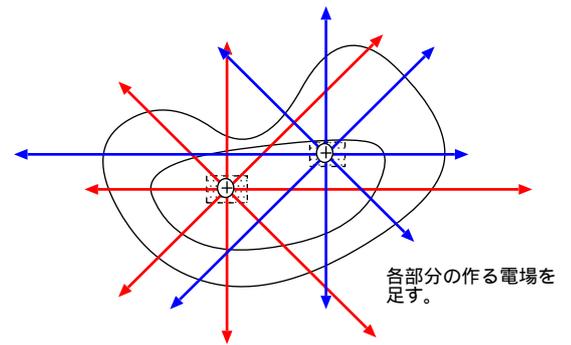
が成立することが言えるだろう。考える領域は閉曲面に囲まれてさえいればどんな形でもかまわない。

点電荷がぽつぽつとあるのではなく、連続的に電荷が存在してい

る場合は、



各部分が $\frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ の電場を作る。



のように考えることができるので、

ガウスの法則の積分形

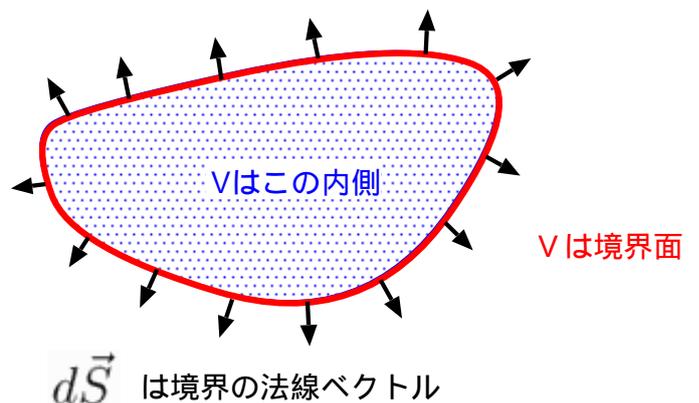
$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (2.15)$$

というふうに式で書くことができる。

右辺の積分記号の下についている V は「一つの領域」を示し、 ∂V は「一つの領域の境界となっている閉曲面」を示す。微分記号である ∂ を使うのは、「 V を増加させた時に増える部分」というイメージで理解しよう。領域 V を風船のように考えて、風船に息を吹き込んだ時に膨れていく場所と膨れていく方向を示しているのである。

閉曲面の積分においては、 $d\vec{S}$ は領域の外を向くベクトルとして定義する。図のように面から生えるように、外へ外へと向かうベクトルとなる。左辺はこのベクトルと電場 \vec{E} の内積をとって、全閉曲面分の和をとる（積分する）。

右辺は、一個一個の微小領域に $\rho dx dy dz$ の電荷が存在していると考えて、その微小領域内の電荷の影響を足し上

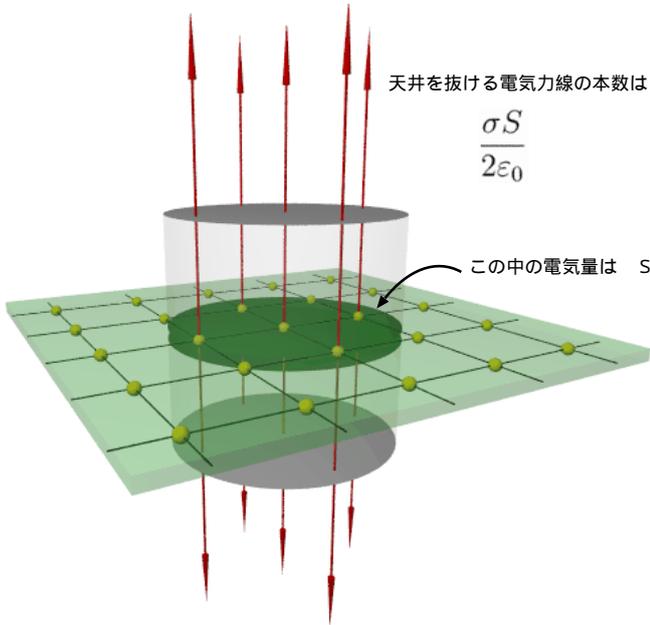


げていると考えればよい。

以下で連続的な分布の場合について練習しよう。

2.3.1 面上に広がった電荷による電場 \vec{E}

無限に広い平面 ($z = 0$ で表される xy 平面に一致させよう) の上に電荷が面積密度 σ で分布している。つまり、平面上の微小面積 S の上に電荷 σS が存在している。この平面から z だけ離れた場所 (座標で表現すると、 $(0, 0, z)$) での電場 \vec{E} を計算してみよう。



この場合、無限に広い平面に一樣に電荷が分布しているので、電気力線 (あるいは電束) はすべて z 軸に平行な向き (xy 平面に垂直な向き) を向くだろう。逆に x 方向や y 方向の電場 \vec{E} があったら対称性を破ることになって変である。電気力線が常に z 方向を向くということは、電場 \vec{E} の向きのみならず、強さとも場所によらないということになる。そのことは、図を描いてみると (電気力線は途切れたり増えたり減ったりしないのだから) 電気力線密度がどこでも一定であることから納得できるだろう。

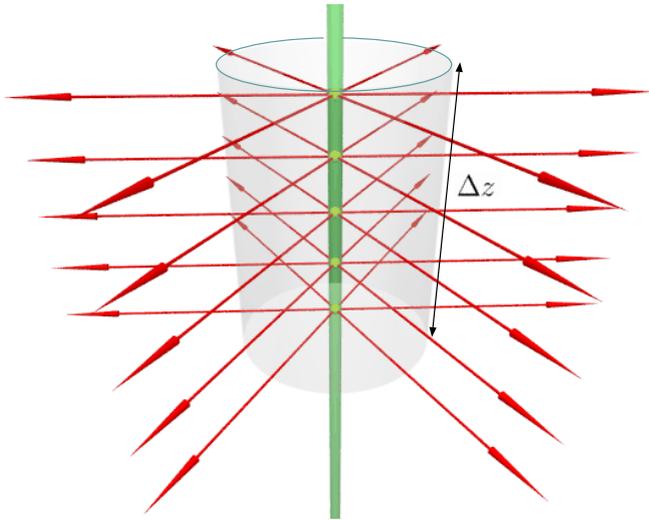
今この無限に広い平面のうち、適当な面積 S (図では円とした) を取り出して考えると、この面積を含む円筒を抜け出す電気力線の本数は全部で $\frac{\sigma S}{\epsilon_0}$ である。これが上と下 (天井と床) から均等に抜け出すので、天井を抜ける電気力線は $\frac{\sigma S}{2\epsilon_0}$ となり、これを天井の面積 S で割れば、電場 \vec{E} の強さが $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ であることがわかる。これは、1.5.2 節で計算した半径 r_0 の円盤による電場 $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(r_0)^2} \times \frac{\sqrt{z^2 + (r_0)^2} - z}{\sqrt{z^2 + (r_0)^2}}$

において、 $Q = \pi(r_0)^2\sigma$ と置いた後に $r_0 \rightarrow \infty$ の極限をとったものと同じである。あるいは演習問題 1-7 で考えた電場 \vec{E} の式 $\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \times (\text{点 } P \text{ から円盤を見た時の立体角})$ で、立体角に 2π を代入したのと同じである。当たり前のことではあるがガウスの法則による結果と具体的に積分を行った場合の結果は等しい。

なお、無限に広いわけではない面の場合、当然遠ざかるほど電場 \vec{E} は弱くなることになる。しかしその場合でも、面に非常に近いところだけを考えるならば、 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ という関係は保たれている。

2.3.2 一様に帯電した無限に長い棒

1.5.1 節で考えた帯電した棒の長さを Δz にしてみる。このように対称性がある時は、ガウスの法則を使うと非常に簡単に電場 \vec{E} を求めることができる。



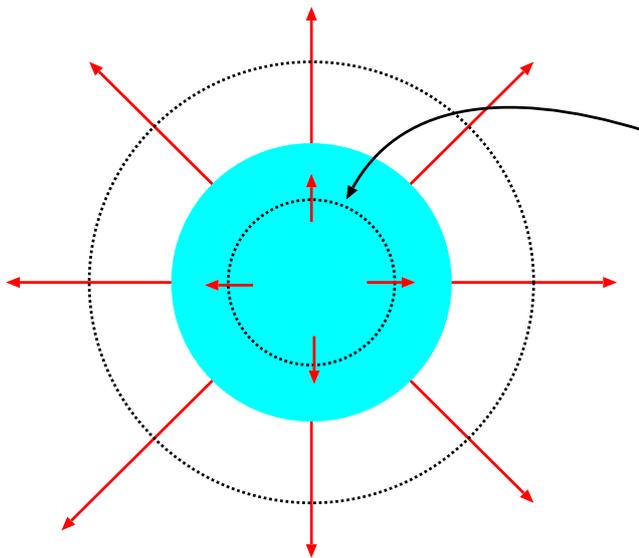
この場合、この棒の電荷から発する電気力線は、 z 軸に垂直な方向に伸びていく（無限に長い棒を考えているので、それが作る電場 \vec{E} は対称性から z 成分を持ってない）。

図のように長さ Δz の部分を考えて、この円筒部分に入っている電荷の量は線密度 ρ に長さをかけて $\rho\Delta z$ であり、この部分から出る電気力線の総本数は $\frac{\rho}{\epsilon_0}\Delta z$ となる。

出て行く電気力線は全て円柱の側面を通っていくのだから、円柱の側面積 $2\pi r\Delta z$ でこれを割れば電場 \vec{E} の強さがわかる。結果は $\frac{\frac{\rho}{\epsilon_0}\Delta z}{2\pi r\Delta z} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r}$ となる。この式もまた、1.5.1 節の結果で棒の長さを Δz にしたものと同じである。

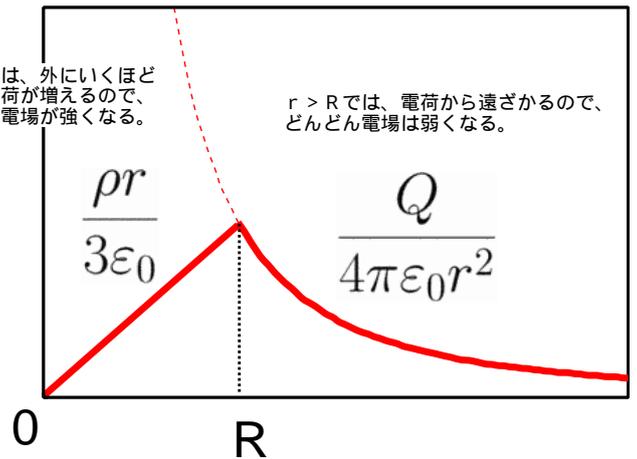
2.3.3 一様に帯電した球

次に、球体に体積密度 ρ で一様に電荷が分布している場合を考えよう。球の半径を R とすると、全部で $\frac{4\pi}{3}R^3\rho$ の電荷がいることになる。



$r < R$ では、外にいくほど内部の電荷が増えるので、どんどん電場が強くなる。

$r > R$ では、電荷から遠ざかるので、どんどん電場は弱くなる。

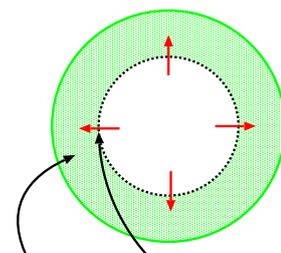


球体の外側に関しては、これまでと同じで、電気力線の総本数である $\frac{Q}{\epsilon_0}$ を外部に考えた仮想的な球の表面積 $4\pi r^2$ で割ればよいので、見慣れた公式どおり、 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ の電場 \vec{E} があることになる。

問題は電荷の球の内側である（つまり $r < R$ の時）。仮想的な半径 r の球の内側には電荷は $\frac{4\pi}{3}r^3\rho$ だけしかない。よって、電場 \vec{E} は

$$\vec{E} = \frac{4\pi}{3}r^3\rho \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \frac{1}{3\epsilon_0}\rho r\vec{e}_r \quad (2.16)$$

となる。この式には、原点から r より大きく離れている部分の電荷の影響が全く入っていないことに注意せよ。この部分が作る電場 \vec{E} は、原点からの距離 r の位置では、ちょうど消しあって 0 になるわけである。



この部分の電荷はこの電場には全く影響しない！

2.3.4 平行平板コンデンサ

平行平板コンデンサとは、互いに平行な2枚の板（極板と呼ぶ）を向かい合わせたものである。このような板の一方に $+Q$ 、もう一方に $-Q$ の電荷を帯電させた場合、電場 \vec{E} は右の図のようになり、電気力線のほとんどは極板間に集中する。この電場 \vec{E} の強さを一般に求めるのはたいへんである（場所によって異なる複雑な関数で表現されているので）が、近似として「電気力線（電場 \vec{E} ）は極板と極板の間にしか存在しない」と考えれば非常に簡単に計算できる。

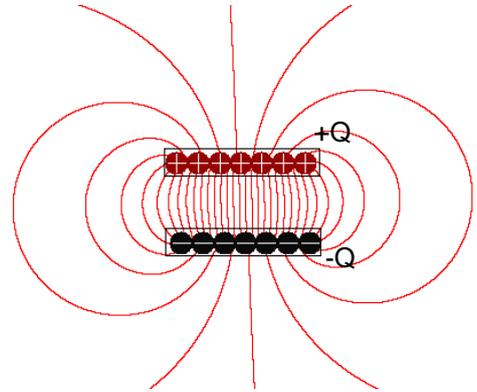
コンデンサの極板の面積を S とすると、面積 S の中に電荷 Q から出て電荷 $-Q$ に入る電気力線（全部で $\frac{Q}{\epsilon_0}$ 本）が入っていることになる。

したがって、極板の間のできる電場 \vec{E} の強さは $\frac{Q}{\epsilon_0 S}$ となる。

なお、実際には図のように極板から外にも電場は染み出るものなので、この計算はあくまで近似である。

この近似が有効な範囲において、電場 \vec{E} の強さ $\frac{Q}{\epsilon_0 S}$ は極板間の距離にはよらない。

ここまででわかったように、電荷分布の形状によっては、「電場 \vec{E} は距離の自乗に反比例する」と単純に考えることはできない。直線上に分布した電荷の作る電場 \vec{E} の場合は距離に反比例するし、平面上に分布した電荷の作る電場 \vec{E} の場合は、距離に無関係となる。



2.4 電場 \vec{E} の発散：ガウスの法則の微分形

前節で考えたガウスの法則 (2.15) は、右辺は体積積分、左辺はその体積を囲むような面積上の面積積分で書かれている。この体積はどんなものであってもよい。どんなものであってもよいのだから、微小な体積と、その微小な体積を囲む微小な面積を考えて、(2.15) を適用するとどうなるかを考えよう。つまり、物理の常套手段であるところの「まず細かく区切って考えよ」をガウスの法則に適用するとどうなるかを考えるのである。こうすることで、広い範囲の積分によって表現されたガウスの法則（「積分形の法則」と呼ぶ）を、ある1点における法則（「微分形の法則」に直すことができる）。

2.4.1 直交座標系における発散

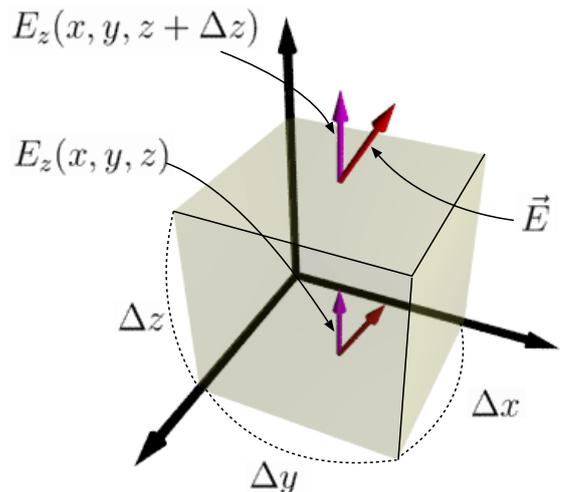
電場 \vec{E} が存在する空間の中にとっても小さな直方体を考える。実際に箱を入れる必要はない。とにかく「直方体の形をした微小領域」を考えるのである。その直方体の中を電気力線が通り抜けていっている。そして「この直方体の中から正味どれだけの電気力線が出てくるのか？」という問題を考える。この問題を解くには直方体の6つの面での外向きの flux の和を取ればよいことはすぐにわかるだろう。

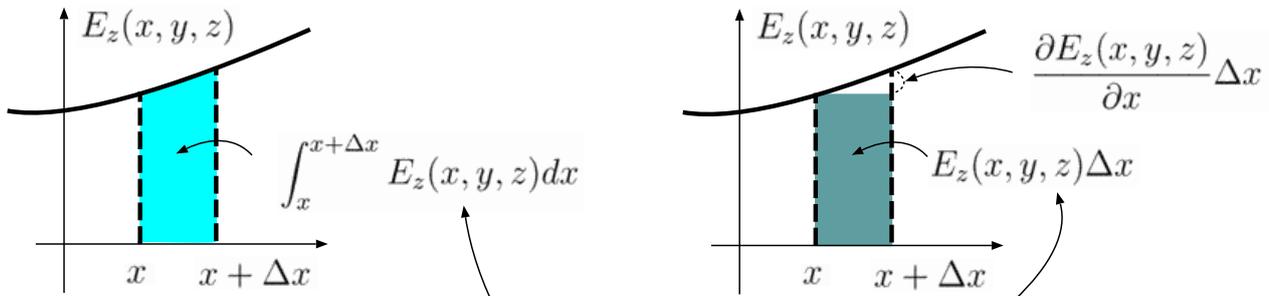
すでに述べたように、電場が \vec{E} であっても、直方体の床から入ってくる電気力線の本数を考える時、問題となるのはベクトル \vec{E} を (E_x, E_y, E_z) と x 成分 y 成分 z 成分にわけた時の、 z 成分のみである。つまり、床から入ってくる電気力線の本数は

$$\int_x^{x+\Delta x} dx' \int_y^{y+\Delta y} dy' E_z(x', y', z) \quad (2.17)$$

である。

ここで、 $\Delta x, \Delta y$ はどうせ小さい（0へと向かう極限を取る）ので、 $\int_x^{x+\Delta x} dx' \int_y^{y+\Delta y} dy'$ という積分を、 $\Delta x \Delta y$ をかけるだけの形に近似して考えよう。次の図に示したように、こうすることはつまり、図の三角形の面積 $\frac{1}{2} \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial x} \Delta x \times \Delta x$ を無視したことになる。これは $(\Delta x)^2$ のオーダーである。微量を計算しているのだから、オーダーがもっとも低いものだけを計算すればよい。今は Δx のオーダーを考えているので、 $(\Delta x)^2$ のオーダーは気にしない。





これを計算するべきだが、これを計算しても現在行っている計算では同じ結果となる。

この二つの差はおおざっぱに言って、

$$\frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial x} \Delta x$$

すなわち $\frac{1}{2} \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial x} (\Delta x)^2$

つまり、床から入ってくる量はこの近似の元で $E_z(x, y, z)\Delta x\Delta y$ である。ここでは、「抜けていく量」を計算することになっている。抜けていく量は入ってくる量の逆符号であるから、

$$- E_z(x, y, z)\Delta x\Delta y \tag{2.18}$$

である。

では、天井から抜けていく電気力線の量は？—天井では、 E_z が正ならば電気力線が抜けていくことになる。だからマイナス符号は不要である⁸。つまり、天井から抜けていく量は

$$E_z(x, y, z + \Delta z)\Delta x\Delta y \tag{2.19}$$

である。この二つの式を見て、「足したら零」と思ってしまうはいけない。天井と底面は、 z 座標が Δz だけ違う。そこを考慮してちゃんと式を書くと、「天井から抜けていく量 + 底面から抜けていく量」は

$$(E_z(x, y, z + \Delta z) - E_z(x, y, z)) \Delta x\Delta y \tag{2.20}$$

となる⁹。ここで微分の定義

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{E_z(x, y, z + \Delta z) - E_z(x, y, z)}{\Delta z} = \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} \tag{2.21}$$

を思い出せば、「天井と床面で抜けていく量」は

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta x\Delta y\Delta z \tag{2.22}$$

となる（どうせ Δz は微小であることに注意）。ここまで来たら後は簡単、 x 方向や y 方向に関して「抜けていく量」を考えればよいが、 x, y, z の立場を入れ替えてつ全く同じ計算をやればよいので、6つの面全てを足し算した結果は

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta x\Delta y\Delta z \tag{2.23}$$

となる。この式を $\Delta x\Delta y\Delta z$ すなわち直方体の体積で割って、単位体積当たりになると、 $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ となる。この量は電磁気に限らず流量の出入りを考える時にはよく登場する量である。そこで $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \text{div} \vec{E}$ と書く。

div は別に電場 \vec{E} 専用の記号ではなく、一般にベクトル場¹⁰ \vec{A} (ベクトル場ならなんでもいい) に対し、

⁸ というより、床では $d\vec{S}$ が下を向いているから、 $E_z > 0$ の時に $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ が負になり、天井では $d\vec{S}$ が上を向いているから符号は不要、と考えた方がよいかもしれない。

⁹ これもより正確に書けば、

$$\int_x^{x+\Delta x} dx \int_y^{y+\Delta y} dy (E_z(x, y, z + \Delta z) - E_z(x, y, z))$$

である。しかし今は Δx も Δy も微小なので、(2.20) という計算で十分なのである。

¹⁰ 「ベクトル場」というのは、空間の各点各点に一個ずつベクトルがあるような状況。つまり、場所の関数であるベクトル $\vec{A}(\vec{x})$ のこと。電場 \vec{E} もベクトル場の一例である。

— 直交座標での div —

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.24)$$

と定義する。

div は「ダイバージェンス (divergence)」と読み、日本語では「発散」もしくは「湧き出し」と呼ぶ¹¹。「今考えている“流れ”は途切れなく続いているのか？—それとも何かから湧き出したり、何かに吸い込まれたりしているのか？」という問題を考える時にとっても便利なツールである¹²。

ここで、div は、「ある一点にある仮想的微小直方体」の上で、体積あたりの量として定義されていることに注意しよう。積分形のガウスの法則では面積分で定義されていた量が、div という記号を使って表現することで、体積あたりの量に変わってしまった。今考えていた量はガウスの法則の積分形 (2.15) の左辺である $\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ を $\Delta x \Delta y \Delta z$ で割ったものであった。一方、(2.15) の右辺 $\int_V \rho dV$ は今考えている微小体積に対しては $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$ となる (微小な体積の中なので、その中の ρ の変化は無視する)。よってこれを $\Delta x \Delta y \Delta z$ で割ったものは、右辺を $\Delta x \Delta y \Delta z$ で割ったものであるところの $\operatorname{div} \vec{E}$ と等しいから、

— ガウスの法則の微分形 —

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.25)$$

が導かれる。空間内に電荷が存在しない時、 $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ となる。電気力線が途中で終わったり、無から始まったりしないこと、その数学的表現が $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ なのである。

これをもう一度積分した式

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (2.26)$$

とガウスの法則の積分形 (2.15) を見比べると、

— ガウスの発散定理 —

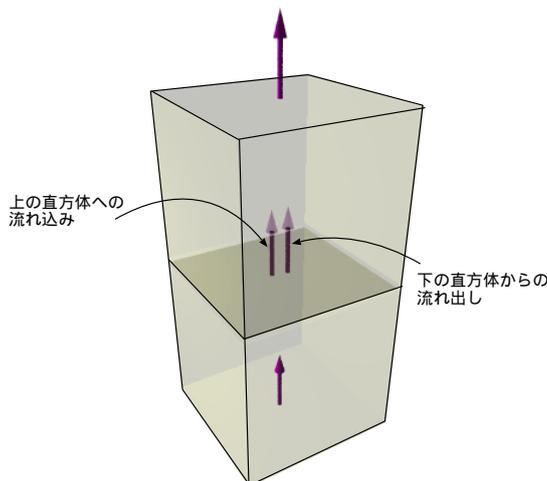
$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.27)$$

という式が成立していることがわかる (「ガウスの積分定理」と呼ぶ場合もある)。

この式は、電場 \vec{E} だから成立するわけではなく、一般のベクトル場に対して有効な式である。だから、名前が似ているが、電場 \vec{E} に対する「ガウスの法則」とは一応別物である¹³。後でもいろんなところでお目にかかることであろう。

この式が成立することの直観的な説明¹⁴ を与えておく。左図のように、さっき考えた直方体を2個重ねてみる。そしてそれぞれで電気力線の出入りを計算してみたとする。二つ分について正味の出る電気力線の本数を計算したとすると、下の直方体の天井から出る電気力線と上の直方体の床から入る電気力線は同一であり、和を取るとちょうど消える。このようにブロック化した微小直方体をどんどん重ねていく (どんな複雑な立体図形であっても、微小な直方体の集合に分解することはできるはずである) と、その内側に入った部分については flux の計算は全てキャンセルして、一番外側 (つまり表面) での積分のみが残ることになる。こうして、体積積分である $\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV$ と面積積分

である $\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ が結びつくわけである。

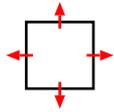


¹¹ 「発散」という言葉は になる時にも使って紛らわしい。それに「湧き出し」の方が的確に意味をとらえているように思える。

¹² 新しい記号が出てくると「また覚えることが増えた (;_;)」と嫌がる人が多いが、そういう記号を使う理由は「この記号を使った方が楽だから」ということにつける。メリットがあるから使っているということを理解して、「便利なものが出てきたなあ (^ ^)」と喜ばなくては。

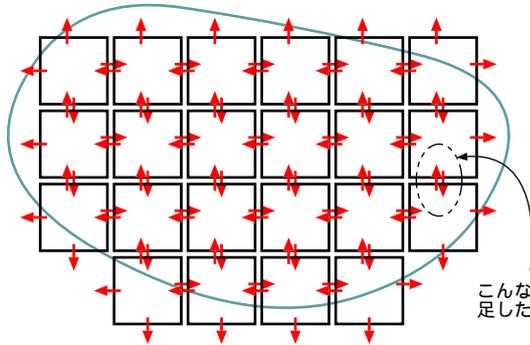
¹³ 電場 \vec{E} に対するガウスの法則は電場 \vec{E} と電荷の関係式。ガウスの発散定理はベクトルとベクトルの div の間の関係式。

¹⁴ あくまで直観的な説明であって、証明というほど厳密なものではない。

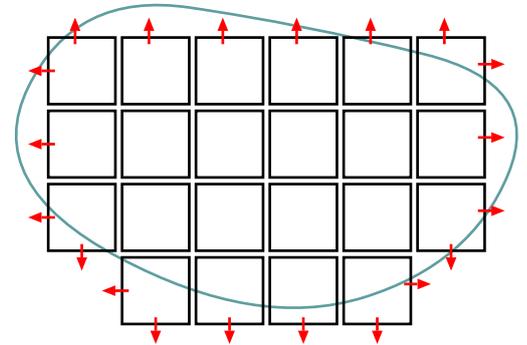


div とは、微小ブロックから湧き出してくるベクトルの和。

複雑な領域を微小ブロックにわけて考えて、



こんなふうに逆向き矢印を足したところは相殺するとすれば



外へ飛び出す矢印だけが残って、表面での積分になる！！

2.4.2 発散のない電場 \vec{E} の例

電荷がないところでは $\text{div} \vec{E} = 0$ となるということを、これまで求めた電場 \vec{E} の場合で確認しておこう。まず無限に広い平面が一様に帯電している場合、電場 \vec{E} はどこでも等しく、 $(0, 0, \frac{\rho}{2\epsilon_0})$ であるから、当然 $\text{div} \vec{E} = 0$ である。原点にある点電荷

Q による電場 $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ の場合を考えると、 \vec{e}_r の x, y, z 成分が $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$ である¹⁵から、

$$\vec{E} = \left(\frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{Qy}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.28)$$

と書ける。まず、 $\frac{\partial E_x}{\partial x}$ を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} \frac{Qx \times 2x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{Qx^2}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。次に x, y, z の立場を入れ替えたもの、つまり、

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{Qy^2}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

と、

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{Qz^2}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

を足す。こうして出てきた3つの式の第1項は全部同じものになるので3倍となる。第2項は最後で x^2, y^2, z^2 が出てくるので、全ての和は、

$$\text{div} \vec{E} = 3 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - 3 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} (x^2 + y^2 + z^2) \quad (2.30)$$

となるが、第2項を約分すると第1項と逆符号で同じものになり、和は0である。

なお、この計算は少々ややこしく感じるだろうけれど、後で示す極座標での div の形を使うとよりわかりやすく計算できる。

¹⁵ \vec{e}_r は位置ベクトル (x, y, z) と同じ方向を向く。長さが1になるように位置ベクトルの長さ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で割れば \vec{e}_r ができる。

2.4.3 $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ の簡単な例

一様に帯電した球内部の電場 \vec{E} の式は $\vec{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho r \vec{e}_r$ であった ((2.16) を参照)。この場合、 $r \vec{e}_r = (x, y, z)$ であるから、

$$E_x = \frac{\rho}{3\epsilon_0} x, \quad E_y = \frac{\rho}{3\epsilon_0} y, \quad E_z = \frac{\rho}{3\epsilon_0} z \tag{2.31}$$

となり、

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.32}$$

となる。確かにこの答は $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ を満たしている。

厚さ $2d$ で無限に広い板に、体積電荷密度 ρ の電荷がたまっている。この時の電場 \vec{E} を求めてみよう。板の表面を $z = d$ 、裏面を $z = -d$ となるように直交座標系 (x, y, z) を置く。

この場合、対称性から電場 \vec{E} は x, y にはよらないだろうし、 E_x, E_y も 0 であろう。

板の外は真空であるから $\text{div} \vec{E} = 0$ であるから、 $\frac{\partial}{\partial z} E_z = 0$ である。これまた対称性から E_z が x, y によらないであろうことを考えると E_z を z のみの関数とすれば、 $\frac{d}{dz} E_z = 0$ ということであるが、これは結局 E_z が定数だということを意味する。

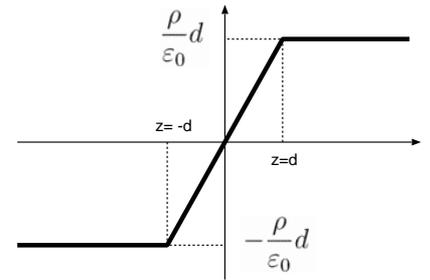
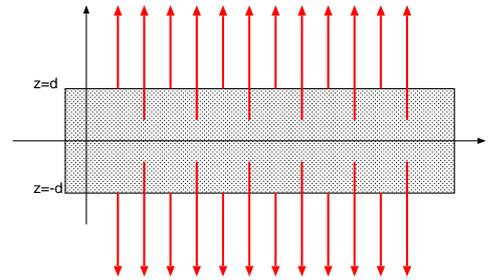
板の内側では $\frac{d}{dz} E_z = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ であるから、

$$E_z = \frac{\rho}{\epsilon_0} z + C \tag{2.33}$$

が解となる。図が上下対称であることを考えると、 $z = 0$ で $E_z = 0$ であろうから、積分定数 C は 0 としよう。以上をまとめると、

$$E_z = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} d & (d \leq z) \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} z & (-d < z < d) \\ -\frac{\rho}{\epsilon_0} d & (z \leq -d) \end{cases} \tag{2.34}$$

という答えが出る。



2.5 極座標での div

直交座標では $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$ という形になった div であるが、極座標など他の座標系ではそうではない。単純に

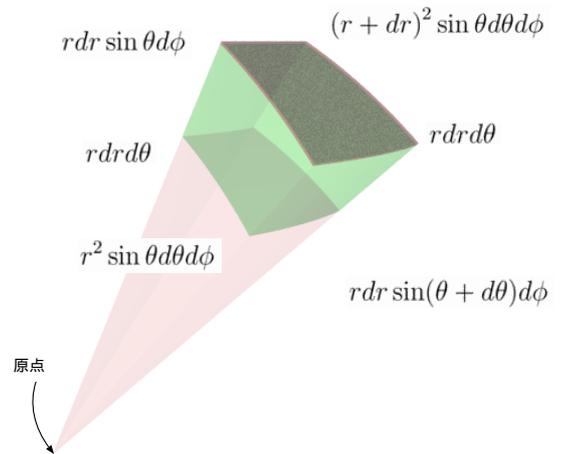
この式は間違いだから覚えるな !!

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$$

などとやってはいけない (そもそもこの式は次元すらあってない!)。

2.5.1 極座標の div の導出

正しい極座標の div を求めるために、左図のように微小体積を設定する。気をつけるべきは、この微小体積は直方体ではないということ。たとえば天井の面積が $(r + \Delta r)^2 \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi$ なのに対し、床の面



積は $r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi$ なのである。この微小体積は、 $\Delta r, r \Delta \theta, r \sin \theta \Delta \phi$ という3辺の長さを持っていることに注意しよう。ゆえに微小体積は $r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi$ となる。

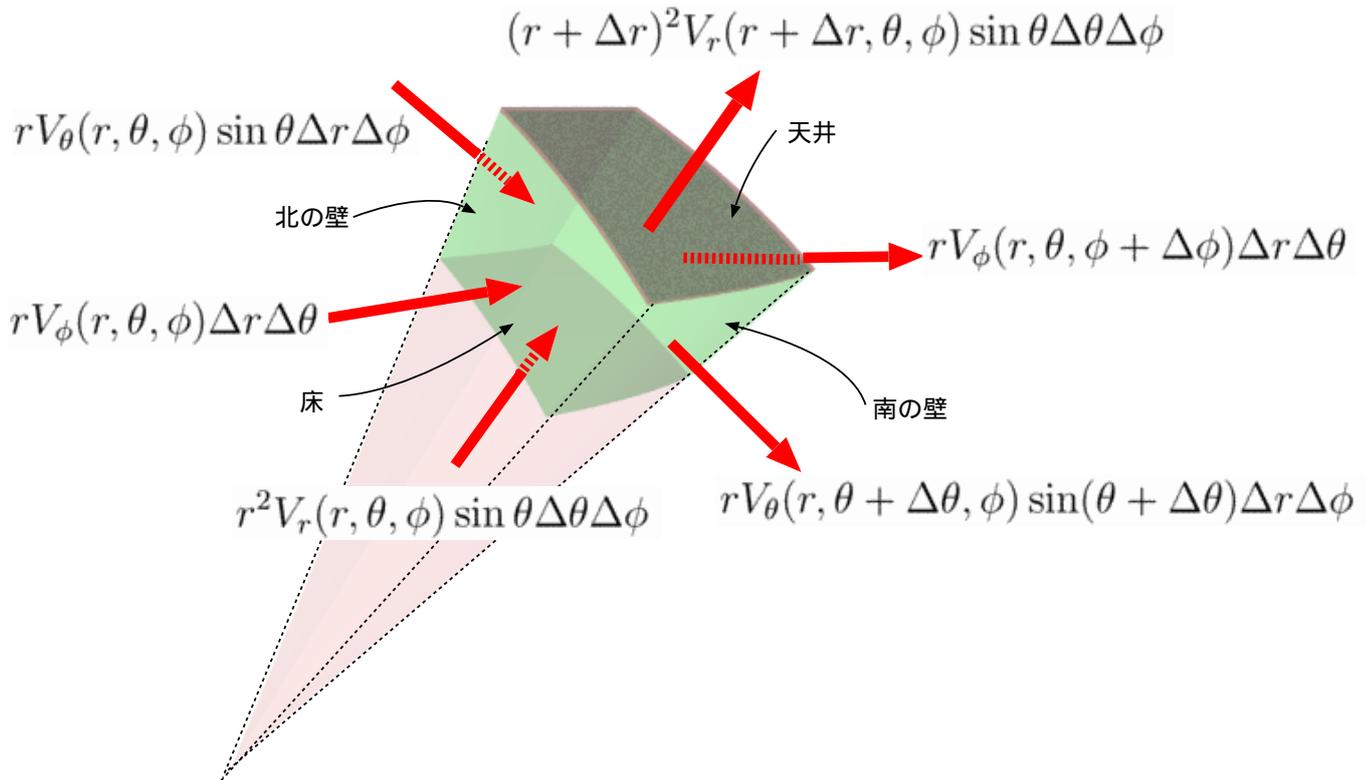
図の床にあたる部分は面積 $r^2 \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi$ を持つ、一方図の天井の部分は、 $(r + \Delta r)^2 \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi$ という面積を持っていることに注意しよう（つまり、直方体の場合と違って、向かい合う面の面積は同じではないのである）。

天井から抜け出る flux は $(r + \Delta r)^2 V_r(r + \Delta r, \theta, \phi) \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi$ 、床から抜け出る flux は $-r^2 V_r(r, \theta, \phi) \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi$ ということになる（例によってマイナス符号は、 $V_r > 0$ の時に入ってくる方向だからついている）。

よって、天井と床からの湧き出しは、

$$\begin{aligned} & (r + \Delta r)^2 V_r(r + \Delta r, \theta, \phi) \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi - r^2 V_r(r, \theta, \phi) \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi \\ = & ((r + \Delta r)^2 V_r(r + \Delta r, \theta, \phi) - r^2 V_r(r, \theta, \phi)) \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi \end{aligned} \quad (2.35)$$

となる。



最後に体積 $r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi$ で割ることを考えると、div のうち、天井と床からくる部分は、

$$\frac{1}{r^2} \frac{(r + \Delta r)^2 V_r(r + \Delta r, \theta, \phi) - r^2 V_r(r, \theta, \phi)}{\Delta r} \xrightarrow{\Delta r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r(r, \theta, \phi)) \quad (2.36)$$

である。

この答はナイーブな予想の $\frac{\partial}{\partial r} V_r$ とは違う。原因はもちろん、天井と床の面積の違いである。そのため、天井での流れ出しと床からの流れ出しは、 V_r に r^2 をかけた量に比例する。よってこの量 $r^2 V_r$ を微分しないと、正しい意味での湧き出しを計算していることにならないのである。

北の壁と南の壁も面積が違う。その違いは $\sin \theta$ に比例しているのだから、南北の壁による div への寄与は、

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta \Delta \theta} (r \sin(\theta + \Delta \theta) V_\theta(r, \theta + \Delta \theta, \phi) - r \sin \theta V_\theta(r, \theta, \phi)) \xrightarrow{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) \quad (2.37)$$

となる¹⁶。最後に東西については、

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta \Delta \phi} (r \sin \theta V_\phi(r, \theta, \phi + \Delta \phi) - r \sin \theta V_\phi(r, \theta, \phi)) \xrightarrow{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} V_\phi \quad (2.38)$$

¹⁶ここで、「壁の面積が $\sin \theta$ に比例するから、 $\sin \theta$ をかけてから微分して後で $\sin \theta$ で割るのはわかるが、なぜ r で割る必要があるのか？」と疑問に思うかもしれない。理由は、次の節で書いているように、この場合の南北間の壁の距離は $d\theta$ ではなく $r d\theta$ だからである。別の言い方をすれば、ここでの正しい微分は $\frac{\partial}{\partial \theta}$ ではなく、 $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ なのである。

となる¹⁷。まとめると、極座標での div の式は

覚えるならこっちを覚えよう !!

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (2.39)$$

である。

【補足】この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

2.5.2 $\vec{\nabla}$ を使った記法に関する注意

div は、「ナブラ」と呼ばれる記号 $\vec{\nabla}$ を使って $\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ と書かれることもある。 \cdot はベクトルの内積を示し、あたかもベクトル $\vec{\nabla}$ とベクトル \vec{A} の内積であるかのごとき書き方になっている。

直交座標の場合、 $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ となり、 $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$ にかかると、 $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ という関係¹⁸により、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.40)$$

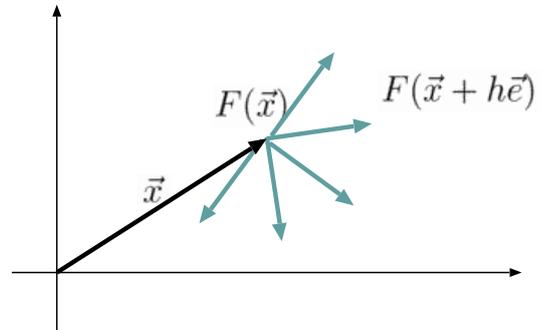
となり、これが $\operatorname{div} \vec{A}$ と同じであることがわかる。ここで、上の式では $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$ になった部分だけが生き残っていることに注意しよう（内積を取るという計算だから当然なのであるが）。

$\vec{\nabla}$ の一般的定義は、任意の方向を向いた単位ベクトルを \vec{e} として、

$$\vec{e} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\vec{x} + h\vec{e}) - F(\vec{x})}{h} \quad (2.41)$$

である。あるいは、

$$F(\vec{x} + h\vec{e}) = F(\vec{x}) + h\vec{e} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x}) + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.42)$$



と書いてもよい。

つまり、ある任意の方向に距離 h だけ移動した時の関数 $F(\vec{x})$ の変化量と、移動距離 h の割合を $h \rightarrow 0$ の極限で計算したものが、 $\vec{e} \cdot \vec{\nabla} F(x)$ になるというのが $\vec{\nabla}$ の定義である。

そもそも、1次元での微分の定義は

$$\frac{d}{dx} F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad (2.43)$$

または

$$F(x+h) = F(x) + h \frac{d}{dx} F(x) + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.44)$$

であった。つまり位置座標 x を h だけ変化させた時の $F(x)$ の変化と h の割合である。2次元以上の空間では、位置座標 \vec{x} をどちらの方向に変化させた時の割合なのを示すため、微分がベクトルになってしまうわけである。直交座標の場合、 $\vec{e}_x \cdot \vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x}$ 、 $\vec{e}_y \cdot \vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial y}$ というふうに、 \vec{e} が向いている方向によって、 $\vec{e} \cdot \vec{\nabla} F$ が $\frac{\partial F}{\partial x}$ になったり $\frac{\partial F}{\partial y}$ になったりする。つまり、

$$\vec{\nabla} F = \vec{e}_x \frac{\partial F}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial F}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial F}{\partial z} \quad (2.45)$$

ということになる。

この式から F を外して書いた物が

$\vec{\nabla}$ の定義

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.46)$$

¹⁷ここで最後に $r \sin \theta$ で割っている理由も、東西間の壁の間隔は $r \sin \theta d\theta$ だから。 $\frac{\partial}{\partial \phi}$ ではなく、 $\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ が正しい微分なのである。

¹⁸ $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ はそれぞれの長さは1であり、互いに直交するという関係式。

である。本来微分記号というのは後ろに何か関数があって意味があるので、この式はあくまで「記号」として解釈しておこう。

$\vec{\nabla}$ などをつかって、微分をベクトルのように扱う理由は、微分というのは本来「ある場所と、その隣の場所との関数の差を調べる」ものであるが、2次元以上の空間では「隣の場所」というのがどっちの隣なのか（東隣か西隣か、あるいは北か南か、もしくは階上か階下か）によって微分の値も違うからである。

極座標ではどうかというと、 \vec{e}_r が r 方向に向いている時すなわち、 $\vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x})$ は $\frac{\partial F}{\partial r}$ でよいが、 θ 方向に向いている時すなわち $\vec{e}_\theta \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x})$ は $\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}$ でなくてはならない。なぜなら、 θ 方向に距離 h 進むと、 θ は $\frac{h}{r}$ だけ増加するからである。つまり、

$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{\nabla} F(r, \theta, \phi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(r, \theta + \frac{h}{r}, \phi) - F(r, \theta, \phi)}{h} \quad (2.47)$$

という計算を行わなくてはならないのである。

$$F(r, \theta + \frac{h}{r}, \phi) = F(r, \theta, \phi) + \frac{h}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (2.48)$$

のようになることを考えれば、(2.47) の右辺は $\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}$ となる。

同様に、 ϕ 方向に距離 h 進むと ϕ は $\frac{h}{r \sin \theta}$ だけ増加するので、 $\vec{e}_\phi \cdot \vec{\nabla} F = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \phi}$ である。この3つをまとめると、

$$\vec{\nabla} F = \vec{e}_r \frac{\partial F}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \rightarrow \vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (2.49)$$

となる。この式から逆に $\vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}$, $\vec{e}_\theta \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\vec{e}_\phi \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ となることはすぐに確認できる。

ここでよくある間違いを指摘しておこう。極座標で表したベクトル場を $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi$ と書いた時、非常によくある間違いは、

これも間違い!!

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \cdot (A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi) \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (2.50)$$

とやってしまうことである。なんとなく、上の式は正しそうに見えるが、実はまずい。なぜなら、 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ はどれも定ベクトルではない。つまり「右の括弧内の \vec{e} も微分される」のである。

なお、実際に微分してみると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r &= 0, & \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_\theta &= 0, & \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_\phi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_r &= \vec{e}_\theta, & \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta &= -\vec{e}_r, & \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\phi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_r &= \sin \theta \vec{e}_\phi, & \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_\theta &= \cos \theta \vec{e}_\phi, & \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_\phi &= -\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (2.51)$$

となる。この公式を使って正しい計算を行うと、

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \cdot (A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi) \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ &\quad + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \cdot \left(A_r \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}}_{=\vec{e}_\theta} + A_\theta \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}}_{=-\vec{e}_r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi \cdot \left(A_r \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}}_{=\sin \theta \vec{e}_\phi} + A_\theta \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi}}_{=\cos \theta \vec{e}_\phi} + A_\phi \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi}}_{=-\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta} \right) \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r} A_r + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} A_\theta \end{aligned} \quad (2.52)$$

となる。これは (2.39) に等しい。

このように極座標などの曲線座標を使った $\vec{\nabla}$ の計算では、 \vec{e} が定ベクトルではないということを忘れて計算を間違えることがよくあるので気をつけよう。

2.5.3 極座標の div を使って電場 \vec{E} を求める

さて、極座標の div の便利さを実感しておこう。極座標の div の式 (2.39) の \vec{A} に点電荷の場合の電場 $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ を代入すると 0 になる。この場合は V_r のみが $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ という値を持ち、div を取る時には $r^2 V_r$ としてから微分するので定数の微分になり 0 となる。

また逆に、「球対称な電荷分布がある時、電荷の外側ではどんな電場 \vec{E} ができるか？」という問題を解く時、 $\text{div} \vec{E} = 0$ を手がかりにして解いていくこともできる。この場合、球対称性から E_θ や E_ϕ は存在しないので、 $\text{div} \vec{E} = 0$ は

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= 0 \\ r^2 E_r &= C \\ E_r &= \frac{C}{r^2} \end{aligned} \quad (2.53)$$

となって、逆自乗の法則が導けることになる (C は積分定数であって、他の条件から決めねばならない)。電荷が存在する場合は、 $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ を出発点として計算すればよい。例えば一様に帯電した球の場合なら、 ρ は定数なので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 \\ r^2 E_r &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} r^3 + C' \\ E_r &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} r + \frac{C'}{r^2} \end{aligned} \quad (2.54)$$

となる。ここで積分定数 C' は実は 0 である。なぜなら、そうでなかったら $r = 0$ で E_r が発散してしまうからである。

.....
【FAQ】「逆自乗の式 $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ の場合だって発散しているけど気にしなかったではないですか」

逆自乗の式はあくまで「電荷の存在しない範囲」で成立した式なので、電荷がいる場所は適用範囲外。適用範囲外で発散しても、「当局は一切関知しない」であって、問題はない。上の式の場合、原点も適用範囲内なので、そこで発散されてはやっぱり困る。

.....
積分定数 C の方は、球の表面 ($r = R$ としよう) で外部の解 $E = \frac{C}{r^2}$ と内部の解 $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$ が接続されるようにすればよいから、

$$\frac{C}{R^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R \rightarrow C = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R^3 \quad (2.55)$$

となる。一様な電荷分布を仮定したから、 $\frac{4\pi}{3} R^3 \rho = Q$ とすれば、外部での解は

$$E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4\pi}{3} \rho R^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.56)$$

というおなじみの形になる。

こうして、一様帯電した球の内部での電場 \vec{E} を求めることができる (前にやったよりもこっちの方が簡単である)。もう一度まとめておくと、

————— 真空中の静電気学の基本方程式 —————

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.57)$$

という 1 本の式で、ここまでの物理法則を表してしまうことができる。クーロンの法則もガウスの法則も、全てこの式で表現しつくされているのである。

この式は分極という現象を起こす物質の中では少しだけ変更される。その変更された方程式が、後で電磁気学の基本法則であるマクスウェル方程式の一つとなるのである。

2.6 章末演習問題

【演習問題 2-1】 円筒座標系 (r, ϕ, z) では、div は

円筒座標の div

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} A_\phi + \frac{\partial}{\partial z} A_z \quad (2.58)$$

という形を取る。なぜこうなるのか、図解して説明せよ。

【演習問題 2-2】 球対称な電荷分布があり、電荷が分布している部分の電場 \vec{E} を測定したところ、どの場所でも電場 \vec{E} は r 方向（原点から離れる方向）を向いて、その電場 \vec{E} の強さは kr^n と距離の n 乗に比例していた（ただし、ある半径 R より遠くには電荷がないとする）。電荷はどのように分布していたのか？

物理的に許される n の範囲を考察せよ。

【演習問題 2-3】

図のように、一様に帯電したパイプ状の中空の円筒がある、円筒の内径（中空部分の半径）は r_1 、外径は r_2 である。内部（ $r_1 < r < r_2$ の部分）には体積電荷密度 ρ で電荷が一様に分布している。図は有限長さで切られているが、実際には無限に長い円筒であるとして、円筒の中心である z 軸から r 離れた場所での電場を求めよ。

【演習問題 2-4】 (2.51) を証明せよ。

ヒント：方法は二つある。

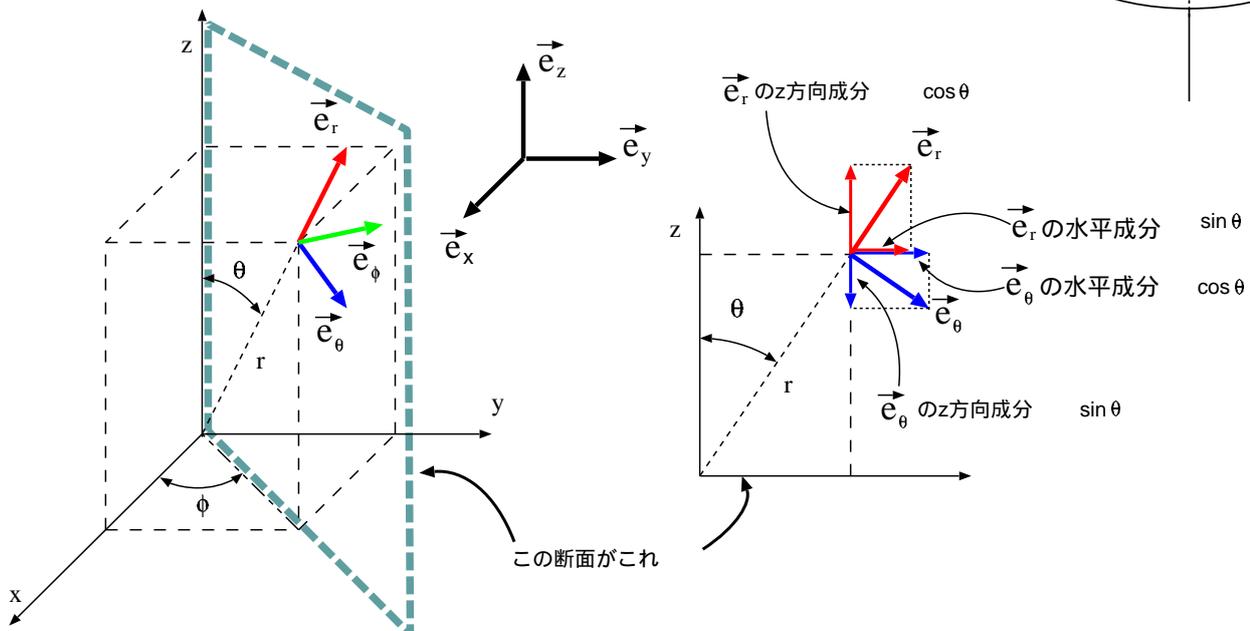
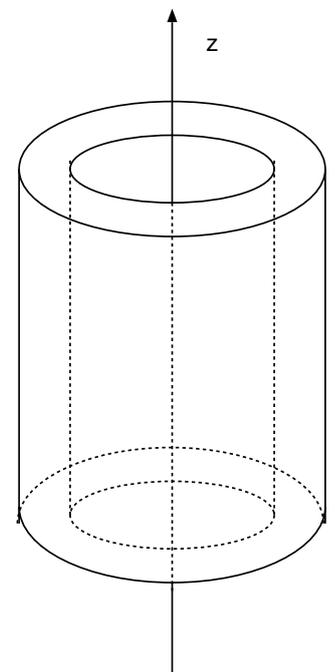
- (1) 図を描いてベクトルがどう変化するかを考える。
- (2) 定ベクトルである $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ を使って表現すると、

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \quad (2.59)$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \quad (2.60)$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \quad (2.61)$$

である。これを微分する。



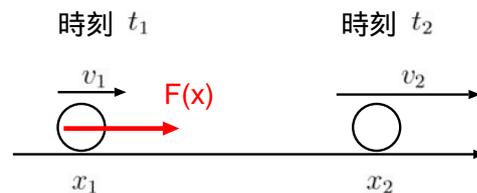
【演習問題 2-5】 円筒座標に関して、(2.51) 同様の式を証明せよ。

第3章 静電気力の位置エネルギーと電位

この章では、電場 \vec{E} を記述するもう一つの便利な方法、電位の考え方について述べる。電場 \vec{E} が「単位電荷あたりの力」で定義されていたように、電位は「単位電荷あたりの位置エネルギー」で定義される量である。電位の定義に入る前にまず、力とエネルギーの関係を復習した後、静電気力による位置エネルギーを考えることにしよう。

3.1 力学的エネルギーの復習（1次元）

そもそも位置エネルギーとは何か？—もう一度考えておこう。まずは1次元的な運動を考える。質量 m の物体がある直線上を運動していて、その位置 x に依存する力 $F(x)$ を受けているとする。運動方程式は $m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$ である。この式の両辺を x で積分する。今物体はある時刻 t_1 に位置 x_1 にいて、それから後のある時刻 t_2 に x_2 にいたとする。積分は x_1 から x_2 まで、その物体の運動にそって行う¹。



$$m \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2x}{dt^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (3.1)$$

右辺は $F(x)$ がちゃんとわかっているならば、後は積分するだけである。左辺はそのままでは積分しにくいので、以下のようにやるとできる。まず、 $dx \rightarrow \frac{dx}{dt} dt$ と置き換える。つまり、積分を x でなく t で行うことにする。これで

$$m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} dt = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (3.2)$$

という積分に変わるが、 $\frac{dx}{dt}$ は速度であるからこれを v と書いておくと（この時、 $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ ）

$$m \int_{t_1}^{t_2} \frac{dv}{dt} v dt = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (3.3)$$

という積分をすることになる。この右辺の力 $F(x)$ を位置座標 x で積分するという量は「仕事」と呼ばれる量である。

ここで、

$$\frac{d}{dt} (v^2) = 2 \frac{dv}{dt} v \quad (3.4)$$

であることを使うと、

$$\frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (v^2) dt = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (3.5)$$

となる。左辺の積分範囲は t_1 から t_2 まで、右辺の積分範囲は x_1 から x_2 までになる。左辺の積分は v^2 を微分してからまた積分するという計算になっているので、

$$\frac{1}{2} m v^2 \Big|_{t=t_2} - \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{t=t_1} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (3.6)$$

という結果になる。この式の左辺は「運動エネルギー $\frac{1}{2} m v^2$ の増加」であり、これが力 $F(x)$ のした仕事に等しい。すなわち、物体に加えられた仕事の分だけ、運動エネルギーが増加する。

定積分 $\int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$ が不定積分 $\int F(x) dx$ を使って $\int F(x) dx \Big|_{x=x_2} - \int F(x) dx \Big|_{x=x_1}$ と書けることを使うと、この式を

$$\frac{1}{2} m v^2 \Big|_{t=t_2} - \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{t=t_1} = \int F(x) dx \Big|_{x=x_2} - \int F(x) dx \Big|_{x=x_1} \quad (3.7)$$

¹ 物体は途中で向きを変えたりしなかったとして考えよう。物体が途中で引き返したりすると積分がややこしくなる（以下の計算ははその場合でも成立するが）。

と書き直すことができる。これをさらに、左辺に場所 x_1 、時刻 t_1 での値が来て、右辺には場所 x_2 、時刻 t_2 での値が来るように書き直すと、

$$\frac{1}{2}mv^2 \Big|_{t=t_1} - \int F(x)dx \Big|_{x=x_1} = \frac{1}{2}mv^2 \Big|_{t=t_2} - \int F(x)dx \Big|_{x=x_2} \tag{3.8}$$

と変わる。ここで、 $\int F(x)dx = -U(x)$ と置くと、

$$\frac{1}{2}mv^2 \Big|_{t=t_1} + U(x_1) = \frac{1}{2}mv^2 \Big|_{t=t_2} + U(x_2) \tag{3.9}$$

となる。この式を見ると、左辺は時刻 t_1 、場所 x_1 での値であり、右辺は時刻 t_2 、場所 x_2 での値である。つまり、 $\frac{1}{2}mv^2 + U$ という量は物体の運動する間、どの時刻どの場所でも同じ値を保つ。 $\frac{1}{2}mv^2$ を「運動エネルギー」、 $U(x)$ を「位置エネルギー」と呼んで、「運動エネルギーと位置エネルギーの和は保存する」という法則（力学的エネルギー保存の法則）が導かれたわけである。位置エネルギー $U(x)$ と力 $F(x)$ の関係は

$$U(x) = - \int F(x)dx \quad \text{または} \quad F(x) = - \frac{d}{dx}U(x) \tag{3.10}$$

である。

以上ざっと位置エネルギーとは何であったかを思い出した。1 次元の場合で例を三つあげておく。

重力の位置エネルギー

地球上の重力は、どこでも mg である（厳密に言うと g は標高や緯度などによって多少変化するが、そこは無視している）。上で位置エネルギーが定義できる条件は「場所のみの関数であること」と書いたが、「どこでも mg 」も（定数を与える）立派な関数であるから、位置エネルギーが定義できる。座標 x を上向き正に取れば、力は下向きになるので、 $F(x) = -mg$ と考えればよく、この場合の位置エネルギーは $U = mgx$ である。

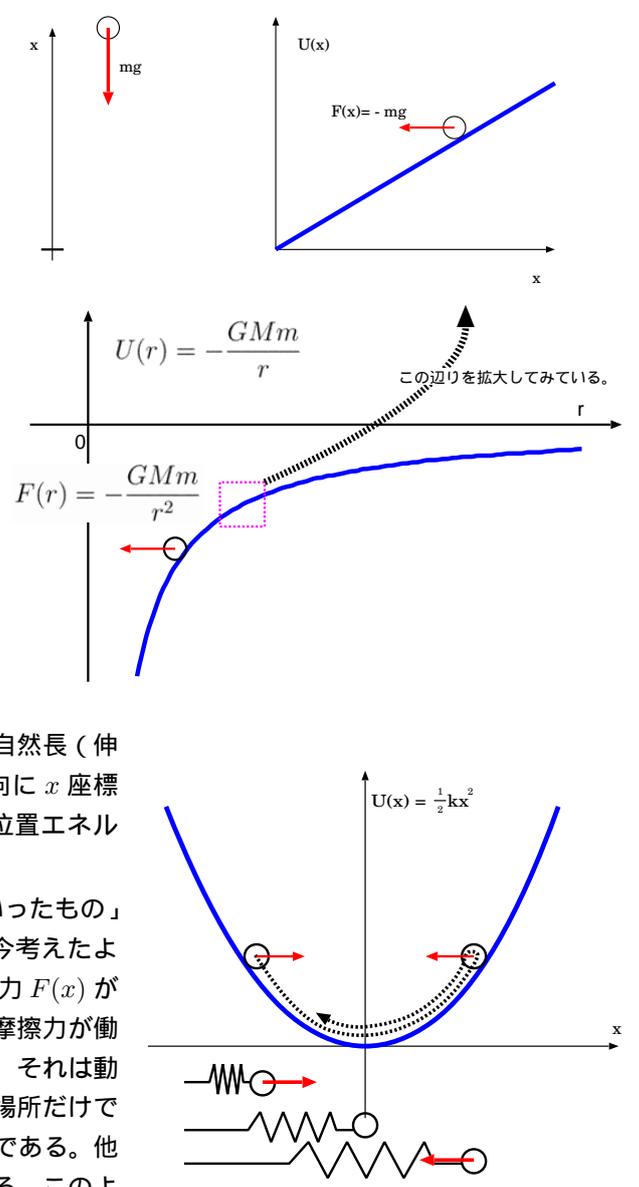
万有引力の位置エネルギー

質量 M の物体が質量 m の物体に及ぼす万有引力は、 $-\frac{GMm}{r^2}$ となる（マイナスを付けたのは、 r の負方向であることを強調した）。この場合の位置エネルギーは $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ となる。万有引力の変化が十分小さいと近似できるほど、狭い範囲で考えるならば、上の重力と同じになる。ただし、位置エネルギーの原点は $r = \infty$ に取っている（上の重力でもそうだが、エネルギーの原点は任意にとってかまわない。大事なのは傾きである）。

ばねによる位置エネルギー

ばねが x だけのびている時の力の大きさは kx である。ばねが自然長（伸び縮み無し）の時の物体の位置を $x = 0$ としてばねが伸びる方向に x 座標を取ると、力は逆を向くから $F(x) = -kx$ となる。これから、位置エネルギーは $\frac{1}{2}kx^2$ となる。

結局エネルギーとは何かといえば、「力を位置座標で積分していったもの」または、「微分すると力になるもの」という認識でいいだろう。今考えたような1次元問題の場合、位置エネルギーが定義できるためには「力 $F(x)$ が場所のみの関数である」という条件が必要である。たとえば「動摩擦力が働くとエネルギーが保存しない」というのはよく言われることだが、それは動摩擦力に「物体の運動方向と逆向きに働く」という性質があり、場所だけではなく「物体がどちらに運動しているか」にも依存しているからである。他にも空気抵抗（物体の速度に依存）が働くような場合も同様である。このような場合は上のような計算を行っても、運動エネルギーと位置エネルギーの和の形にまとめることはできない。



上の三つの例のうち、重力と万有引力の位置エネルギーはまさに「位置」に対応したエネルギーであり、ばねによる位置エネルギーは「位置」というよりは「ばね」という物体の「状態」に対応した位置エネルギーである。力を出して仕事をする事ができるものは、なんらかの形でエネルギーを持っていて、トータルのエネルギーが保存するようになっている。

力 $F(x)$ はエネルギーの微分の逆符号 $-\frac{d}{dx}U(x)$ に等しいが、これはつまり位置エネルギーのグラフを書いた時「グラフの坂を下りる方向に、その坂の傾きに比例した力がかかる」ということになる。つまり、ばねの位置エネルギーのグラフの縦軸を「山の高さ」のように考えて、その山を降りる方向に力が働くのだ、というイメージを持つことができる(マイナス符号がつく理由は「降りる方向」だからである)。

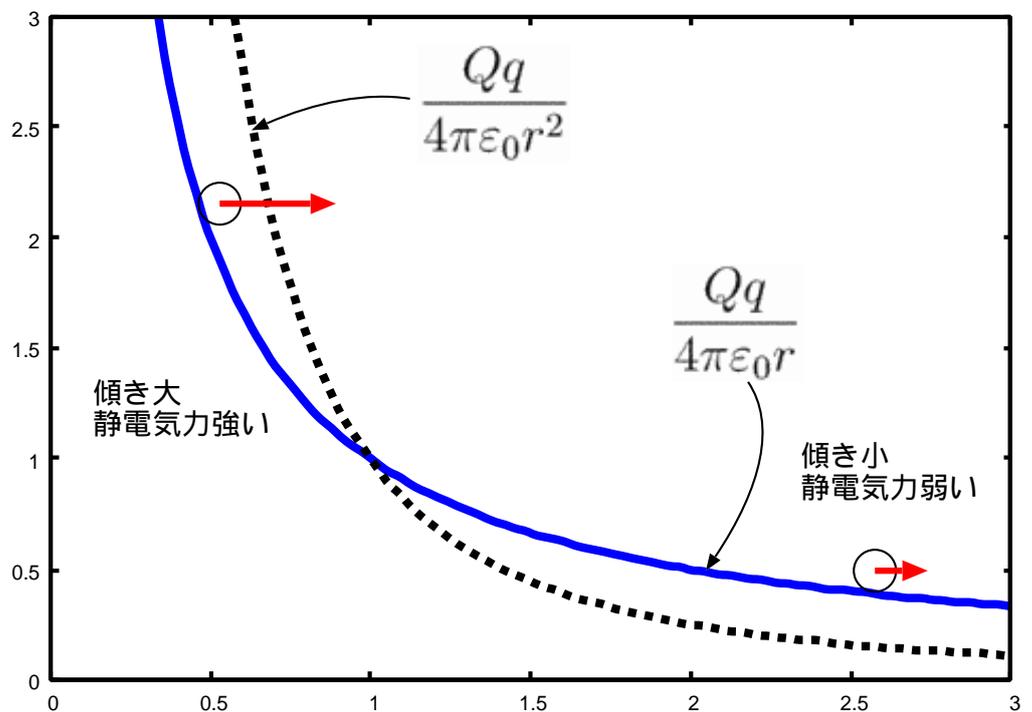
次の節で電位を定義するが、電位も同様に「電位の高い所から電位の低い所へと降りる方向に静電気力が働く(ただし+電荷の場合)」というイメージ(電位=架空の高さ)を持って考えるとわかりやすい。

3.1.1 1次元の静電気力の位置エネルギーと電位

まずは1次元の場合で、静電気力による位置エネルギーを考え、電位の定義を示しておこう²。

静電気力は(電荷)×(電場 \vec{E}) で表される。電場 \vec{E} は場所の関数であるから、静電気力も場所の関数となり、位置エネルギーを定義することができる(空間が2次元以上の時は、位置エネルギーが定義できるために更に条件が必要だが、それは後で述べる)。

なじみ深い、点電荷 Q による電場 $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ の場合で考えてみると、 $F(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ であるから、対応する位置エネルギーは $U(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$ である($F(r) = -\frac{d}{dr}U(r)$ を確認せよ)³。右のグラフで、 $U(r)$ の傾きが大きいところは $F(r)$ も大きくなっていることに注意しよう。



さて、このようにして静電気力による位置エネルギーが定義できたら、その位置エネルギーを単位電荷あたりに直したものととして、電位を定義する。すなわち、「電荷 q に静電気力 \vec{F} が働く時、そこには $\vec{E} = \frac{1}{q}\vec{F}$ の電場 \vec{E} がある」として「単位電荷あたりに働く力」で電場 \vec{E} を定義した時と同じ考え方で、

【電位の定義】

試験電荷 q をある場所に置いたと仮定した時、その試験電荷が静電気力に由来する位置エネルギーを U だけ持つならば、その場所の電位(または静電ポテンシャル)は $V = \frac{U}{q}$ である。

という定義で電位(もしくは静電ポテンシャル⁴) V を導入する。

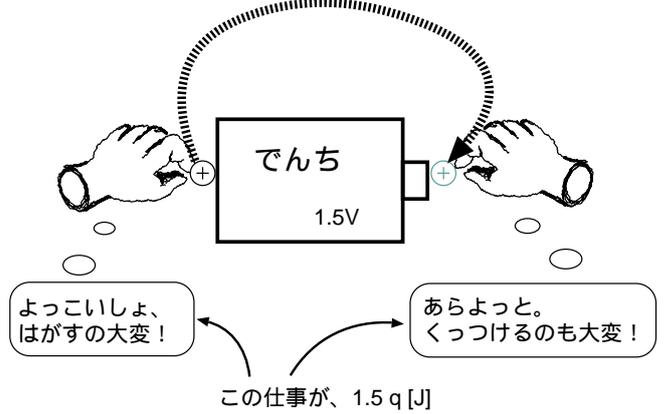
²現実の我々の空間は3次元なので、3次元的に考えなくてはいけない。本節はあくまで「練習」であり、イメージをつかむためのものである。

³このあたりの計算は、万有引力 $\frac{GMm}{r^2}$ に対応して位置エネルギー $-\frac{GMm}{r}$ が決まるのと同様である。符号が違うのは $Qq > 0$ ならば静電気力は斥力だが、万有引力は名前通り引力であることに由来する。斥力なら近づけるほどエネルギーは増すが、引力なら遠ざけるほどエネルギーが増す。

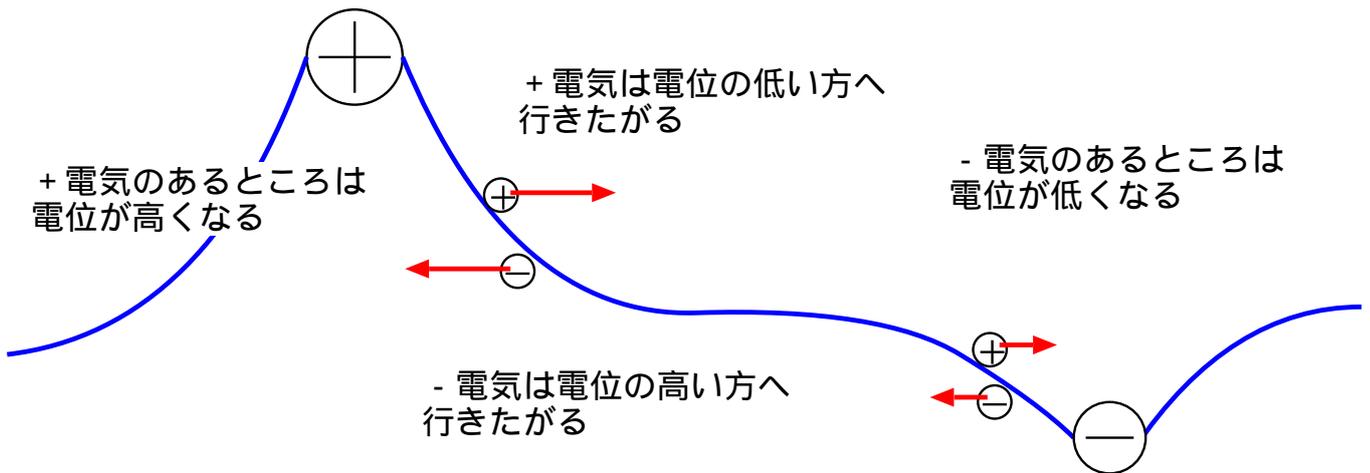
⁴「静電ポテンシャル」と「ポテンシャルエネルギー」は言葉は似ているが、前者は単位電荷あたりに直したもの、後者はエネルギーそのものであるから、少し違う。

位置エネルギー U と力 \vec{F} が $F = -\frac{d}{dr}U$ という関係にあったのだから、電場 \vec{E} と電位は $E = -\frac{d}{dr}V$ という関係にある（正確な式は、3次元の話をしてから出そう）。やはり「電位 V を降りる方向に電場 \vec{E} ができる」という形になる。

電位の単位は [V]（ボルト）である⁵。市販の乾電池には 1.5V と書いてあるが、あれは電池の+極と-極の間に 1.5V 分の電位差があるということを意味する。つまり、試験電荷 q が-極付近にある時と+極付近にある時で、 $1.5 \times q[\text{J}]$ の位置エネルギー差があるということである。つまり、電池の-極から+極まで、 $q[\text{C}]$ の試験電荷を運ぶと、 $1.5q[\text{J}]$ の仕事をすることになる。そのような電位差が発生する理由は、電池の内部に-極から+極に向けて正電荷を（あるいは+極から-極に向けて負電荷を）運び込む作用（市販の電池の場合は化学反応による作用である）があるからである。試験電荷は（ $q > 0$ なら）-極に引っ張られ、+極から反発される。よって試験電荷を（そこに張り付こうとする）-極からひっぱがして、（くっつきたがらない）+極に押しつけるには、それだけの「仕事」がいるのである⁶。



上で考えた点電荷 Q がある場合に試験電荷の持つ位置エネルギーは $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$ だったので、この位置エネルギーを試験電荷を単位電荷に直したものが電位となる。すなわち、点電荷 Q によって、そこから距離 r の場所に生じる電位は $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ である。つまり、+電荷付近は電位が高くなり、-電荷付近は電位が低くなる。定義により、エネルギーが低くなる方向に力を受けるので、+電荷は電位が低くなる方向へ、-電荷は電位が高くなる方向へと力を受けることになる。



上のグラフの縦軸は電位であって、 z 軸などの実際の位置座標ではない。イメージとしては、電位というのは「架空の山の高さ」であり、+電荷はその架空の山をすべり下りようとする。電位を作るのも電荷であり、+電荷のある場所が盛り上がり、-電荷のある場所が盛り下がる。その様子はあたかも電位というものが弾力のあるゴム膜のようなもの（トランポリンを思い浮かべるとよい）でできていて、+電荷があるところは（架空の）上に引っ張られ、-電荷のあるところは（架空の）下へと引っ張られているようである（このイメージについても、後で3次的に考え直そう）。

電場 \vec{E} に関して重ね合わせの原理が使えたのだから、電位に関して重ね合わせの原理は使える。すなわち、複数の電荷のつくる電位は、各々の電荷の作る電位の足し算で計算される。今はまだ1次元の話しかしていないのでそのありがたみがわかりにくいと思うが、2次元以上では電場 \vec{E} がベクトルであり、電位がスカラーであることは非常に大きな差になる。電位の和の計算にはベクトル和（平行四辺形の法則）が必要だが電位の和の計算は単なる足し算なのである。

⁵電池の発明者であるヴォルタにちなむ。
⁶なお、現実的な問題では q はかなり小さい（前にも書いたように、日常では 1C の電荷に出会うことはまずない）。よって $1.5q[\text{J}]$ の仕事というのは非常に小さく、実際にこれをやっても「ああ仕事をしたなあ」と実感することはないだろう。

3.2 3次元の空間で考える電位

現実の空間は3次元だから、ここまでで述べた1次元的な考えだけでは足りない。そこでこの節では3次元の場合で位置エネルギーを定義する方法について考えた後、3次元の空間での電場 \vec{E} と電位の関係を考えていこう。

3.2.1 3次元の空間における位置エネルギー

3次元で考える時には、力 $F(x)$ がベクトル $\vec{F}(x)$ となり、 (F_x, F_y, F_z) のように次元の数だけの成分を持つ。ゆえに、仕事の定義も、

$$\int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} \tag{3.11}$$

のように力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ と変位ベクトル $d\vec{x} = (dx, dy, dz)$ の内積の積分で定義される。

この力に対応するエネルギー $U(x, y, z)$ が定義できたとするなら、

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{3.12}$$

のように力を表現することができる。これは1次元の時に $F = -\frac{dU}{dx}$ と考えたことからの自然な拡張である。ただし、場合によってはこのように書けない場合もあり得る。ちゃんとエネルギーが定義できるための条件は後ではっきりさせるが、ここではとりあえず定義できる場合だけを考えるということで先へ進もう（後でちゃんと考察するので心配なく）。

これをまとめて、

$$\begin{aligned} F_x \vec{e}_x &= -\vec{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} \\ + F_y \vec{e}_y &= -\vec{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} \\ + F_z \vec{e}_z &= -\vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = -\vec{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} - \vec{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} - \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

と表現する。この式の右辺をよく見ると、ナブラ記号 $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ を使って、 $-\vec{\nabla}U$ と表現できる。このように、関数 $\Phi(\vec{x})$ が与えられた時に、ベクトル $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$ を作る演算を「グラディエント (gradient)」（日本語では「勾配」）と呼ぶ。記号 grad を使って、

grad の定義

$$\text{grad}\Phi = \vec{\nabla}\Phi = \vec{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{3.14}$$

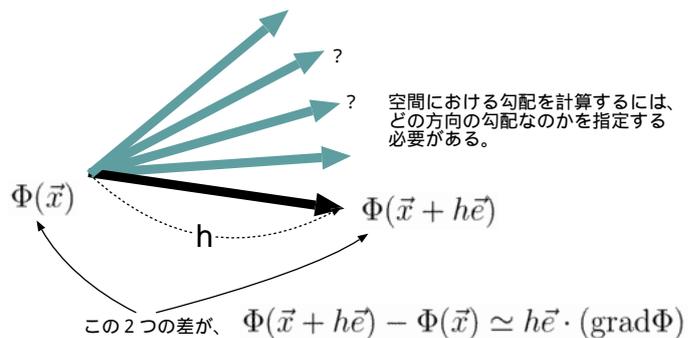
と表現する。

grad も div も（後から出てくる rot も） $\vec{\nabla}$ という微分をかける演算であるが、その意味はそれぞれ違うので気をつけること。特に、div はベクトルにナブラをかけて結果はスカラーとなるが、grad はスカラーにナブラをかけて、結果がベクトルとなる。

grad の意味を補足しておく。 $\vec{\nabla}$ による微分は

$$\vec{e} \cdot (\text{grad}\Phi) = \vec{e} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(\vec{x} + h\vec{e}) - \Phi(\vec{x})}{h} \tag{3.15}$$

のように定義されている。つまり、ある場所 \vec{x} での Φ と、そこから h だけ離れた場所 $\vec{x} + h\vec{e}$ での Φ の差を計算して、それを h で割る。つまり、距離 h 移動した時に関数 Φ がどの程度変化したかの割合（勾配）を計算するものである。普通の微分に比べて大きく違うところは、単に x を h 増やすのではなく、ある方向（その方向を指定するのに \vec{e} が必要であった）に h だけ離れた場所との比較を行う。



というわけで、grad はスカラーからベクトルを作る計算であるが、そうやってできたベクトル $\text{grad}\Phi$ と単位ベクトル \vec{e} と内積をとってやると、その \vec{e} が向いている方向の Φ の勾配を計算できるのである。

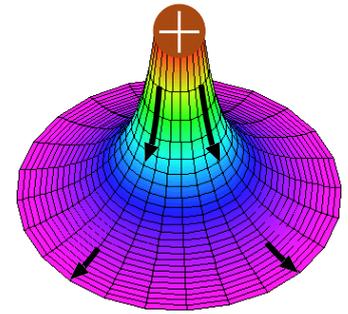
3.2.2 電位と電場 \vec{E} の関係

以上述べてきたように、位置エネルギーの定義が可能な場合、位置エネルギーの勾配の逆符号がその物体に働く力となる。つまり、 $\vec{F} = -\text{grad}U$ である。単位電荷あたりの力を電場 \vec{E} と定義し、単位電荷あたりの位置エネルギーを電位と定義したのだから、上の力とエネルギーの関係を単位電荷あたりに直すと「電位の勾配の逆符号が電場 \vec{E} である」ということになる。

つまり、電場 \vec{E} と電位の関係は以下の通りである。

電場 \vec{E} と電位の関係

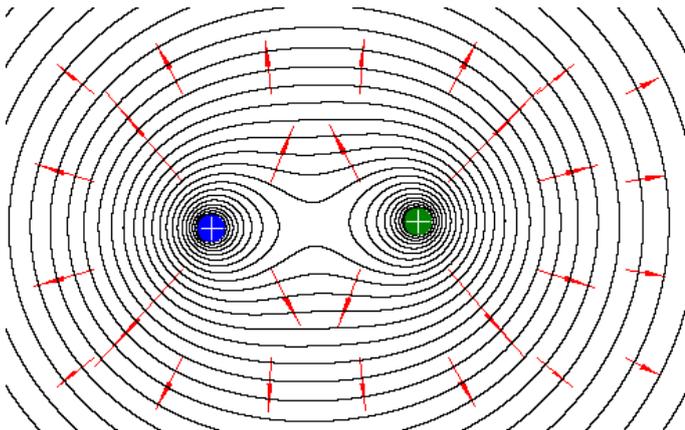
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \tag{3.16}$$



2次元の場合で、 V と \vec{E} を図で表現しておこう。

+ 電荷のあるところが電位が高くなっている、という様子を右の図で表現した。図の上はもちろん空間の z 軸ではなく、架空の高さであるところの V 軸である。+ 電荷のあるところは、ゴム膜が「上」にひっぱられるようになって電位が高くなる。

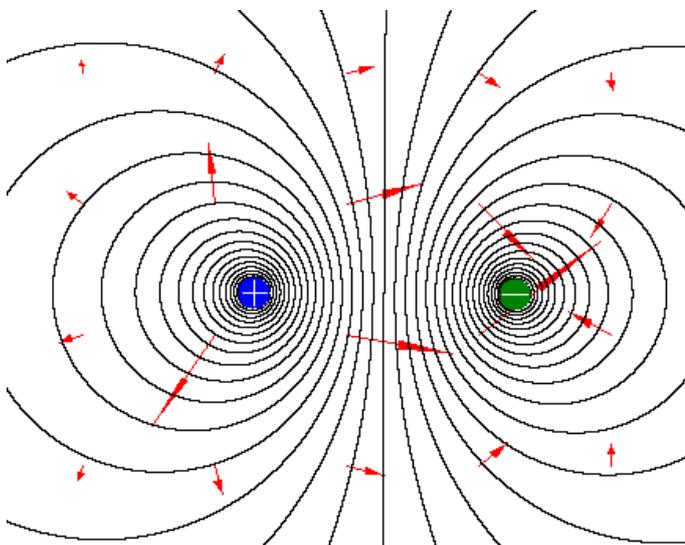
grad の意味するところは、名前の通り「山の勾配」である。 V を山の高さと見た時に、grad によって計算できるのは、その方向に移動した時に「山の高さ」 V がどんな割合で増加するかである。ベクトル $\text{grad}V$ の向きは勾配がもっとも急な方向を意味する。その大きさはもちろん、そちらへの勾配である。右の図は $-\text{grad}V$ を表す。マイナス符号が着くことで「すべり落ちる方向」を向いたベクトルとなる。電荷に近づくほど、勾配も急になるので、電荷に近づくほど電場 \vec{E} が強い。



左図は、二つの等しい+電荷の作る電位の様子を等電位線で表したものである。いきなり3次元的に考えるのは難しいので、まず図をよく見て、等電位線(面)のイメージをつかんでもらいたい。+電荷のあるところが「山」になり、そこから滑り降りる方向に電場 \vec{E} ができている、というイメージである。

このように、電位という「架空の高さ」に対応する等高線を「等電位線」と呼ぶ。なお、3次元的に考える時は等電位な場所は線ではなく面状になるので「等電位面」と呼ぶことが多い。

矢印は電場 \vec{E} を示している。電場 \vec{E} の向きは常に等電位面に垂直である。矢印は、山(+電荷のあるところ)から転げ落ちる方向に向いている。



左の図は、絶対値が等しい正負の電荷がある場合の等電位面の様子である。こちらの場合には+電荷を「山」、-電荷を「谷」と考えて、山から下りて谷へ落ちる方向へと電場 \vec{E} ができる。前の図でもそうであったが、等電位面の間隔が狭い場所(混み合っている場所)は電場 \vec{E} が強い(等高線だと思えば、間隔が狭いということは急な坂=大きい勾配)ことがわかるだろう。

ここでもしこの電荷の間の距離を縮めたとすると、電荷と電荷の間にある電場 \vec{E} は強くなるが、それは山と谷が近づくことでより斜面が急になるからである。一方、遠方での電場 \vec{E} はむしろ弱まるが、それは山と谷が重なり合うことで、遠方では二つの効果が消し合ってしまうからだと考えられる。

電気力線と等電位面を両方書くと、この二つは常に垂直に交わる(電場 \vec{E} ベクトルは等電位面の法線ベクトルになる)。等電位面上を動くかぎり、位置エネルギーが変化

しない。つまり、等電位面上を移動する限り、電場 \vec{E} は仕事をしない。力が働くのに仕事をしないということは、移動方向と力の方向が垂直だ、ということである。よって、等電位面は電気力線と垂直になる⁷。

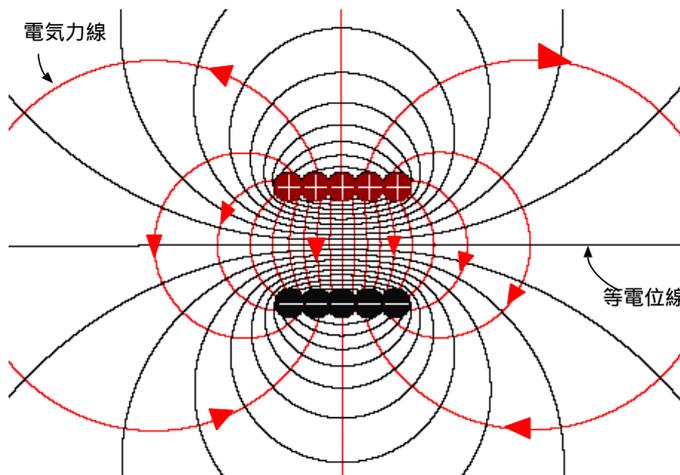
これを数式で表現しよう。ある点 \vec{x} において、等電位の接線方向を向くベクトルを \vec{a} とする。等電位の接線方向ということは、その方向に微小な距離だけ移動しても電位は変化しないから、

$$V(\vec{x} + \epsilon\vec{a}) - V(\vec{x}) = 0 \tag{3.17}$$

が成立する (ϵ は微小量。 \vec{a} は微小ではないが $\epsilon\vec{a}$ は微小になる)。 ϵ が微小であるから、上の式は

$$\epsilon\vec{a} \cdot \text{grad}V = 0 \quad \text{すなわち、} \quad -\epsilon\vec{a} \cdot \vec{E} = 0 \tag{3.18}$$

と書き直すことができる。これはつまり、 \vec{E} が等電位の接線方向のベクトルと垂直だということであり、 \vec{E} は等電位の法線だということになる。



左の図はコンデンサの場合の電気力線と等電位面を描いたものである。

コンデンサの場合、電気力線は極板間に集中し、少しだけ外に漏れるという形になる。そのため、「コンデンサの外には電場 \vec{E} は0とする」という近似を使うことが多い。

電位もコンデンサ外では変化（傾きもしくは勾配）が小さくなっていることに注意しよう。見てわかるように、電気力線の密度が高いところでは、等電位の間隔も狭くなっている。電気力線の混雑も等電位の混雑も、どちらも「電場 \vec{E} が強い」ということを表現しているわけである。

3.2.3 位置エネルギーが定義できる条件

さて、前節で、力を $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ と書いたが、これはあくまで、「力に対応するエネルギーが定義できたとするなら」という条件付きであった。

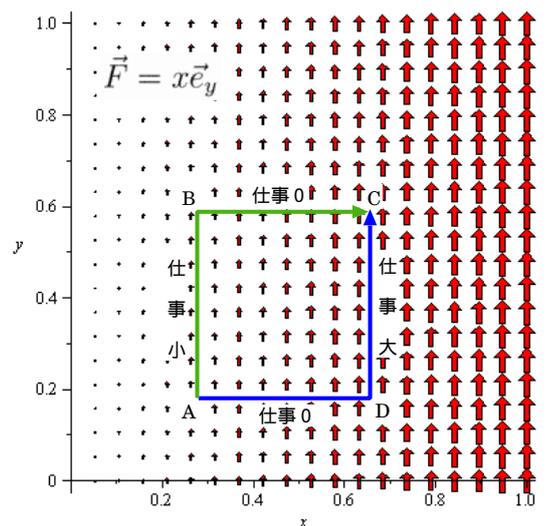
2次元もしくは3次元の中で考える時には、上に上げた「力 $F(x)$ が場所のみの関数である」以外にも、エネルギーが定義できるための条件がさらに必要になってくる。

というのは、一般に場所の関数になっている力 \vec{F} が与えられた時、それが U の勾配の逆符号で与えられるとは限らない。たとえば単純な例として $\vec{F} = x\vec{e}_y = (0, x, 0)$ を考えよう。 $F_y = x$ であるから $U = xy$ と予想されるが、そうだとすると $\frac{\partial U}{\partial x} = y$ となってしまうと、 F_x が0であることと矛盾する。つまり、 $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ と書くことはできない。

ではどういう時にはエネルギーが定義でき、どんな時にはできないのだろうか？—そのことを単純に判定する方法はないだろうか？

1次元ならある点からある点へ移動する方法は一つしかないの、力を距離で積分した時の答は一つしかありえない。ところが3次元の空間ではある点から別の点に行くのに、いろんな方法（道筋）があり得るのである。そして、違う道筋を通った結果積分の結果が違っていたとすると、「いったいどっちの道筋を通った結果を“エネルギー”とすればいいの？」という疑問が発生してしまうのである。

実際、上の例の場合、仕事が経路に依存する。それは図の A B C と図の A D C で仕事を考えてみるとすぐわかる。ノンゼロの仕事は A B と C D であるが、あきらかに C D の方が仕事大きい。エネルギーは「仕事の



⁷これを現実の山で理解すると、「山の斜面に丸いものを置いた時に転がり落ちる方向は等高線と垂直だ」ということである。

分だけ増える量」として定義されているのだから、A点での位置エネルギーを定めた時、C点での位置エネルギーは、経路によって違うということになってしまっていて、場所の関数としてエネルギーを定義することは不可能である。

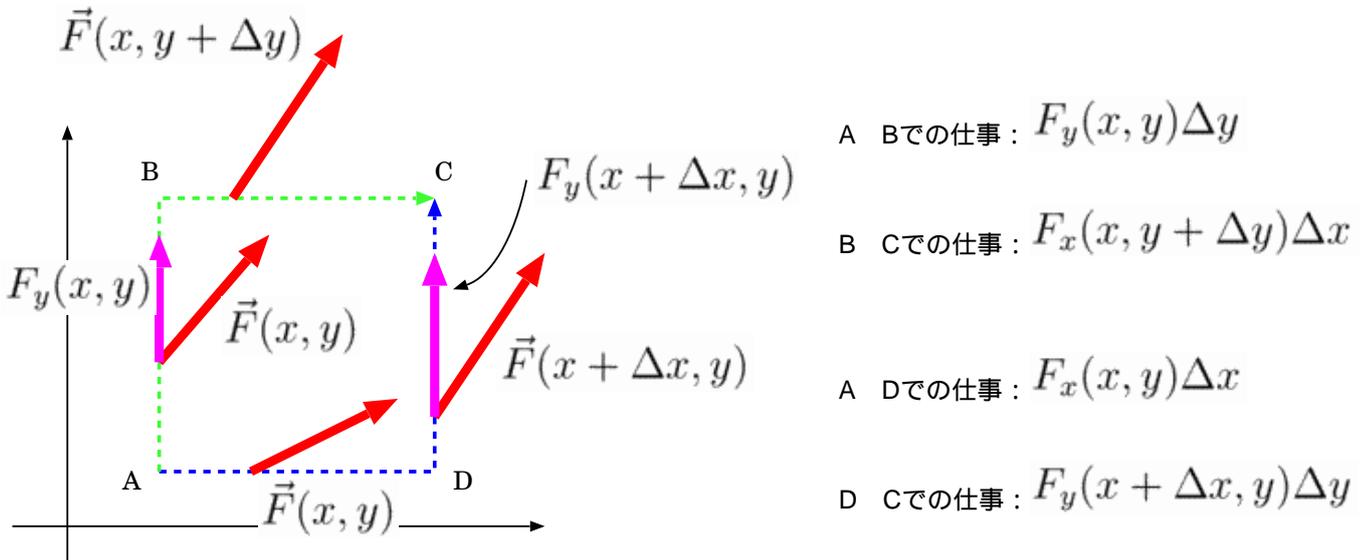
そのため、エネルギーが定義できるためには、「力を位置座標で積分していったもの(すなわち仕事)が経路に依存しない」という条件が必要になってくるわけである。このような性質を持つ力を「保存力」と呼ぶ。後でちゃんと示すが、静電気力は保存力である。

保存力である場合、 $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ という形で、位置エネルギー U を定義することができる。重力、ばねの弾性力、万有引力なども保存力であり、対応する位置エネルギーを定義可能である。

3.3 rot と位置エネルギーの存在

3.3.1 仕事が経路に依存しない条件

仕事が出発点と到着点だけに依存し、経路に依存しないためにはどんな条件が必要であろうか?—それを求めるために、またしても物理の常套手段である「細かく区切って考える」を使うことにしよう。つまり、出発点と到着点が非常に近い点にある場合を考える。簡単のため、図の $A(x, y)$ $D(x + \Delta x, y)$ $C(x + \Delta x, y + \Delta y)$ という経路と、 $A(x, y)$ $B(x, y + \Delta y)$ $C(x + \Delta x, y + \Delta y)$ という経路を比較するところから始める。例によって $\Delta x, \Delta y$ は微小と考えるので、各経路における仕事は、以下の図のように計算できる。



下二つを足したもの(A D C経路での仕事)から上二つを足したもの(A B C経路での仕事)を引くと、

$$F_x(x, y)\Delta x + F_y(x + \Delta x, y)\Delta y - F_y(x, y)\Delta y - F_x(x, y + \Delta y)\Delta x \simeq \left(\frac{\partial}{\partial x}F_y\right)\Delta x\Delta y - \left(\frac{\partial}{\partial y}F_x\right)\Delta x\Delta y \quad (3.19)$$

となる。すなわち、経路によらずに仕事が決まる条件は、

$$\frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x = 0 \quad (3.20)$$

である。

ここでは xy 平面で考えたのでこの条件が出たわけであるが、 yz 面や zx 面についても同じ条件が成立せねばならないから、

$$\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}F_x - \frac{\partial}{\partial x}F_z = 0 \quad (3.22)$$

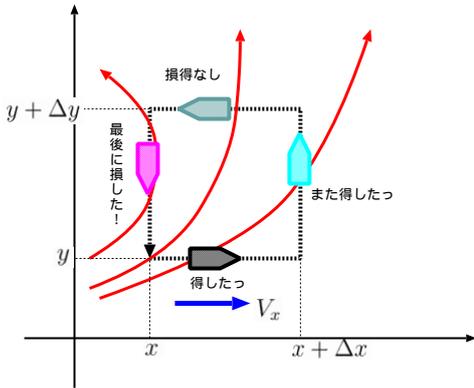
も合わせて、3つの条件が必要となる。逆にこの3つが成立すれば、この微小な四辺形を組み合わせることでどんな形の面でも作ることができるであろうから、仕事は経路に全くよらなくなる。この3つの左辺を、 xy 面での条件を z 成分、 yz 面での条件を x 成分、 zx 面での条件を y 成分としてベクトルとしてまとめたもの

rot の定義

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y, \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z, \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \right) \quad (3.23)$$

と定義し、「ローテーション (rotation)」と呼ぶ。日本語では「回転」と呼ぶ。なぜ回転と呼ぶのかは、次の節のイメージで理解するとよい。記号は curl (カール) を使うこともある。

3.3.2 rot のイメージ：ボートの周回



rot の意味を、水の流場で考えよう。水面の上に仮想的なボートを浮かべてみる。そして、その仮想的なボートが四辺形の形に水面を運航する。この時「ボートは水の流れにどれだけ押しもらったでしょうか」という問題を考えると、この答えを出すために必要になるのが rot なのである。上の図の点線のように水が流れていて、四辺形の形に仮想的ボートが動いたとする。最初ボートは右へ移動し、流れは少し右に傾いているから、ちょっと得をする。次に上へ進む時も得をする。その次には左へ進むが、この時は流れと運動方向が垂直に近いのでそれほど得も、損もしない。最後の下への移動では流れに逆らっているので損をする。これを1サイクル分足し上げたものが rot の正体である。

ではこれを式で書こう。まず最初の右へ動くとき、どれくらい得をするかということ、 $V_x \Delta x$ くらいであろう。上の方で左に動く時は、逆向きなので $-V_x \Delta x$ になる。ここで「 $V_x \Delta x$ と $-V_x \Delta x$ だから、足したらゼロになる」と思ってしまう⁸。この場所では y 座標が Δy だけ増えているのだから、

$$\underbrace{-V_x(x, y + \Delta y, z) \Delta x}_{\text{上の辺での得}} + \underbrace{V_x(x, y, z) \Delta x}_{\text{下の辺での得}} \quad (3.24)$$

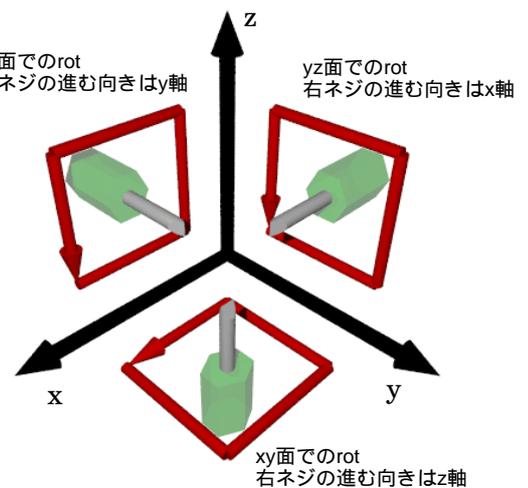
と解釈すべきなのである。例によって $V_x(x, y + \Delta y) = V_x(x, y) + \frac{\partial V_x}{\partial y} \Delta y + \dots$ とテーラー展開すれば、上と下の辺での得は $-\frac{\partial V_x}{\partial y} \Delta x \Delta y$ となる。同様の計算を、右の辺の上向き移動の部分と、左の辺の下向き移動の部分についておこなうと、今度は関係するのは V_y であり、 $x + \Delta x$ の位置 (右の辺) が + で、 x の位置 (左の辺) が + で効くので、 $\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}\right) \Delta x \Delta y$ となる。

まとめると、

$$\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \quad (3.25)$$

とまとまる。これを単位面積あたりに換算した、 $\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$ が rot である (実際には、rot の z 成分)。

「rot はなぜベクトルなんだろう?」と疑問に思う人がいるかもしれない。それは、今考えたように微小な四辺形一個一個に対して (単位面積当たりの密度として) 定義されているのが rot であるからである。四辺形がどんな向きを向いているかによって rot の値は当然、違うからである。そのベクトルの向きは、四辺形の運航を右ネジを回す向きと考えた時のネジの進む向きとする。ある一点を指定しても、その場所に四辺形はたくさん (いろんな方向を向いて) 書ける。だから、「rot はベクトルで x 成分と y 成分と z 成分がある」という表現は正しいのだが、より正確には、「rot には yz 面に垂直な成分と zx 面に垂直な成分と xy 面に垂直な成分がある」(もちろん、「 x 成分」は「 yz 面に垂直な成分」のように対応する) と言うべきである⁹。



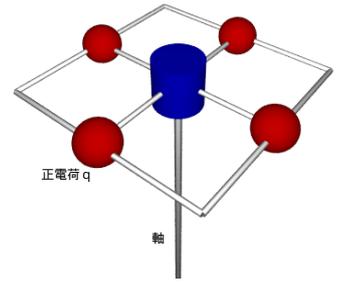
⁸これは、div の時の話と同じ。今は微小な領域でのちょっとした差を勘定している。

⁹もし3次元じゃない空間を考えたら、「面積に対応する量」はベクトルではなくなる。たとえば2次元では面積は1つ、ベクトルは2成分。4次元なら面積は6つあるがベクトルは4成分。面積に対応する量がベクトルと同じになるのは3次元のみ。我々の住むこの空間が3次元であることには何か深い意味があるのだろうか???

3.3.3 rot のイメージ 2 : 電場車

rot の意味を「電場車」を使って説明しよう。電場車¹⁰とは、一辺 a の四辺形の辺の中心に正電荷 q をくりつけたものを用意し、四辺形の中央に軸をつけてくるくる回転できるようにしたものである(ただし、腕の長さ a については、後で $a \rightarrow 0$ の極限をとるものとする)。風を受けた風車が回るように、電場の中にこの装置を入れたら回るだろうか?—それを判定するために、この装置に働く力の軸回りのモーメントを求めてみよう。

図のように座標系をおいて計算する。図に書き込んだ $(x + \frac{a}{2}, y)$ との点にある電荷の受ける力は $q\vec{E}(x + \frac{a}{2}, y)$ であるが、軸の周りに回転させるモーメントを考えると、 \vec{E} の y 成分 E_y のみが寄与することになる。つまりこの部分の電荷による z 軸回りのモーメント(反時計回りに回そうとする方向を正とする)は



$$qE_y \left(x + \frac{a}{2}, y\right) \frac{a}{2} \tag{3.26}$$

である。同様に考えると、 $(x, y + \frac{a}{2})$ にある電荷によるモーメントは

$$-qE_x \left(x, y + \frac{a}{2}\right) \frac{a}{2} \tag{3.27}$$

となる。この力は ($E_x > 0$ の場合) 電場車を時計回りに回そうとするモーメントとなるため、上の式に比べてマイナス符号がついている。このように符号に気をつけながら 4 つの電荷に働く力のモーメントの合計を求めると、

$$q \left[E_y \left(x + \frac{a}{2}, y\right) - E_x \left(x, y + \frac{a}{2}\right) - E_y \left(x - \frac{a}{2}, y\right) + E_x \left(x, y - \frac{a}{2}\right) \right] \frac{a}{2} \tag{3.28}$$

となる。 a が微小であるとして展開すれば、

$$E_y \left(x + \frac{a}{2}, y\right) - E_y \left(x - \frac{a}{2}, y\right) = \frac{\partial}{\partial x} E_y(x, y)a \tag{3.29}$$

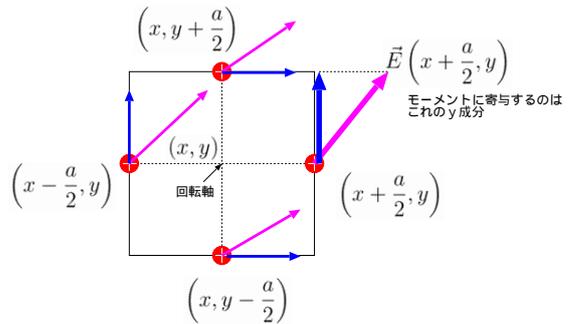
となるので、モーメントは

$$q \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \frac{a^2}{2} \tag{3.30}$$

と書くことができる。ゆえに、 z 軸方向を向いた電場車は $\text{rot} \vec{E}$ の z 成分に比例するモーメントを受けることがわかる。

.....
【FAQ】「 $(\text{rot} \vec{E})_x = \partial_y E_z - \partial_z E_y$ の右边は $y \rightarrow z$ の順番、 $(\text{rot} \vec{E})_z = \partial_x E_y - \partial_y E_x$ の右边は $x \rightarrow y$ の順番、とアルファベットの順番通りなのに、なぜ $(\text{rot} \vec{E})_y = \partial_z E_x - \partial_x E_z$ の右边は $z \rightarrow x$ と逆順なのですか?」

これは、この「電場車」がモーメントを受けて回ったと仮定して、その時に「電場車」が右ネジであったとしたら進む方向を rot の向きとする、という定義になっているから。「 x 軸から y 軸へ」という方向にネジが回ると、 z 方向に、「 y 軸から z 軸へ」という方向にネジが回ると、 x 方向にネジが進む。これに対し、「 x 軸から z 軸へ」という方向にネジが回ると、 $-y$ 方向にネジが進んでしまう。だから、「 z 軸から x 軸へ」という方向にネジが回る方が正になるように定義してある。



.....
 さて、以上からわかるように、静電場の場合 $\text{rot} \vec{E} = 0$ にならなくてはいけないのだが、それはエネルギー保存則の観点から考えるとわかりやすい。上で書いた「電場車」を静電場の中に置いたとすると、このマシンは力を受け、くると回転を始めるだろう。しかしそれでは、このマシンは静電場からどんどんエネルギーを取り出せることになってしまうのである。そんなことはできるはずがない!—エネルギー保存則に反しているではないか¹¹。

rot は「回転」という名前がついているせいもあって、何か渦を巻くように回っている時だけ nonzero になると誤解する人が多いので注意しておく。

¹⁰ここで命名したもので、一般的に使われている名称ではない。風で回るのは「風車」だから、電場で回るのは「電場車」というわけ。

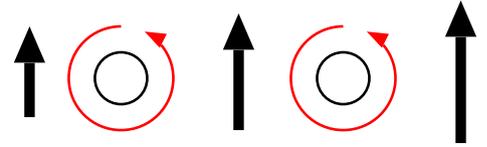
¹¹なお、風車の場合にエネルギーが取り出せるのは、風車が回ることによって風速が落ちる(風のエネルギーが減る)からである。後で時間的に変動する電磁場の場合は $\text{rot} \vec{E} \neq 0$ であることを学ぶが、その時は電荷の回転によって電磁場のエネルギーが減るという現象がちゃんと起こる。

前に示した $\vec{F} = x\vec{e}_y$ の場合、どこにも渦は発生していないが、rot は nonzero である ($\frac{\partial F_y}{\partial x} = 1$ だから)。

このような場合に「この時 rot は 0 ではない」ということを実感するためには、このような電場 \vec{E} があったとして、「その電場 \vec{E} の中で電場車が回り出すかどうか？」と考えるとわかりやすい。 $\vec{E} = x\vec{e}_y$ の場合、右の方が電場 \vec{E} が強いので、電場車は反時計回りに回転を始めるはずである。

rot のあるなしは、今考えている流れ自体に「渦」のような回転のあるなしを示しているわけではない。「回転」という名前に惑わされないように注意しよう。

右へ行くほど強くなる流れ



回転が起こる

なお、ベクトルの外積の式と rot の式を見比べると、

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{F} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y, & \frac{\partial}{\partial z}F_x - \frac{\partial}{\partial x}F_z, & \frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x \end{pmatrix} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y, & a_z b_x - a_x b_z, & a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.31}$$

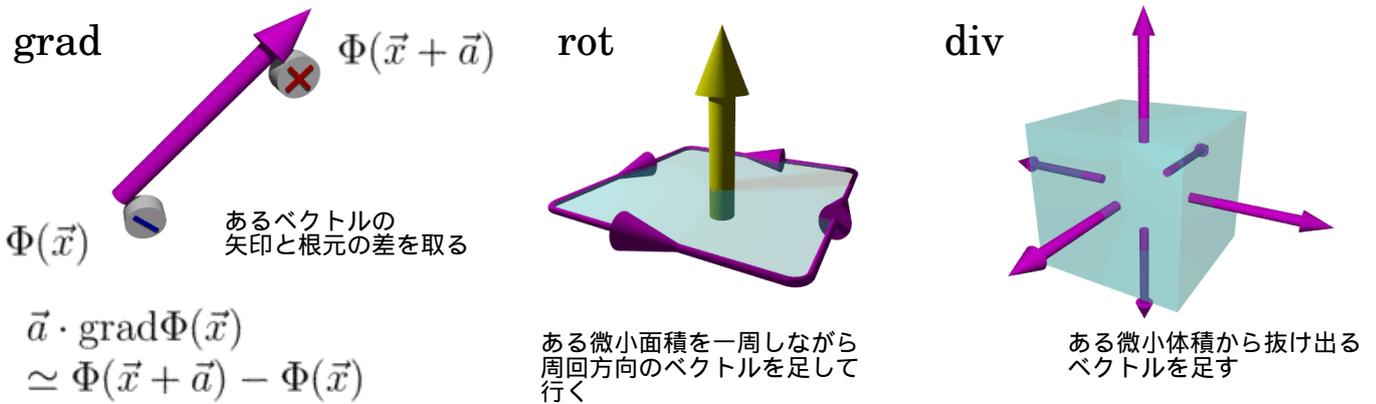
となり、同じ形をしていることがわかる。rot は、ちょうど $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ と $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ と外積を取っている計算になる。よって、

$$\text{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \tag{3.32}$$

という表記もよく使われる。

3.3.4 grad, rot, div の関係

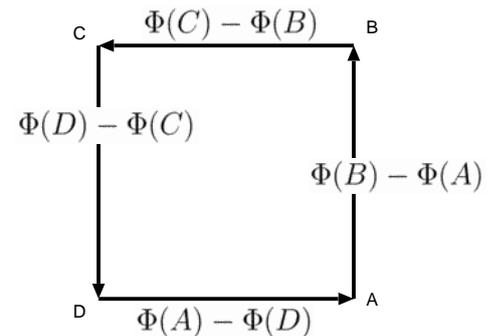
ここまでで、電磁気で使うベクトル解析で重要な div, rot, grad を説明したことになるが、この3つを図形的に表現すれば、



となる。単なる計算ツールとして数式を盲目的に覚えるのではなく、図形的イメージを頭に入れて欲しい。このイメージがあれば、以下にあげる法則がなぜ成立するのかが理解しやすい。

grad の rot が 0 であること

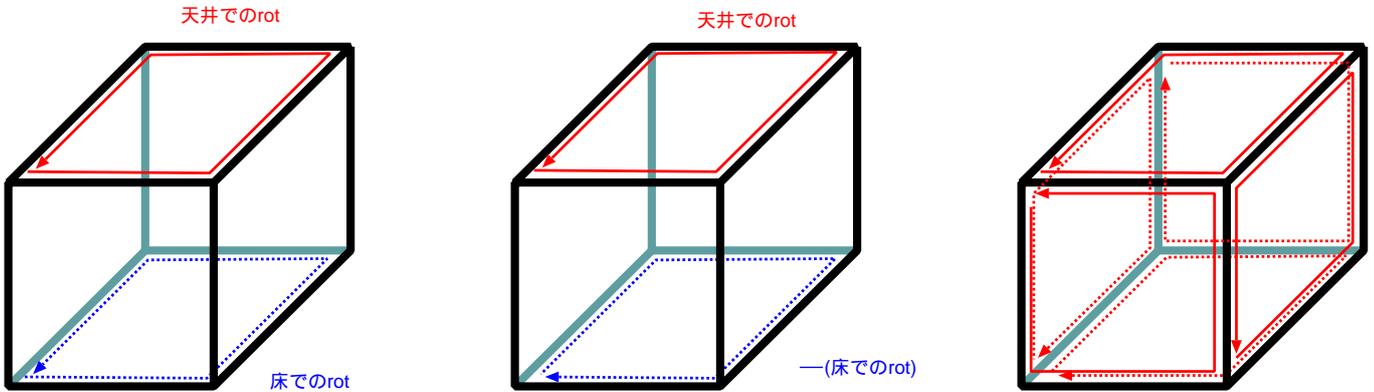
Φ がどんな関数であっても、 $\text{grad}\Phi$ の rot をとると 0 になる ($\text{rot}(\text{grad}\Phi) = 0$)。これは数式でもわかるが、grad と rot の意味を理解していれば、右図を見るだけで一発でわかる。grad は矢印の先の量と矢印の根本の量の差である。rot は四辺形の一週で定義されている。rot というのは、矢印 4 本もってきて四辺形を作るという操作に等しいのであるが、この 4 本の矢印が表しているものが grad の場合、「(矢の先)-(矢の根本)」という引き算なのだから、矢印が四辺形を描いて一周回るように足し算を繰り返せば、プラス符号付きの「矢の先」とマイナス符号付きの「矢の根本」が全て消しあい、答えが零になるのは当然である。



rot の div が 0 であること

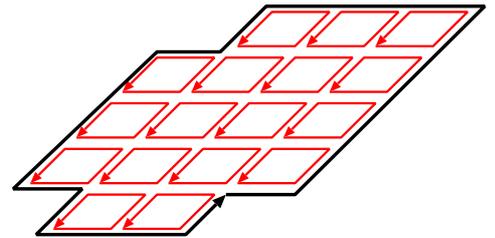
同じように考えると、任意のベクトル \vec{V} に対し、 $\text{div}(\text{rot}\vec{V}) = 0$ であることもわかる。これまた計算でも簡単にわかるのだが、ここでは図で説明しよう。

div は直方体、 rot は四辺形に対応するものである。 rot から div を作るというのはつまり、下の一番右の図のようにする、ということ。ここで天井の四辺形の rot と底面の四辺形の rot が逆回りをしているが、これは div が「天井 - 底」という引き算で表されているからである。他の6面についても、対面どうしの四辺形の中で、 rot は逆回りをしている。で、この図をよく見ると、一つの辺を2本ずつ、逆向き矢印が通っていることが理解できる。となれば、これも全部足せば零になるのは当然である。



ストークスの定理

rot の四辺形を直方体をなすように組み上げると div が零になるわけだが、直方体でなく任意の面を作るように組み上げていくと、ストークス (Stokes) の定理というのが証明できる。 rot の四辺形をあわせていくと、常にとなりあう矢印どうしは消しあうので、一番外側にある線 (つまり考えている面の外縁) の部分の積分だけが残ることになる。



これから、

$$\int_S (\text{rot}\vec{V}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{x} \tag{3.33}$$

という公式が作れる。 S はある面積を表し、 \int_S はその面の上の積分である。 ∂S は S の境界となる線を表す。 $\oint_{\partial S}$ は境界線の上での線積分である。これをストークスの定理と言う。

ストークスの定理は面をくみ上げていって作った定理であるが、立体を組み合わせて同様のことをすれば、ガウスの発散定理 ($\int_V \text{div}\vec{V}dV = \int_{\partial V} \vec{V} \cdot d\vec{S}$) ができた。この二つの公式は2次元と3次元という違いはあれ、同じ考え方で出てくる式なのである。ストークスの定理から、 $\text{rot}\vec{E} = 0$ であるような面の周りを一周する用に電荷を動かすと、電場のする仕事が0であることがわかる。

さて、以上で準備は終わったので、この話を静電気力の具体的な問題に適用して、「電位」という概念を使っていこう。

3.4 電位の満たすべき方程式

3.4.1 位置エネルギーの微分としてのクーロン力

点電荷によるクーロン力が

$$\vec{F} = -\text{grad} \left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = -\vec{\nabla} \left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = -\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \tag{3.34}$$

とも書けることは重要である。 $U = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$ はポテンシャルエネルギーであるから、これを単位電荷あたりに直した

$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ こそが点電荷による電位である。

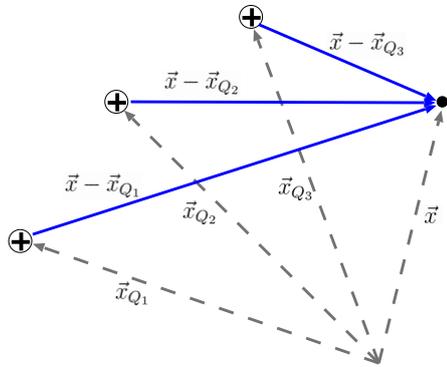
なお、電位の定義は $\vec{E} = -\text{grad}V$ であるが、 V に定数 C を加えても ($\text{grad}C = 0$ なので)、これから導かれる電場 \vec{E} は全く同じである ($\vec{E} = \text{grad}(V + c)$)。よって、電位の定義には常に定数を加えるという任意性がある (もともと、位置エネルギーにもあった任意性だから当然である)。

点電荷による電位の式を使う時は、無限遠 ($r = \infty$) を基準点 $V = 0$ において、

点電荷の電位

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

という表現を使うことが多い。



電場 \vec{E} に関しては重ね合わせの原理が使えたが、 $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ で定義される V についても、重ね合わせの原理が使える。電位に関する重ね合わせの原理は、電場 \vec{E} に関する重ね合わせの原理より、さらに便利である。なぜなら電場 \vec{E} はベクトルであるから重ね合わせるにもベクトル和をとる必要があるが、電位はスカラーであるから単なる足し算で重ね合わせることができるのである。実は前の章でやった問題の多くも、この考え方で電位を使った方が簡単に解くことができる。

電気量が Q_1, Q_2, \dots, Q_N である N 個の電荷が $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$ に存在している場合、点 \vec{x} における電位は

$$V(\vec{x}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}_{Q_1}|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}_{Q_2}|} + \dots = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}_{Q_i}|} \tag{3.35}$$

と表せる。これの grad を取ると電場 \vec{E} が出る。grad ($\vec{\nabla}$) は微分演算子であり、級数の和をとってから微分しても微分してから級数をとっても結果は同じになることから、

$$-\vec{\nabla}V(\vec{x}) = -\sum_{i=1}^N \vec{\nabla} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}_{Q_i}|} = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}_{Q_i}|^2} \vec{e}_{\vec{x}_{Q_i} \rightarrow \vec{x}} \tag{3.36}$$

という計算になる。つまり、各電荷の電場 \vec{E} を考えてから和をとっても、各電荷の作る電位の和をとってから微分して電場 \vec{E} を考えても、結果は同じである。この後やる具体例では、連続的に分布した電荷を考えるが、その場合は微小部分による電位の和 (つまりは積分) を計算すればよい。

すなわち、

電荷密度 $\rho(\vec{x})$ が存在する時の電位

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' \tag{3.37}$$

のように積分で計算できる。この式は、場所 \vec{x}' にいる微小電荷 $\rho(\vec{x}')d^3\vec{x}'$ による影響を足し算することで、場所 \vec{x} における電位 $V(\vec{x})$ が計算できる、という式である。 \vec{x}' の積分は、電荷のあるところ全部について行う。

3.4.2 ポアソン方程式

真空中の静電気学の法則は $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ と $\text{rot}\vec{E} = 0$ という二つの式にまとめることができるが、 $\vec{E} = -\text{grad}V$ を使うと、

電位を使って表現する真空中の静電気学の法則

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E} = 0 &\rightarrow \text{自明 (grad の rot は常に 0 だから)} \\ \text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} &\rightarrow \text{div}(-\text{grad}V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \tag{3.38}$$

となり、基本法則は

$$\text{div}(\text{grad}V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.39}$$

のみになる (grad についていたマイナス符号は右辺に移した)。

この、grad の div という量をまじめに計算すると、gradV は $(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z})$ という成分を持つベクトルであり、div とはベクトル (A_x, A_y, A_z) に対して $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ を計算することであったから、上の二つめの式は

$$\text{div}(\text{grad}V) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.40)$$

と書ける。左辺の2階微分演算子をまとめて $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ という記号で書いて、

— 静電気学におけるポアソン方程式 —

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.41)$$

という方程式が作られる。この演算子 Δ はラプラシアンと呼ばれる。

この式のように、 $\Delta f = j$ という形の方程式を「ポアソン方程式」と呼ぶ。右辺に入る j (静電気学の場合、 $-\frac{\rho}{\epsilon_0}$) は「源 (source)」と呼ばれる。特に右辺が0の時 (静電気学の場合、電荷がない時) の方程式である $\Delta f = 0$ はラプラス方程式と呼ばれる。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

ここで、点電荷による電位 $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ が (原点以外で) ラプラス方程式を満たしていることを二つの方法で確認しよう。

【直交座標を使って】 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であることを使う。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x}{2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ &= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + 3 \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (3.42)$$

これで $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right)$ が計算できたわけだが、 $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right)$ を計算したとしたら、上の式で $x \leftrightarrow y$ と取り替えたものになるであろうことは容易にわかる。同様に $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right)$ を計算すれば、上の式で $x \leftrightarrow z$ と取り替えたものになる。というわけでこの3つを足し算すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + 3 \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) \text{ から} \right) \\ &\quad -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + 3 \frac{y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) \text{ から} \right) \\ &\quad -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + 3 \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) \text{ から} \right) \\ &= -\frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + 3 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

となり、確かに $\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$ が確認できる。

【極座標を使って】 極座標での gradV は $(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi})$ と書ける (前から順に、 r 成分、 θ 成分、 ϕ 成分)。これを極座標での div の表記

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (3.44)$$

に代入すると、

極座標のラプラシアン

$$\Delta V = \text{div}(\text{grad}V) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad (3.45)$$

となる。

この表記に $V = \frac{1}{r}$ を代入すると、 θ, ϕ による微分は 0 なので、残るのは第一項のみである。そしてその第一項は、まず $\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}$ で、これに r^2 をかけた $r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = -1$ となるので、次の微分で 0 となる。極座標では非常に簡単に $\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$ が確認できる。

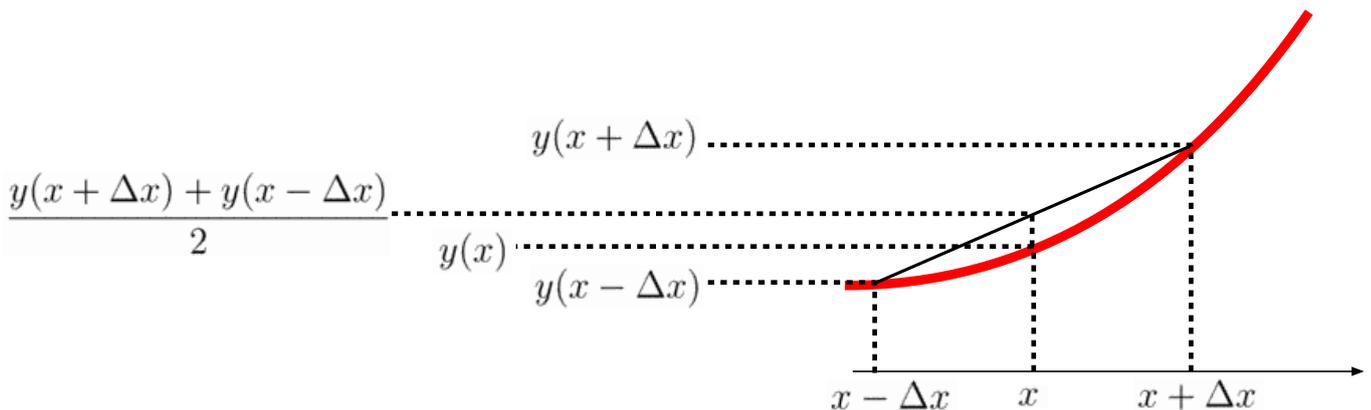
なお、後で説明するが、上の式が成立するのは $r \neq 0$ の場所だけである。 $r = 0$ では分母が 0 になってポテンシャルが発散するため、そこをうまく評価してやらねばならない。

【補足終わり】

3.4.3 ラプラシアンの物理的意味

grad に「勾配」という意味が、div に「湧き出し」という意味があることは、電場や電位の物理的イメージを得るのにたいへん役だった。そこでこの節では、ラプラシアン (Δ) にはどんな意味があるのかを考えておくことにする。

2次元、3次元から考えるのはたいへんなので、まずは1次元(1直線上)で感覚をつかんでおこう。1次元ならば、ラプラス方程式 $\Delta f = 0$ は単なる $\frac{d^2}{dx^2} f = 0$ という「二階微分すると0」という方程式になる(1次元上なので、偏微分ですらない)。



微分はそもそもグラフの傾き(勾配)という意味があり、その定義は、

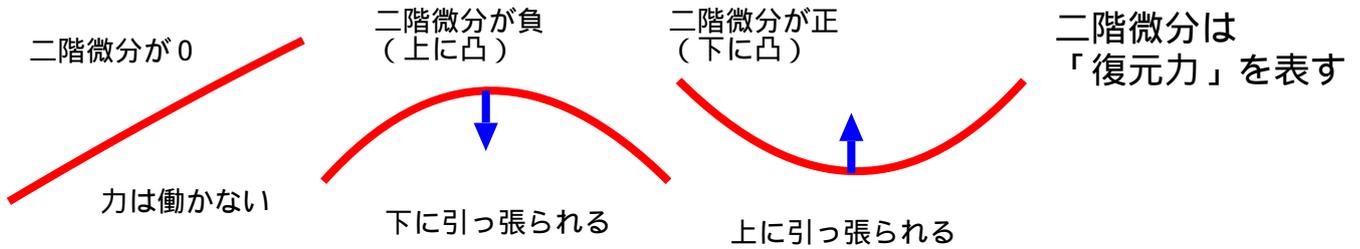
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \quad (3.46)$$

であった。では2階微分はというと、これを繰り返すのであるから、

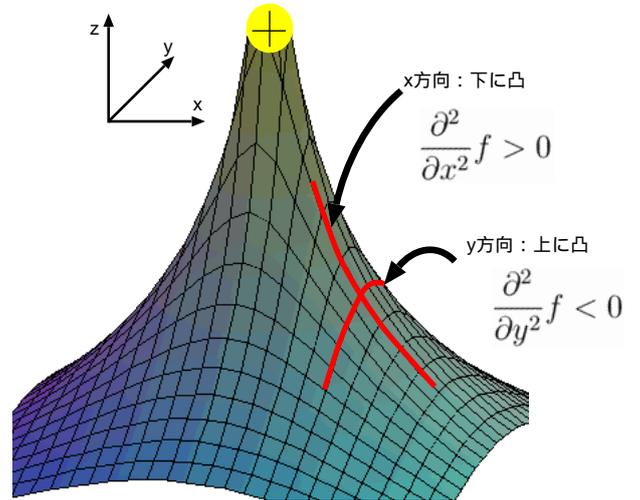
$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(y(x + \Delta x) - y(x)) - (y(x) - y(x - \Delta x))}{(\Delta x)^2} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) + y(x - \Delta x) - 2y(x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

という式になる。この式の分子を見ると「両サイドの和 ($y(x + \Delta x) + y(x - \Delta x)$) から中央での値 $\times 2$ ($2y(x)$) を引く」という計算になっている。あるいはこれを2で割ると「両サイドの平均 ($\frac{y(x + \Delta x) + y(x - \Delta x)}{2}$) から中央での値 ($y(x)$) を引く」という量である。つまり、2階微分は「中央の値と両サイドの平均値とのずれ」を表す。これは「グラフがその場所での程度たわんでいるか」を示す量になっている(グラフが直線ならば2階微分が0であることは、そもそもの定義から理解できるだろう)。

もしこのグラフの線がゴム紐のような弾力のあるものであったとすると、2階微分が+である場所では、ゴム紐のその部分は上に引っ張られる。2階微分が-なら話は逆となる。つまり、この2階微分はゴム紐の復元力のようなものを表現しているのである。



2次元ではラプラシアンは $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ を意味する。この場合、 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ の部分は x 方向でのたわみ具合を、 $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ は y 方向でのたわみ具合を勘定することになる。よって、 $\Delta f(x, y) = 0$ というのは、 x 方向で下に凸ならば、 y 方向に同じだけ上に凸になっていることを意味する。右の図は2次元の場合のラプラス方程式の解である $f(x, y) = -\log(x^2 + y^2)$ の立体的グラフである。このグラフをゴム膜のように考えると、 x 方向のたわみはこの膜を上引っ張るだろう。そして、 y 方向のたわみはこの膜を下引っ張る。この二つの力がつりあって、この膜が静止している。このつりあい関係を表すのが、 $\Delta f = 0$ なのである。

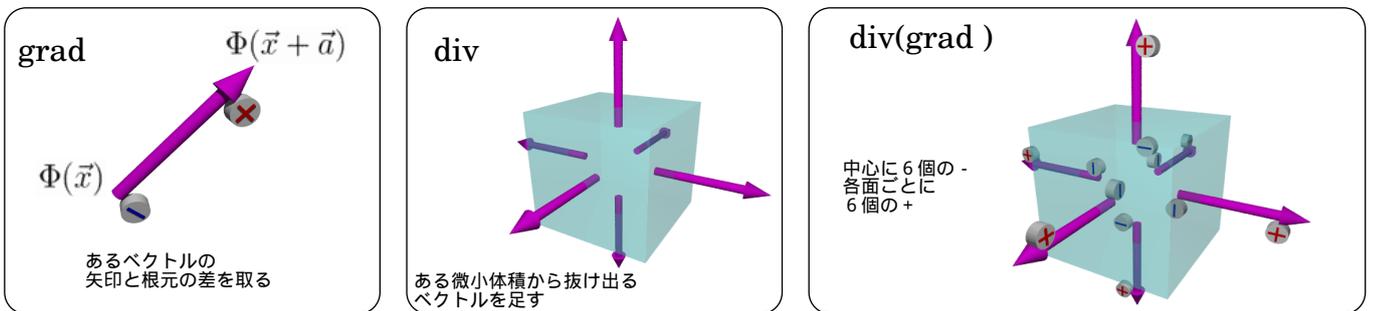


3次元でも同様で、 $\Delta f(x, y, z) = 0$ は、 x, y, z の3つの方向のたわみによる力のつりあいを意味する (図で表現するのは難しい¹²)。

なお、このことからラプラス方程式を満たす関数 (たとえば真空中の電位 V) は決して極大や極小を持ってない¹³ことがわかる。数式での証明は略するが、ゴム膜のイメージで考えると、極大値や極小値があるとその場所では決して引っ張り力がつりあうことがないことが理解できるだろう。 x 方向のたわみはゴム (電位) を上に引っ張り、 y, z 方向のたわみがゴム (電位) を下に引っ張るといふ形では平衡状態は出現しない。

電場も電位もゴム膜のような物質でできた存在ではないが、電位という量の示す物理は、(上で述べたように) ゴム膜のような弾力のある物質の示す物理に非常によく似ている。電場や電位にこのような力学的イメージを考えることで、電磁気現象は理解しやすくなる。何より、電場や電位も力学的な性質を持った、立派な物理的実体なのだということを把握しておこう。

なお、1次元のラプラシアンが (両端での値の和) - (中央での値) $\times 2$ であったのと同様に、2次元のラプラシアンは (4辺での値の和) - (中央での値) $\times 4$ となるし、3次元のラプラシアンは (6面での値の和) - (中央での値) $\times 6$ となる。図で表現するならば以下の通り。



この図を見ると「ラプラシアン Δ は grad の div だ」ということがよくわかる。

¹² x, y, z にさらに f を合わせて、4次元がイメージできればできるが、普通の人間にはムリである。

¹³このことをアーンショーの定理と呼ぶ。これからわかることは、静電場のよる力だけではつりあいは達成できないということである。

3.5 電位の計算例

3.5.1 一様な帯電球

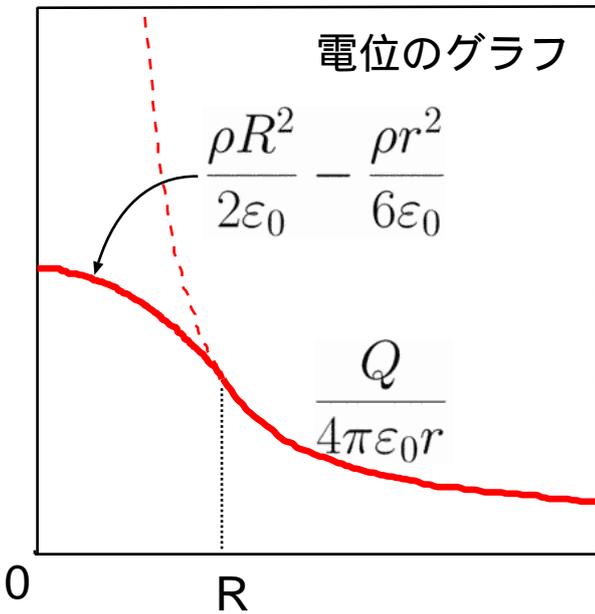
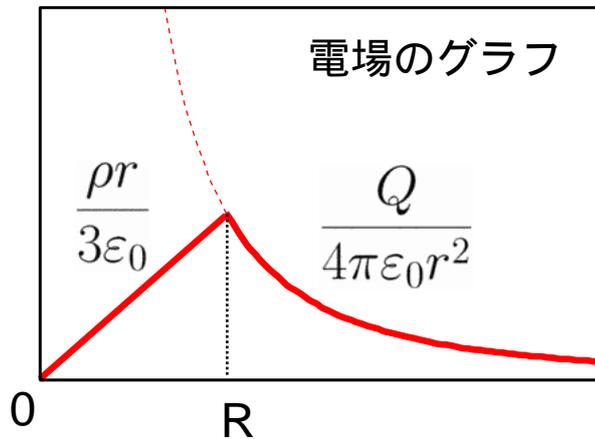
一様な電荷密度 ρ で帯電した半径 R の球のつくる電位について考える。電位を計算する方法を列挙しよう。

電場 \vec{E} から計算する

すでにこの場合の電場 \vec{E} は求めてある。

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & r > R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r & r \leq R \end{cases} \quad (3.48)$$

である。



\vec{E} は r のみの関数であるから、 V も r のみの関数になると考えて良いであろう。その場合、 $\vec{E} = E_r \vec{e}_r$ として、 $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\vec{e}_r \frac{dV}{dr}$ となるから、 $E_r = -\frac{dV}{dr}$ になるように V を決めると、

$$V = \begin{cases} V_1 + \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} & r > R \\ V_2 - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} & r \leq R \end{cases} \quad (3.49)$$

となる。これに $-\vec{\nabla}$ をかければ上の \vec{E} になることはすぐにわかる。

ここで現れた定数 V_1, V_2 はそれぞれ、 $r = \infty, r = 0$ での電位である。電位は「微分して ($\vec{\nabla}$ をかけて) $-$ をつけると電場 \vec{E} になる」という定義なので、定数をつける自由度は常にある (いわゆる「積分定数」である)。

まず、無限遠での電位は 0 であるとおくことにすると、 $V_1 = 0$ であることがわかる。 V_2 の値は、 $r > R$ での式に $r = R$ を代入した時と、 $r \leq R$ の式に $r = R$ を代入した時に両者が等しいという条件 (接続条件) から決める。すなわち、

$$V_2 - \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \quad (3.50)$$

$$V_2 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

ということ。

電場 \vec{E} と電位の概略のグラフを並べてみたのが左の図である。上で V_2 の値をちゃんと調整しておいたので、電位のグラフがスムーズにつながる曲線となっていること、電位の傾き $\times (-1)$ が電場 \vec{E} となっていることを確認して欲しい。特に $r = R$ で電位の傾きがスムーズであること (これはつまり、 $r = R$ での電場 \vec{E} が接続されることを意味する) は注意しよう。後の計算ではこれを積極的に利用する。

電場 \vec{E} から求める方法は電場 \vec{E} が求まっていれば簡単だが、そうでない場合はむしろ回り道であることは言うまでもない。

微小部分の作る電位を考えてそれを積分する

電場 \vec{E} の時にも使った、「まず細かく分けて考える」という手法である。電場 \vec{E} の計算同様、まず微小部分（体積は $(r')^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi$ ）のつくる電位を考えると、

$$dV = \frac{\rho(r')^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta}} \quad (3.51)$$

であるから、これを積分する。

ϕ 積分はすぐに終わって 2π を出す。 θ 積分をするためにまた $\int_0^\pi \sin \theta d\theta \rightarrow \int_{-1}^1 dt$ の置き換えをして、

$$V = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr' \int_{-1}^1 \frac{(r')^2 dr' dt}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr't}} \quad (3.52)$$

とする。ここで、 $\frac{d}{dt} \sqrt{A+Bt} = \frac{B}{2\sqrt{A+Bt}}$ という式を使えば、

$$V = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^R dr' (r')^2 dr' \left[-\frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr't} \right]_{-1}^1 \quad (3.53)$$

となる（今の場合は $A = r^2 + (r')^2, B = -2rr'$ ）。

$$\left[-\frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr't} \right]_{-1}^1 = \left(-\frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr'} \right) - \left(-\frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + (r')^2 + 2rr'} \right) \quad (3.54)$$

として $r^2 + (r')^2 \pm 2rr' = (r \pm r')^2$ となることを使うと、

$$\left[-\frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr't} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{rr'} (|r - r'| - |r + r'|) \quad (3.55)$$

となる（ $\sqrt{A^2}$ は A ではなく、 $|A|$ であることに注意！）。

この式は $r > r'$ ならば $-\frac{1}{rr'} \times (-2r')$ 、 $r < r'$ ならば $-\frac{1}{rr'} \times (-2r)$ である。 r' は 0 から R まで積分するので、 $R < r$ ならば常に $r > r'$ である。その場合、

$$V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^R dr' (r')^2 dr' \frac{1}{r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} \quad (3.56)$$

である。

$r < R$ の時は積分域をわけて、

$$\begin{aligned} V &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\int_0^r dr' (r')^2 dr' \frac{1}{r} + \int_r^R dr' (r')^2 dr' \frac{1}{r'} \right) \\ &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\left[\frac{(r')^3}{3r} \right]_0^r + \left[\frac{(r')^2}{2} \right]_r^R \right) \\ &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{3} + \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2 - \frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

この結果は当然、電場 \vec{E} から求めたものと等しい。

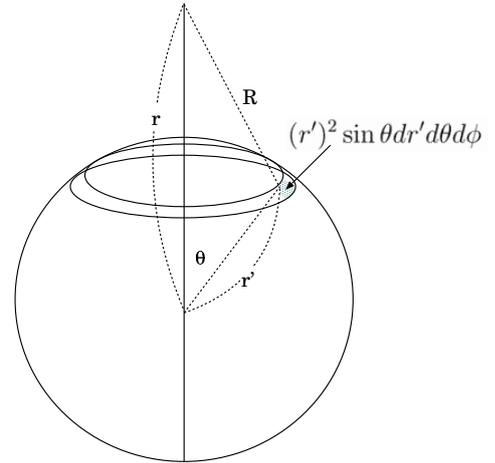
ポアソン方程式を解く

問題が球対称なので、電位も球対称になると仮定する。ポアソン方程式は

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} V(r) \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.58)$$

となる。ただし、 $r > R$ ではラプラス方程式

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} V(r) \right) = 0 \quad (3.59)$$



が成り立つ。こちらから解こう。

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} V(r) \right) &= 0 && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(両辺を積分)} \\
 r^2 \frac{d}{dr} V(r) &= C_1 && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(} r^2 \text{で割り、)} \\
 \frac{d}{dr} V(r) &= \frac{C_1}{r^2} && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(再び両辺を積分)} \\
 V(r) &= -\frac{C_1}{r} + C_2
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

$r = \infty$ で $V = 0$ という境界条件を採用することにすれば、 $C_2 = 0$ である。次に内部での方程式を解くと、上と全く同じ手順を踏んで、

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} V(r) \right) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 \\
 r^2 \frac{d}{dr} V(r) &= -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r^3 + C_3 \\
 \frac{d}{dr} V(r) &= -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r + \frac{C_3}{r^2} \\
 V(r) &= -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 - \frac{C_3}{r} + C_4
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

となる。原点で V が発散しないという条件から、 $C_3 = 0$ である。

後は C_1, C_4 を求めればいいが、そのためには今もとめた二つの V と、その微分 $\frac{dV}{dr}$ が、 $r = R$ で等しいという条件を置く。電位の微分が電場 \vec{E} であるから、その電位がジャンプするような関数であってはならない(微分ができないから)し、微分がジャンプしてはならない(一カ所に二つの電場 \vec{E} があることになってしまう)。その条件は

$$V(r) \text{ の接続条件: } -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R^2 + C_4 = -\frac{C_1}{R} \tag{3.62}$$

と、

$$\frac{dV}{dr}(r) \text{ の接続条件: } -\frac{\rho}{3\epsilon_0} R = \frac{C_1}{R^2} \tag{3.63}$$

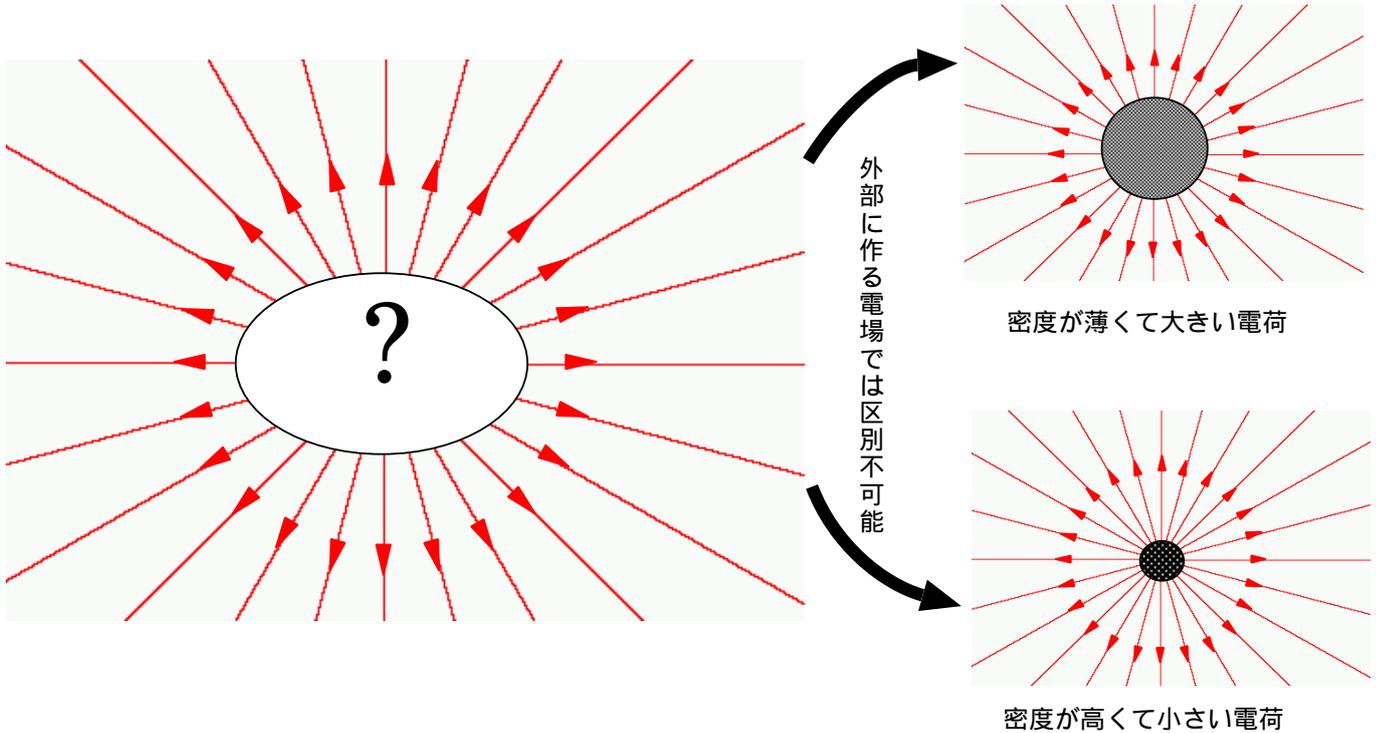
である。下の式から $C_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} R^3$ となり、これを上の式に代入すれば、

$$-\frac{\rho}{6\epsilon_0} R^2 + C_4 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R^2 \tag{3.64}$$

となるから、 $C_4 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2$ と求められる。こうして得た最終結果も、もちろん他の手段で得たものに等しい。

以上、3つの方法で一様な帯電球のまわりの電位を求めた¹⁴。この結果において注目すべきことが一つある。それは、 $r > R$ を考えているかぎり、結果は点電荷 Q が原点にある場合の電位 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ と区別がつかないということである。箱の中に球対称な電荷が入っていて、我々が箱の外でだけ電場 \vec{E} や電位が測定できるとすると、その箱の中の電荷が一点に集中しているのか、それとも球状に広がっているのか、我々には判定できない。

¹⁴ どの方法がいいかは時と場合によるので「これを使え」という万能の処方箋はない。



点電荷は、この球の半径が0になった極限であると考えられるので、点電荷の作る電位は、 $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ である。

ただし、 $Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$ は全電荷量。これを一定にしつつ $R \rightarrow 0$ の極限を取ることになる（つまり、 ρ は $\frac{3Q}{4\pi R^3}$ であり、 $R \rightarrow 0$ で発散する）。よって、

$$-\Delta \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \begin{cases} \infty & r = 0 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (3.65)$$

ということになる。右辺は $r \neq 0$ であって、 $r = 0$ では発散する。そして、積分すると（もともと電荷密度 $\div \epsilon_0$ であって、全電荷は Q なので） $\frac{Q}{\epsilon_0}$ になる。

物理では「ほとんどの場所では0であるが、原点でのみ0でなく、しかも任意の関数をかけて積分するとその関数の原点での値になる関数」、すなわち、

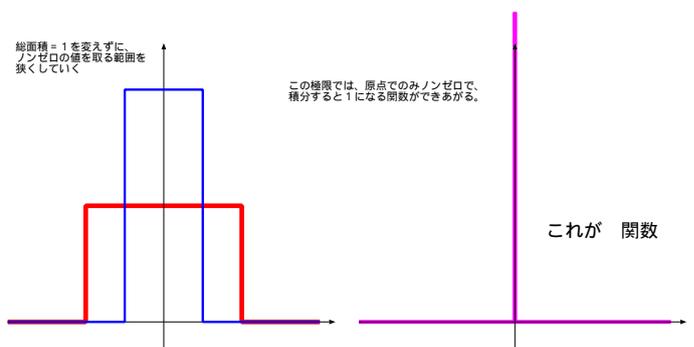
$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}, \int \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (\text{とくに、} \int \delta(x) dx = 1) \quad (3.66)$$

を満たす関数を「Dirac の δ 関数」と呼ぶ。今考えた $-\Delta \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$ という関数も δ 関数を使って表すことができ、

$$-\Delta \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \frac{Q}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x}) \quad (3.67)$$

と書いてもよい¹⁵。ただし、 $\delta^3(\vec{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ である。

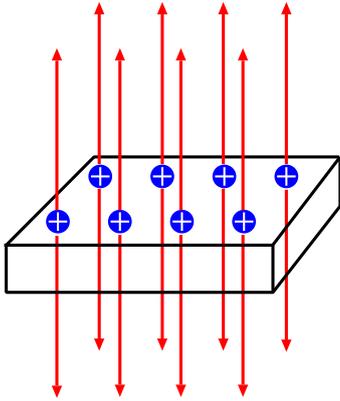
δ 関数は電磁気のみならず、量子力学など物理のいろんなところでよく使う関数¹⁶なので、今覚えておいて損はない。電磁気では点電荷のように「一点に集中している電荷」の表現に使われる。



¹⁵これから公式 $\Delta \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = -\delta^3(\vec{x})$ が示せたことになる。

¹⁶なお、正確に言うと δ 関数は「関数」ではなく「超関数」と呼ばれるものの仲間である。

3.5.2 無限に広い板



$z = -d$ で表現される面と $z = d$ で表現される面を表面として持つ厚さ $2d$ の板内部に様に電荷密度 ρ_0 で電荷が分布しているとしよう。この電荷は $x = -\infty$ から $x = \infty$ まで (y に関して同様) つまり宇宙の端から端までずっと同じように分布しているとしよう。

この場合、 x, y に依存しない形のポテンシャルになることが対称性からわかる。「対称性からわかる」という言葉の意味は以下の通りである。

いまある場所のポテンシャルが x もしくは y に依存していたとしよう。そうだとすると、その方向には電場 \vec{E} があることになる。しかし、今考えている状況は宇宙の端から端まで、均等に電荷が分布しているのだから、どんな方向の電場 \vec{E} があったとしてもおかしい。

そこで方程式は、

$$\frac{d^2}{dz^2} \phi(z) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(z) \tag{3.68}$$

という常微分方程式の形になる。

電荷分布を

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 & -d < z < d \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{3.69}$$

としよう。領域 $-d < z < d$ でこの方程式の解は

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(z)}{dz} &= -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} z + C_1 \\ \phi(z) &= -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} z^2 + C_1 z + C_2 \end{aligned} \tag{3.70}$$

となる (C_1, C_2 は積分定数)。 $z = 0$ の場所には (これまた対称性から) 電場 \vec{E} はないと考えられるので、 $\frac{d\phi(0)}{dz} = 0$ から C_1 は 0 である。電

位の基準はどこに選んでもよいのだから、 $z = 0$ を基準にすることにすれば、 $C_2 = 0$ となる。

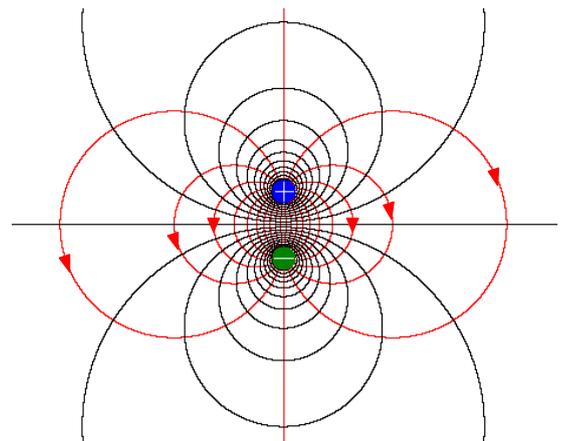
最終的な電位のグラフは左の図の通りである。イメージとしてはここでも、電荷があるところでは、電位が上に引っ張られると考えるとよい。板の部分を出ると電荷がなくなり (電位に対する引っ張りがなくなり) 電位の二階微分が 0 になるので、電位を表すグラフは直線となる。今は 1 次元の問題を考えているので、ある方向で二階微分が正、別の方向では負という形でラプラス方程式を満たすことはできない。

電場 \vec{E} はこのグラフの傾き $\times (-1)$ であるから、中央で 0、 $z > 0$ では正方向、 $z < 0$ では負方向を向く。

3.5.3 電気双極子

実際の物質においては、正電荷、負電荷が単独で存在していることはあまりなく、原子核 (+) に電子 (-) がついているように、あるいは Na^+ イオンに Cl^- イオンがついているように、トータルで電荷 0 になるような組み合わせになって物質を作っていることが多い。たとえば水分子は酸素原子の部分はマイナス電荷を持ち、水素原子の部分はプラス電荷を持つ¹⁷。このように非常に小さい一つの粒子にプラス電荷とマイナス電荷が含まれてその位置が一方方向偏っているような状態を「電気双極子」と呼ぶ。もっとも単純な電気双極子としては、プラス電荷とマイナス電荷を一個ずつ貼り付けたようなものを思い浮かべるとよい。

電気双極子がどのような電場 \vec{E} を作るかを考えるには、まず電気双極子のつくる電位を考えて、その微分を考えるのがよい。直交座標で考えて、 $(0, 0, d)$ に $+q$ の電荷が、 $(0, 0, -d)$ に $-q$ の電荷が存在しているとしよう。この時、この二



¹⁷ もともと中性だった酸素原子と水素原子が結合すると、電子が酸素側に偏る。原子核が電子を引きつける力の違いによりこういう事が起こる。

つの作る電位はそれぞれによる電位の和で計算できるので、

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \quad (3.71)$$

である。

ここでは原子のような小さな物の話をしているので、以下で $d \rightarrow 0$ の極限で考えることにする。そのために、 $2qd$ 、すなわち（電荷の大きさ） \times （電荷間の距離）を p と書く¹⁸、これを一定値として、 $d \rightarrow 0$ の極限を取る。 p は「電気双極子モーメント」¹⁹と呼ばれる量である。 p を使って上の式を書き直すと、

$$V(x, y, z) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{2d} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right) \quad (3.72)$$

となる。ここで $d \rightarrow 0$ の極限を取ると、

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{2d} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.73)$$

のように微分を使って表現できる。真ん中でマイナス符号がついているのは、ここでの引き算が $z-d$ での値から $z+d$ での値を引くという、普通の微分の場合の「 $x + \Delta x$ での値から x での値を引く」という状況とは逆の引き算になっているからである。 Δx に対応するのが $-2d$ なのだと思えばよい。

以上から電気双極子による電位は、

$$V(x, y, z) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.74)$$

となる。最後の表現では、 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z = r \cos \theta$ として極座標に直した。

双極子による電場 \vec{E} は、これに $-\vec{\nabla}$ をかけて、

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(3\vec{e}_x \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + 3\vec{e}_y \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + 3\vec{e}_z \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \vec{e}_z \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(3(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \vec{e}_z \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (3.75)$$

となる。極座標で表すならば、 $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ を使って、

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\vec{e}_r \frac{2 \cos \theta}{r^3} + \vec{e}_\theta \frac{\sin \theta}{r^3} \right) \quad (3.76)$$

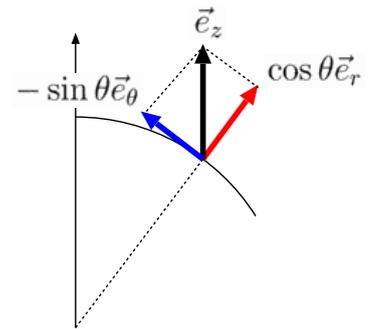
となる（言うまでもないが計算自体は極座標の方が簡単に終わる）。

この二つの式 (3.75) と (3.76) は違うように見えるかもしれないが、 $r\vec{e}_r = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ と、 $\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$ を使って書き直すと同じになる。

ここまでは、電気双極子の電荷の配置を z 軸に沿って、+電荷が $+z$ 側に移動し、-電荷が $-z$ 側に移動していると考えたが、一般的な配置としては電気双極子モーメントはベクトル \vec{p} であると考え、その向きは - 電荷から + 電荷に向かう向きである。この場合、

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|^3}, \quad \vec{E} = 3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|^4} \vec{x} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|^3} \vec{p} \quad (3.77)$$

である。ここで微分は $\vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{x}) = \vec{p}, \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x}|^3} \right) = -3 \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^4}$ のように行った。



¹⁸分子が電気双極子になっている場合、電気双極子モーメントはだいたい、 $1.6 \times 10^{-16} \text{C} \times 10^{-10} \text{m}$ ぐらいになる。

¹⁹「力のモーメント」と同じ言葉が使われているが、双極子に電場をかけると、その電場の方向に回転する。その時働く力のモーメントは電場と双極子モーメントの積に比例する。

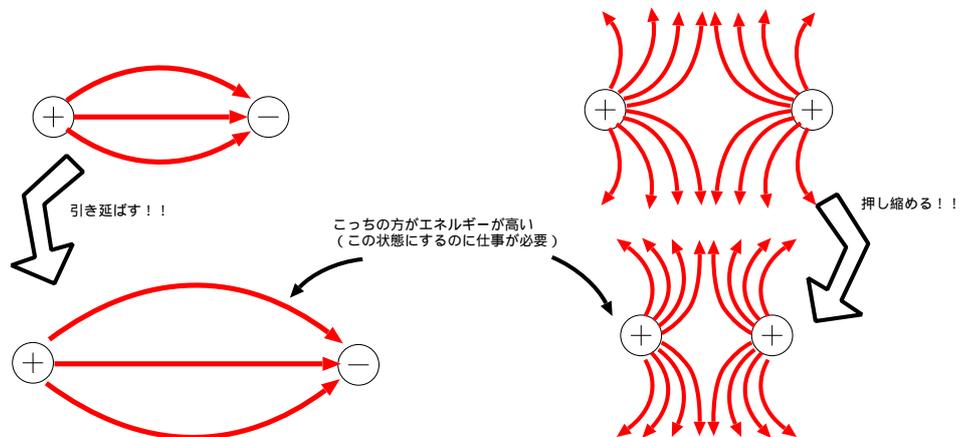
3.6 静電場の持つエネルギー

3.6.1 位置エネルギーは誰のもの？

さて、3.4.1で計算した2個の電荷の場合、 $U = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$ であったから、この式を「電荷 Q が位置エネルギー $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$ を持つ」と解釈すれば、「電荷 Q がある場所の電位は $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 」ということになる。しかしこの式を、「電荷 q が位置エネルギー $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$ を持つ」と解釈すれば、「電荷 q がある場所の電位は $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 」ということになる。これは考え方（立場）の違いであって、どちらも正しい²⁰。さらに言えば、「電荷 Q は $\frac{1}{2} \times \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$ のエネルギーを、電荷 q も $\frac{1}{2} \times \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$ のエネルギーを持ち、トータルでエネルギー $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$ を持つ」という考え方も、間違いではない（後でこの立場を出発点にする）。

この3つの立場のいずれも正しいとはいえ、「では、エネルギーを持っているのはいったい誰なのか？」という疑問が湧くのは当然であろう。たとえば2個の物体がひっぱりあっている例として、バネにつながれた物体を考える。このバネが伸びているならばこの2物体は引き合う力を感じる。その力で仕事をすることができる。そのエネルギーは、バネの伸びが x 、バネ定数が k であれば $\frac{1}{2}kx^2$ であるが、このエネルギーは誰が持っているかといえば、もちろんバネである。

電荷二つの場合、異符号でひきあっている場合にせよ、同符号で反発している場合にせよ、そこにバネのようなものはないように思える。しかし、やはりそこにあるものがエネルギーを蓄えていると考えなくてはいけないのである。そこにあるものとはもちろん「電場」である。ばね定数 k のばねが x のびている時に（その時の状況に応じて） $\frac{1}{2}kx^2$ のエネルギーを持つように、電場がある時にはその場所、その時の状況に応じてエネルギーを持っていることになる²¹。



先に答えを書いておくと、そのエネルギーの単位体積あたりの値は、ばねのエネルギーによく似た式 $\frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2$ となる。

この式を導出する前に、電場の持つエネルギー（静電エネルギーと呼ばれる）がどのようなエネルギーなのか、イメージをつかんでおこう。

上に書いたバネの場合と同様、異符号でひっぱり合う時、その二つの電荷の間に何か「二つの電荷が近づくことでエネルギーが下がるもの」がなくてはいけない。そのバネに対応するものとして、電気力線を考えよう。電気力線が伸ばされたゴムひものように、短くなるようとする性質（張力）を持っていたと考え、右の図のように「プラス電荷とマイナス電荷を引き離す」という操作は、「電気力線という仮想ゴムひもを引き延ばす」という操作なのだと考えることができる。つまり、このエネルギーを持っているのは「仮想ゴムひも」であるところの電気力線、または電場である。

プラス電荷どうし、マイナス電荷どうしの反発力はどのように説明できるだろうか。これは「平行する電気力線には反発力が働く」と考えると理解できる。このように反発力が働くということは、電気力線の密度が高くなると、電場の蓄えるエネルギーも大きくなる、ということである。

3.6.2 電場のエネルギー—電荷と電位による表現

3.4.1節で2個の電荷（電気量 q, Q ）が距離 r だけ離れている時、この二つの電荷は $\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$ というエネルギーを持つということがわかったわけであるが、となると次に考えるべきは3つ、もしくはそれ以上の電荷があった時はどうなるか

²⁰「電荷 Q も電荷 q も $U = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$ を持つので、全エネルギーはこの2倍」と考えるのは正しくない。これでは同じエネルギーを2回数えている (double-counting) ことになる。どちらかの立場を選ばねばならない。

²¹と、エネルギーを持っているのは電場である、ということ述べたが、これは上に書いた電荷がエネルギーを持っているという考えが間違いだと言っているのではない。電荷と電場というのは本来切り離せないものなのだから、エネルギーをどちらの所属とするかは、自由である。しかし、電場にしようこませた方がいろんな点で都合がよいし、近接作用の考え方にのっとっている。

である。ここでも、重ね合わせの原理が計算を簡単にしてくれる。

今第3の電荷 q' を無限遠からゆっくりと近づけて、 Q からの距離が r_1 、 q からの距離が r_2 であるような場所まで持ってくるとする。この時、その「持ってくる」という動作をした人はどれだけ仕事をしなくてはならないかを考えると、その仕事は「電荷 Q だけがあった場合にすべき仕事」と「電荷 q だけがあった場合にすべき仕事」の和である。

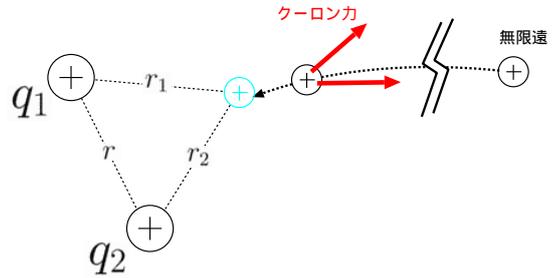
結果は

$$\frac{q_1 q'}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2 q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} \tag{3.78}$$

となる。これに最初からあったエネルギーである $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ を加えて、

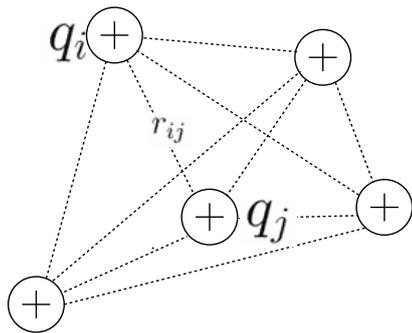
$$\frac{q_1 q'}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2 q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{3.79}$$

が、この3つの電荷の系の持つエネルギーである。



数をどんどん増やしていこう。それぞれ q_1, q_2, \dots, q_N の電気量を持つ N 個の電荷があり、 q_i の電気量を持つ電荷と q_j の電気量を持つ電荷が r_{ij} だけ離れていたとするならば、結局この N 個の電荷の集合体の持つ位置エネルギーは

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \tag{3.80}$$



ということになる。ここで、和記号から $i = j$ が除かれていることに注意しよう。元々この位置エネルギーは電荷と電荷の相互関係で生まれているのだから、自分自身との間には位置エネルギーが発生するはずはない。だいたい、 $i = j$ にすれば $r_{ii} = 0$ なので、分母が発散してしまう。 $\frac{1}{2}$ がついているのは、この和をどんどんやっていくと、同じ式が2回現れるからである。たとえば $N = 3$ なら、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 \frac{q_1 q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{1j}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 \frac{q_2 q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{2j}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^3 \frac{q_3 q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{3j}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{21}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} + \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{31}} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{32}} \right) \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \end{aligned} \tag{3.81}$$

となる。 $\frac{1}{2}$ がついていて、ちょうど正しい答えとなる。このように何も考えずに和をとる計算をすると2回同じ物が出てくる場合「double-counting している」と表現する。 $\frac{1}{2}$ は double-counting を補正するためのものである²²。

この式を、少し違う表現で書いてみよう。

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}}_{=V_i(\vec{x}_i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i(\vec{x}_i) \tag{3.82}$$

と書くことができる。 $V_i(\vec{x}_i)$ は、場所 \vec{x}_i における電位であるが、ただし、 q_i が作る電位は省いている。そのことを示すために \bar{i} という下付き添字をつけたわけである。もし q_i による電位を入れてしまったら、例によって ∞ となる。

連続的に分布した電荷について考えると、微小体積 $dx dy dz = d^3 \vec{x}$ の中に電荷 $\rho d^3 \vec{x}$ があるのだと考えて、その各微小体積によるエネルギーの和を考える。微小体積を0とする極限では和は積分に置き換わるので、

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i(\vec{x}_i) \rightarrow \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) d^3 \vec{x} \tag{3.83}$$

となる。これが静電場の持つエネルギーを、電荷密度 ρ と電位 V で表現した式である。ここで $\frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) d^3 \vec{x}$ には「自分自身の作る電位は勘定に入れない」という計算に対応する「 $i = j$ を除く」のような注意書きがないことを不審に

²² 2回とは限らず、数えすぎている時は「over-counting」と言う。

思う人がいるかもしれない。この場合の「自分自身」に対応するのは微小体積内の微小電荷 $\rho d^3\vec{x}$ である。この量は、微小領域のサイズの3乗に比例する。一方、 $V(\vec{x})$ の分母 $|\vec{x}' - \vec{x}|$ は微小領域のサイズの1乗に比例するので、微小領域にある電荷による同じ微小領域への電位は、微小領域のサイズを0とする極限では0になる。つまり、微小電荷を取り除いても、取り除く前と電位の値は無視できるほどの高次の微小量しか変化しないので、わざわざ「同一点を除く」と断る必要がないのである。

3.6.3 電場の持つエネルギー—電場による表現

さて、我々は「電荷の位置エネルギーは電場が持っている」という予想のもと、ここまで電荷の位置エネルギーを書き直してきた。 $\frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) V(\vec{x}) d^3\vec{x}$ という式は、いまだ電荷を使って表現している（つまり、エネルギーは電荷が持っている、という形の式になっている）。

ここで、電荷密度 ρ は電場と関係あることを思い出そう。すなわち、 $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ である。これを使って書き直すと、エネルギーは

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int (\text{div} \vec{E}(\vec{x})) V(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (3.84)$$

という積分になる（電場と電位の式になったので、目標に一步近づいた）。

ここで、 $\text{div} \vec{E}$ という形で \vec{E} にかかっている微分を V の方におっかぶせる（もちろん部分積分を使ってである）。 x, y, z 成分を使って書くと上の式は

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int \left(\frac{\partial}{\partial x} E_x(\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial y} E_y(\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial z} E_z(\vec{x}) \right) V(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (3.85)$$

で、これを各項ごとに部分積分する。部分積分の公式は

$$\int_a^b \frac{df(x)}{dx} g(x) dx = \underbrace{[f(x)g(x)]_a^b}_{\text{表面項}} - \int_a^b f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx \quad (3.86)$$

であったから、この公式を $\frac{\partial}{\partial x} E_x(\vec{x}) V(\vec{x})$ などに適用していけば、

$$- \frac{\epsilon_0}{2} \int \left(E_x(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x} V(\vec{x}) + E_y(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial y} V(\vec{x}) + E_z(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial z} V(\vec{x}) \right) d^3\vec{x} \quad (3.87)$$

となる。いわゆる「表面項」、たとえば

$$\left[\frac{\epsilon_0}{2} \int E_x(\vec{x}) V(\vec{x}) dy dz \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} \quad (3.88)$$

は無有限遠では $V(\vec{x})$ や $\vec{E}(\vec{x})$ が0になっているのだと考えて無視した。ここで、 $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ （たとえばこのうち x 成分を取り出すならば $E_x = -\frac{\partial}{\partial x} V$ ）を使えば、

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int (E_x(\vec{x}) E_x(\vec{x}) + E_y(\vec{x}) E_y(\vec{x}) + E_z(\vec{x}) E_z(\vec{x})) d^3\vec{x} \quad (3.89)$$

となり、まとめると、

——— 真空中の静電場の持つエネルギー ———

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 d^3\vec{x} \quad (3.90)$$

となる²³。これは電場のみで書かれた式になっている。これから、電場の持つエネルギー密度は $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$ となる。数式の形としては、ばねのエネルギーの式 $\frac{1}{2} kx^2$ にも似ている。

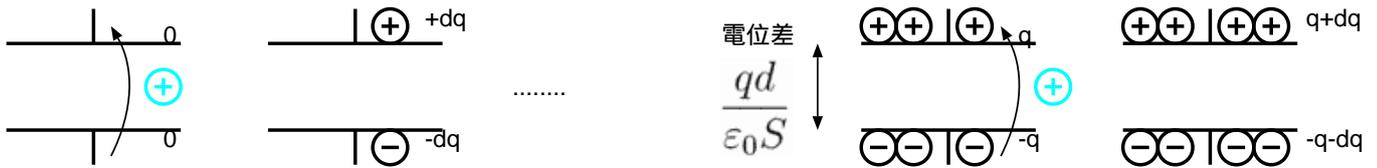
²³慣れてきたら上の計算は、 $\int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V = - \int \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V = \int \vec{E} \cdot \vec{E}$ といっきにやりたいところである。

3.6.4 平行平板コンデンサの蓄えるエネルギー

静電気力の持つ位置エネルギーは $\frac{1}{2}qV$ で表現されるということから、平行平板コンデンサの持つエネルギーを計算する。両極板に電荷 Q と電荷 $-Q$ がためられているとする。極板の面積を S とすると極板間にできる電場の強さは $\frac{Q}{\epsilon_0 S}$ となるというのはこれまで計算した通りであるから、極板間の電位差 V は $\frac{Qd}{\epsilon_0 S}$ となる（今電場は一定なので、電位差は電場×距離となる）。電位差 V というのは、 $-Q$ がたまっている方の電位が V_0 としたら、 Q がたまっている方の電位が $V_0 + V$ だということであり、この時に静電エネルギーは、

$$\frac{1}{2}Q(V + V_0) + \frac{1}{2}(-Q)V_0 = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 S} \tag{3.91}$$

となる。この $\frac{1}{2}QV$ という式は、以下のように考えても導出できる。



電荷 q を電位差 V の間を運ぶと、 qV だけ仕事をするようになる。今、コンデンサに電気 q がたまっている時に、電気を $q \rightarrow q + dq$ に増やすために必要な仕事を考えれば、それはもちろん dqV なのだが、今の場合 $V = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$ であるから、 $dq \frac{qd}{\epsilon_0 S}$ となり、この q を 0 から Q まで積分することで「コンデンサを充電するのに要した仕事」が計算できる。それは、

$$\int_0^Q dq \frac{qd}{\epsilon_0 S} = \frac{d}{\epsilon_0 S} \left[\frac{q^2}{2} \right]_0^Q = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S} \tag{3.92}$$

である。これはもちろん上の式と一致する。ちゃんと $\frac{1}{2}$ がついていること、つまり QV という計算をしてはいけないことに注意しよう。微小な電荷を持っていく時の仕事が dqV なのに、微小でない有限な電荷を持っていく時の仕事は $\frac{1}{2}QV$ となる。これは V が定数ではなく、電荷が溜まっていくに従って増加する関数であるからである。 V が外部から与えられた電位差であって電荷が移動しても変化することがないような関数なら、エネルギーは QV となる。

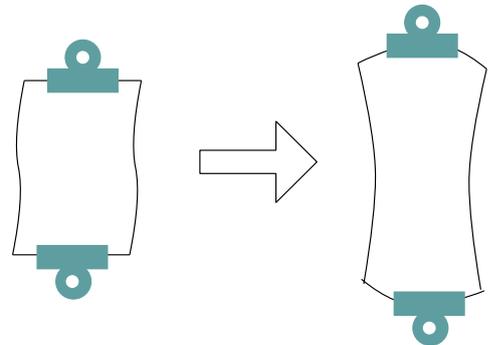
ここで、コンデンサの持つエネルギー $\frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S}$ をコンデンサの極板にはさまれた部分の体積 Sd で割ると、コンデンサの持つエネルギーは単位体積あたり、

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{\epsilon_0 S} \right)^2 \tag{3.93}$$

となる。これはちょうど、 $\frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2$ に他ならない。

つまり、電荷に仕事をすることで溜め込んだエネルギーは「電場の持つエネルギー」としてコンデンサの極板間に溜められることになる。

電位をゴム膜に例えたアナロジーからすると、電荷をためることで+電荷のたまった部分は電位が高くなり（ゴム膜が上に引っ張られ）、-電荷のたまった部分は電位が低くなる（ゴム膜が下に引っ張られる）。結果としてコンデンサの内部では強い電場（ゴム膜の大きな傾斜）ができる。この引っ張られたゴム膜の弾性エネルギーに対応するものが電場のエネルギーである。ゴム膜の場合も、エネルギーはゴム膜を持ち上げたり下げたりする部分（極板）に局在するのではなく、広がって分布している。



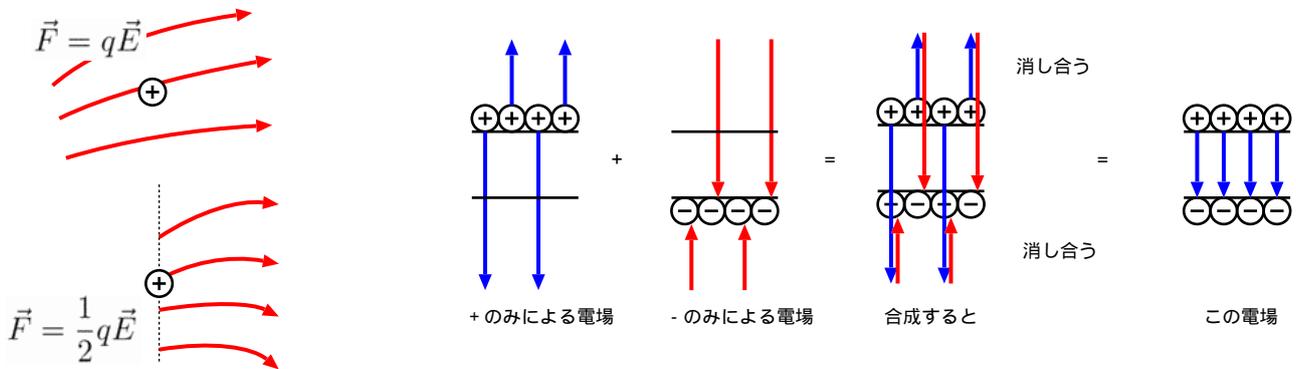
このエネルギーを「極板を引っ張り上げる仕事」として計算することもできる。コンデンサの極板間に大きさ E の電場ができている時、極板に働く引力は $\frac{1}{2}QE$ である。まず極板間の距離が 0 になっていると仮定する。この時のコンデンサのエネルギーは 0 である（プラスマイナスの電荷が重なって存在しているというのは、何もないのと同じ）。この引力に逆らって距離 d だけ極板を引きはがすと考えると、仕事は $\frac{1}{2}QEd = \frac{1}{2}QV$ となる。

— 極板に働く力が QE でない理由 —

電場の定義である $\vec{F} = q\vec{E}$ からすると、なぜこの極板間の引力に $\frac{1}{2}$ がつくのか、不思議に思う人もいるかもしれないが、これにはいろいろな説明ができる。

まず、 $\vec{F} = q\vec{E}$ という式は、電場の中にどっぴりと電荷が浸かっている場合の式であるが、コンデンサの場合、電荷の内側にしか電場はない。これが半分になる理由である。

もう一つの説明としては、極板間の電場 E というのは実は、プラス電荷の作った $\frac{1}{2}E$ とマイナス電荷の作った $\frac{1}{2}E$ の和である。プラス電荷はマイナス電荷の作った電場だけを感じるのである。



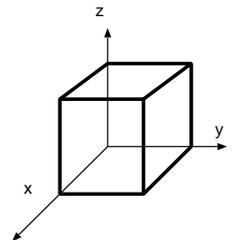
3.7 章末演習問題

【演習問題 3-1】

3次元空間に $V = kx^2$ で表される電位があったとする。

(a) 電場を求めよ。

(b) 図のような一辺 a の立方体の中には、どれだけの電荷が入っているか2通りの計算方法で計算せよ。



【演習問題 3-2】 以下のような静電場は存在できるか？—存在できない場合はその理由を記せ。存在できる場合はその電位と、電荷分布を求めよ。

- (a) $E_x = kx, E_y = ky, E_z = 0$
- (b) $E_x = ky, E_y = kx, E_z = 0$
- (c) $E_x = -ky, E_y = kx, E_z = 0$
- (d) $E_x = k(x^2 + y^2), E_y = 2kxy, E_z = 0$

【演習問題 3-3】 演習問題 2-3 を、電位を使って解き直す。

— 円筒座標の場合のラプラシアン —

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を使って、ポアソン方程式 $\Delta V = -\frac{(\text{電荷密度})}{\epsilon_0}$ を解くと電位が求められる。電荷密度は $r_1 < r < r_2$ で ρ 、それ以外の場所では 0 である。境界条件は、 $r = 0$ で $V = 0$ とせよ。

電位から $\vec{E} = -\text{grad}V$ を使って電場を求めると、演習問題 2-3 の答と一致することを確認せよ。

【演習問題 3-4】 「電荷のない空間では、電位が極大値もしくは極小値になることはない」という法則がある。この法則が成立しなかったと仮定すると（すなわち、電荷のない空間に電位の極大値もしくは極小値があったと仮定すると）、ガウスの法則が成立しないことを説明せよ。

【演習問題 3-5】 厚みの無視できる半径 R と半径 $r (R > r)$ の球殻を、中心を揃えて配置し、外側に電荷 Q 、内側に電荷 $-Q$ を与えた。電荷は球殻上で球対称に分布したとして、

(a) 電場と電位はどのようになるか？—電位の基準は好きに選んでよい（注：この場合、薄い球殻の中に電荷が集中して存在するため、電場はなめらかにつながらない。電位は接続される）。

(b) この系が蓄えている静電エネルギーはいくらになるか？—電荷と電位で表現する式 $\frac{1}{2}qV$ から求めよ。

(c) この系が蓄えている静電エネルギーはいくらになるか？—エネルギー密度の式 $\frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2$ から求めよ。

【演習問題 3-6】 電気双極子の作る電位 $V(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ が (原点を除き) ラプラス方程式の解であることを確認せよ。

また、この電気双極子を 90 度回転して、双極子モーメントのベクトルが x 方向を向くようにしたとすると、電位 $V(r, \theta, \phi)$ はどうなるか (この時の電位は ϕ の関数でもあることに注意) を求めよ。さらに、この式もまた原点を除いてラプラス方程式の解となることを確認せよ。

【演習問題 3-7】 今、二つの点電荷 (電気量は q と q') があるとする。 q の作る電場を \vec{E} 、 q' の作る電場を \vec{E}' とすれば、

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}_q|^3} (\vec{x} - \vec{x}_q)$$

$$\vec{E}'(\vec{x}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}_{q'}|^3} (\vec{x} - \vec{x}_{q'})$$

である ($\vec{x}_q, \vec{x}_{q'}$ は電荷 q, q' のいる位置) が、実際にできる電場はもちろん、この二つの重ね合わせである $\vec{E} + \vec{E}'$ となる。この電場の持つエネルギーは

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 (\vec{E} + \vec{E}') \cdot (\vec{E} + \vec{E}') = \frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}'|^2 + \epsilon_0\vec{E} \cdot \vec{E}'$$

となる。このうち $\frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2$ は「電荷 q だけが存在した場合の電場のエネルギー」であり、 $\frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}'|^2$ は「電荷 q' だけが存在した場合の電場のエネルギー」であるから、残った $\epsilon_0\vec{E} \cdot \vec{E}'$ は「両方の電荷が存在して始めて生まれるエネルギー」であり、つまりはこれこそが「二つの電荷の相互作用によって生まれるエネルギー」であると考えられる。

適当な座標系を考えて $\epsilon_0\vec{E} \cdot \vec{E}'$ を全空間で積分し、結果が $\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}_q - \vec{x}_{q'}|}$ となること (つまり、これが静電気力の位置エネルギーそのものであること) を確認せよ。

(hint: 一方を原点に置き、もう片一方を z 軸上に置く、あるいは二つを $(L, 0, 0)$ と $(-L, 0, 0)$ に置くなど、自分が計算しやすい配置で考えるとよい。)

第4章 導体と誘電体

ここまでは、真空中（せいぜい、電荷が存在する程度）の静電場を扱った。水中、空気中、あるいは木や金属などの固体の中など、物質がある場合には静電場はどのように変わるだろうか。

4.1 導体と電場・電位

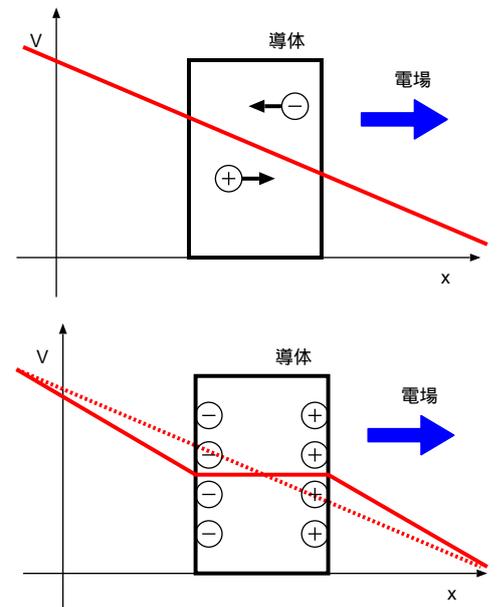
導体とは、内部に電荷が存在し、その電荷が自由に移動できるような物質である。例えば金属では、電子の一部が「自由電子」となって金属内を移動することができる。このような状況では静電場はようになるだろうか？

金属の場合で考えよう。自由電子は（マイナスの電荷を持つから）電場と逆向きに力を受け、その方向に動き出すであろう。そして、電位の高いところに集まる。もし自由に動けるプラス電気があれば、それらは電位の低い方向に集まるだろう。

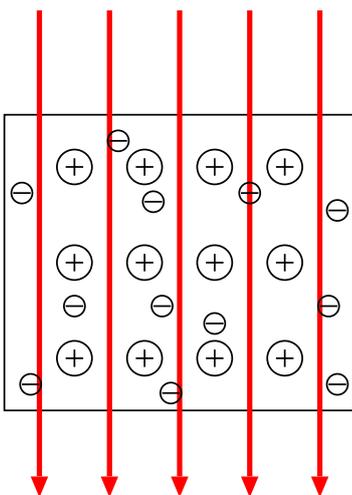
プラス電気が集まるとその場所の電位は高くなるし、マイナス電気が集まればその場所の電位は低くなる。つまり、この電荷の移動は「電位の平均化」を引き起こす。そして、導体内部では電位が平坦に近づく。

最終的にどうなったら電荷の移動が止まるかという、結局は電場が0、すなわち電位が一定値になってしまうと、電荷はもう動かない。我々が今扱っているのは静電場なので、この「電荷がもう動かない」状態になってしまった後のみを考えることにする。すると、金属などの自由に電荷が移動できる導体中では、電場は0すなわち電位一定となることがわかる。

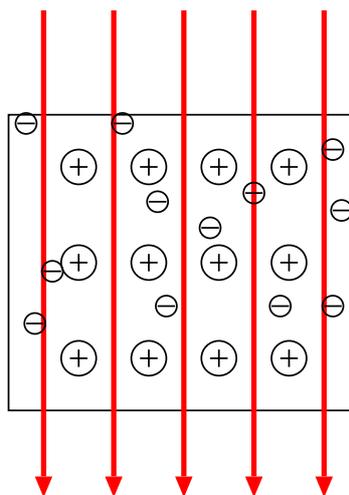
電荷の動きを模式化して表したのが下の図である。



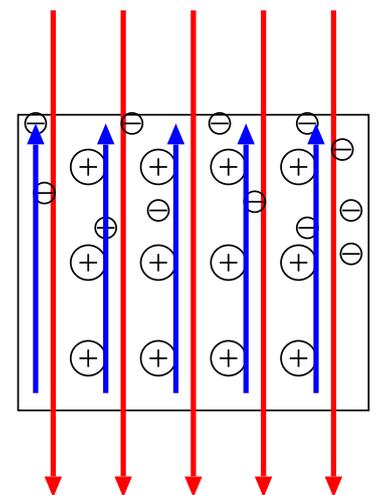
電場をかけると、



電子が移動して、



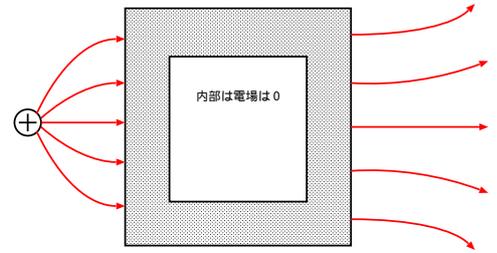
移動した電荷によって作られた電場は外部からの電場を打ち消す



電場がかかることによって、導体内の電荷が移動し、上の方にプラス電荷、下の方にマイナス電荷が整列する。この結果導体内には外部からかけられた電場の他に、この整列した電荷による電場ができることになる。この二つの電場が重ね合わされて導体内の電場が消える（正確に言えば、導体内の電場が0になる状態になるまで電荷が移動する）。こうして導体内では電場が消えるのである。この現象は「静電遮蔽」と呼ばれる。

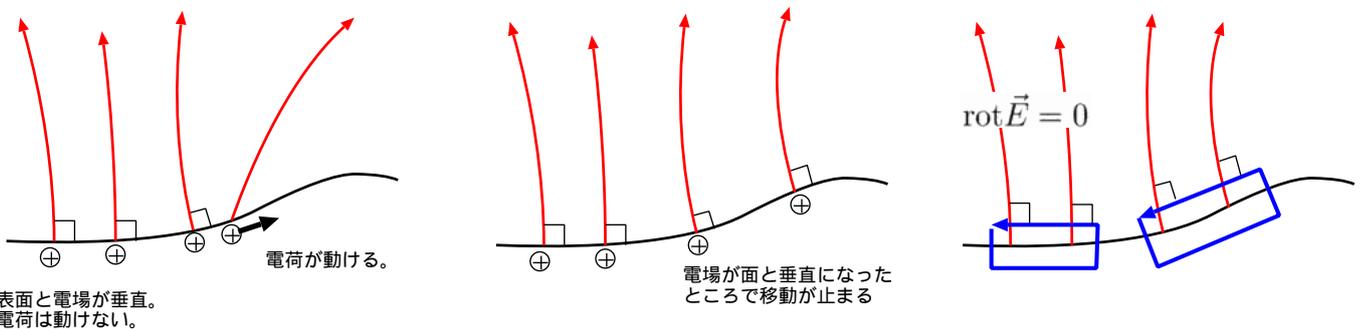
上の図では導体がびっしりつまっている場合を考えたが、実は電荷が自由に移動することさえできれば、間の部分の導体がなくても同じようにして電場は消えてしまう。導体内にできた空洞では電場は0になる。

電場がないところでは電位は変化しないから、導体表面、導体内部、そして導体内部の空洞は全て等電位となる。



4.1.1 導体表面の電場

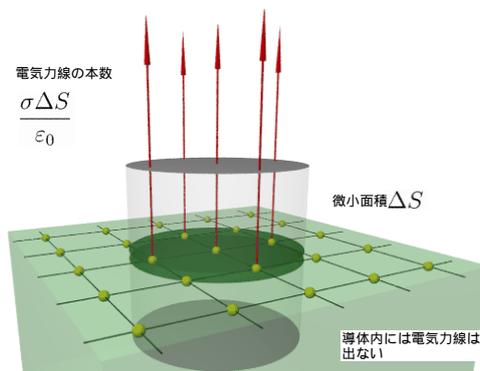
導体内部には電場はなくなるということは、導体内に電荷が存在するとしたら導体表面しかあり得ず、しかも電気力線は導体外に向けてしか出ることにはできない。



さらにもう一つ電場には、導体表面に垂直でなくてはならないという条件がつく。もし垂直でなかったら、その水平成分の分だけ、表面電荷を横に動かそうとする力が働いてしまう。それでは平衡状態にならない。したがってその状態では電荷の移動が起こり、最終的には必ず電場は面に垂直となる¹。

電場の面に平行な成分が0になることは、静電場の場合の式 $\text{rot } \vec{E} = 0$ からわかる。 $\text{rot } \vec{E} = 0$ ということは微小な面積を回るように試験電荷を動かした時、電場のする仕事が0だということである。

その微小面積を図のように導体表面の外側をなぞるように取る。導体の内側では電場は0だから、導体内部ではどんな経路を取るかに関係なく、電場は仕事をしない。導体外側には電場が存在するが、この電場が仕事をしなすようにするためには、電場は表面に垂直でなくてはならない。

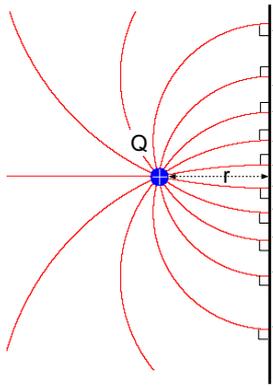


では、この電場の強さはどれだけになるか。これはガウスの法則から計算できる。導体表面上の微小な面積 ΔS を含むように微小体積を取る。もし表面における電荷の面積密度が σ であるとすれば、この微小体積内には $\rho \Delta S$ の電荷がいる。この電荷は $\frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$ の電気力線を出し、その電気力線は外にだけ抜けるから、 ΔS という面積を通り抜ける。ゆえに電場の強さは $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ である。面の法線ベクトルを \vec{n} とすると、 $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ と書くことができる。前に考えた無限に広い板の場合には電場がこの $\frac{1}{2}$ になっていたが、それは電気力線が上下両方に分配されていたからである。導体表面の場合、内側（図の下側）には電気力線が出ないので、電場の強さは2倍になる。

¹なお、電場が十分強いと、電荷は導体の外に出る。これが放電という現象で、雷もその一例である。

4.2 導体付近の電場

4.2.1 点電荷と平板導体



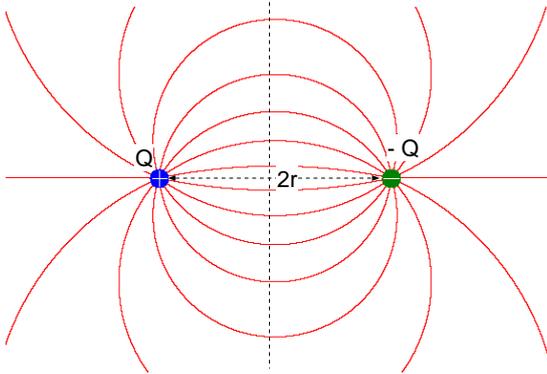
点電荷 Q が無限に広い平板導体から距離 r の場所に置かれたとしよう。すると平板上には負電荷が現れる。負電荷が現れることによって Q から発した電気力線が導体内に進入することを防ぐわけである。現れる負電荷はトータルで $-Q$ である（これで電気力線が全部吸い取れることになる）。平板導体の持つ電荷のトータルが 0 なのであれば、その分だけ無限遠に電荷 Q が現れていることになる。

さてこの電荷がどのように配置されることになり、結果としてどのような電場ができるのかを考えてみよう。条件としては、この面の上では電場が面に垂直な方向（図で言えばまっすぐ右）を向いていなくてはならない。点電荷 Q の作る電場は面に平行な成分を持っているから、平板導体の表面に配置された負電荷のつくる電場が、ちょうどこの面に平行な成分を打ち消すことになるように電荷を配置すればよいことになる。

あるいは電位を使って表現するならば、導体表面が等電位になるようにする。無限遠の電位を 0 とするという境界条件で考えると、導体表面は無限遠まで続いているのだから、導体表面も電位は 0 である。つまり、無限遠と $x = 0$ で $V = 0$ という境界条件でラプラス方程式 $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ を解けばよい（電荷は導体表面にのみ存在するから、 ρ は $x = 0$ 面上でのみ、 0 でない値を持つ）。

しかし、これを計算で求めるのは少々ややこしい。

そこで、楽をして求める方法としては、「鏡像法」（または「電気映像法」）という方法がある。



この電気力線の様子が、 $+Q, -Q$ の2個の電荷が $2r$ 離れて存在している時の電気力線の様子を思い浮かべる（左の図）。この図の半分を取り出すと求めたい状態とぴったり同じであることがわかるのである。

鏡像法と呼ぶ理由は明らかであろう。まるで平板導体が鏡であるかのごとく考えて、正電荷のちょうど反対側に負電荷の鏡像が現れると考えれば、まさにこの形なのである。

ここまでわかれば、後は電位を使って計算するのが簡単である。図の横方向に x 軸を取ることにして、正電荷がいる場所を $(-r, 0, 0)$ 、負電荷のいる場所を $(r, 0, 0)$ とすると、鏡像負電荷があるとすると場所 (x, y, z) における電位は

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x+r)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-r)^2 + y^2 + z^2}} \right) \quad (4.1)$$

となる。実際にできる電位の場合、負電荷は存在しないかわり、 $x > 0$ の領域は導体内部なので等電位であり、

$$V(x, y, z) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x+r)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-r)^2 + y^2 + z^2}} \right) & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

となる。電場をこれに $-\vec{\nabla}$ をかければ得られる。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

ここで、無限遠と $x = 0$ で $V = 0$ になるという境界条件で電位を求めたわけであるが、さてこの解は唯一のものであるか（別解があったりはしないか？）という疑問が湧くかもしれない。そこで、境界条件を満たすポアソン方程式 $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ の解は唯一性が保証されなくてはならない²。そこを調べよう。 $\Delta V_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \Delta V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ と二つの解が見つかったとして矛盾を示す。この二つの式が両立したとすると、

$$\Delta(V_1 - V_2) = 0 \quad (4.3)$$

という式になることからわかる。この式は $V_1 - V_2$ というポテンシャルに対するラプラス方程式のようなものである。適切な境界条件でこの方程式を解いたとする。たとえば上の場合、 V_1 も V_2 も「無限遠と導体表面上 ($x = 0$) で電位は 0 」

²今解いているのは微分方程式なので、境界条件を指定しなければ解は無数にある。

という境界条件になっている。この方程式はラプラス方程式 (= 真空中のポアソン方程式) であるから、どこにも極大値も極小値もない。どこにも極大も極小もないのに境界で0になるということは全て0しかあり得ないので、 $V_1 = V_2$ 。つまり、二つの解が見つかることはあり得ない。

【補足終わり】

最後に平板上に現れる電荷を求めておこう。まず電場の x 方向成分を計算しておく、

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x+r}{((x+r)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x-r}{((x-r)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (4.4)$$

平板の表面 $x=0$ では、電場は x 方向を向いている。 $x=0$ を代入すると、 $E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2r}{(r^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ である。導体表面では電荷の面積密度を σ とした時、 $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ が成立していたので、この表面での電荷密度は

$$\sigma = -\frac{Q}{2\pi} \times \frac{r}{(r^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.5)$$

となる。マイナス符号がつくのは、今の場合電場は面の法線ベクトル \vec{n} と逆を向いているからである。

なお、この σ を全導体表面で積分 ($\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz$) するとちゃんと $-Q$ になる³。

4.2.2 平行電場内に置かれた導体球

z 軸正の方向に強さ E の電場があるような場所に、半径 R の導体球を置いてみる。この球は上半球に正電荷が、下半球に負電荷が現れて、導体内部の電場を0にする。この時の電荷分布と電場について考えてみよう。

この時も同様に、「誘導された電荷による電位を別のもの置き換える」という方法で考えよう。具体的には、球面 $r=R$ の上で電位が定数になるようにすればよい。外部から与えられた電場の電位は $V_{\text{外}} = -Ez = -Er \cos \theta$ である。球面上では $r=R$ なので、 $V_{\text{外}}|_{r=R} = -ER \cos \theta$ である。よって、 $r=R$ において $V_{\text{球}} = ER \cos \theta$ になるようなもう一つの真空での電位の式を持ってきて足せばよい。これは電気双極子の作る電位 $V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ において、 $p = 4\pi\epsilon_0 ER^3$ とすればちょうどよい。故に

$$V = V_{\text{外}} + V_{\text{内}} = -Er \cos \theta + \frac{ER^3 \cos \theta}{r^2} = \frac{E(R^3 - r^3) \cos \theta}{r^2} \quad (4.6)$$

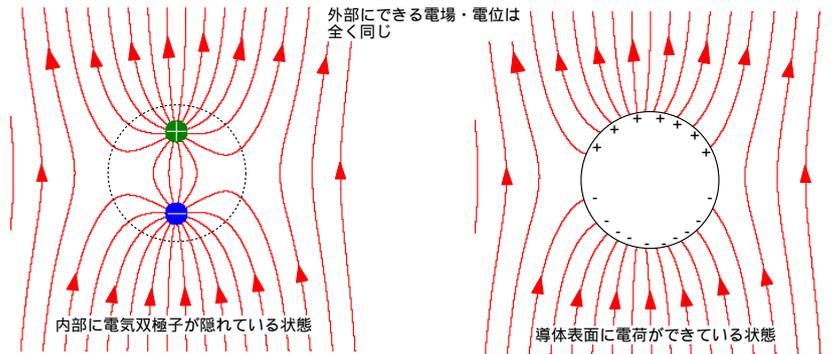
が解である。導体球の内部では電位は一定になるので、

$$V(r, \theta) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq R \\ \frac{E(R^3 - r^3) \cos \theta}{r^2} & R < r \end{cases} \quad (4.7)$$

とまとめることができる ($R=r$ でちゃんと二つの式が接続されることに注意)。この場合、導体球の表面に現れた電荷の代わりに、原点に電気双極子を置いて電位を表現したことになる。この電位に対応する電場は、

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\vec{\nabla}V &= -\left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \underbrace{\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}}_{\vec{0}} \right) \frac{E(R^3 - r^3) \cos \theta}{r^2} \\ &= -\vec{e}_r \left(-3E \cos \theta - \frac{2E(R^3 - r^3) \cos \theta}{r^3} \right) - \vec{e}_\theta \frac{E(R^3 - r^3) \sin \theta}{r^3} \end{aligned} \quad (4.8)$$

³実際の積分は平面上の極座標を使った方が楽である。



である。表面に現れる電荷を計算するには、まず上の式に $r = R$ を代入し、

$$\vec{E}|_{r=R} = 3E \cos \theta \vec{e}_r \quad (4.9)$$

となる。なお、当然であるがこの電場は球面に垂直 (\vec{e}_r 方向) を向いている。ゆえに現れる電荷密度は

$$\sigma = 3\epsilon_0 E \cos \theta \quad (4.10)$$

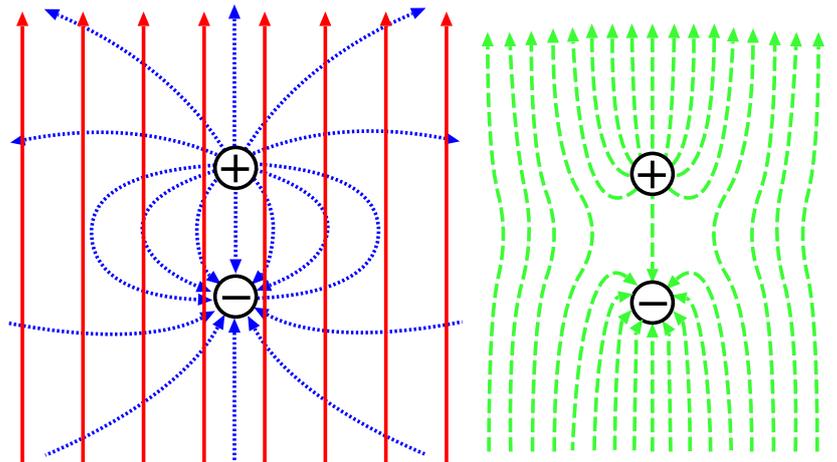
ということになる。球の上半分 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ には正電荷が、下半分 $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ には負電荷が現れる。

4.3 誘電体と分極

4.3.1 分極

「誘電体 (dielectrics)⁴」とは何かというと、より世間でよく使われる言葉で言うならば「絶縁体 (insulator)」である。つまり、電気を流さないような物質である。誘電体は電流は流さないが、電場に対して反応しないというわけではない。原子というのはプラス電気を帯びた原子核と、そのまわりにある、マイナス電気を帯びた電子で構成されている。金属などの導体の場合は、電子が原子核を離れて自由に動けるようになっていたがゆえに、外部からの電場を完全に打ち消すことができた。誘電体では電子は自分の所属する原子から離れることはできない。離れることはできないが電場から力を受けるには違いないので、外部から電場をかけられるとこの原子に「分極 (polarization)」という現象が起こる。分極とは、原子のうちプラス電気を持っている部分が電場の方向に、マイナス電気を持っている部分が電場と逆方向にひっぱられて、原子の電荷分布に偏りが生じることである。

右の図は、分極した電荷の近くの電場を描いたものである。電場が場所によって全く違う大きさ、違う向きになっていることがわかるであろう。現実的に考えれば分子一個一個は複雑な運動をしているだろうし、分子の状態も刻一刻と変化するだろう。そういう意味では、ミクロな目で見ると状況は図のような静的なものではないしすっきりしたものではない。しかしそんなものをまじめに計算するのはたいへんなので、以下では言わば「遠くから目を細めて見る」ようなことをする。つまり「空間的にも時間的にも複雑な変化をしているものの平均をとってその場所にある電場を代表させる」のである。



たとえばこの誘電体が油のような液体だとして、その液体中に試験電荷を置いたとする。試験電荷がこの図に書き込める程度に小さいならば、右の図の破線の密度に従って力を受けるだろう。しかし試験電荷自体がある程度の広がりのある物体であるならば、受ける力はその「場所によって違う力」の足し算となるだろう。誘電体があれば電気力線は実線のようになっており、平均をとるまでもなく電場の強さが決まる。一方、誘電体がある場合の電気力線は破線の線であり、この平均をとって考えると、電場は誘電体があつた場合に比べ、弱くなっているのである。

通常我々が「誘電体中の電場」と言う時、それは上の「実在する微視的な電場の平均」を意味する。ミクロな(原子レベルの)目で見れば、電場は場所によってまたは時間によって激しく変化している⁵。それを平均化した(ならした)ものを「電場」と呼んでいるわけである。実際に試験電荷をつつこんで測定することができる電場は平均の電場の方(ミクロなレベルより小さい試験電荷に働く力を測定することなどできない!)なので、実用上このように定義しておくしかないだろう。

実在する電場の平均に関しては、模式的に考えると、

$$\overline{\text{実在する電場の平均}} = \overline{\text{誘電体が存在しない場合の電場の平均}} + \overline{\text{分極による電場の平均}} \quad (4.11)$$

⁴'dielectrics' というのは「電場を通すもの(電気を通すものではない!)」という意味合いの言葉である。「電場は真空中でも伝わる」ということを知っている現代の眼から見ると奇妙なことだが、昔は真空中にもエーテルという物質が詰まっていたこれが「電場を伝えている」と考えていた。つまり真空も一つの「誘電体(電場を通すもの)」であった。

⁵今は静電場を考えているので時間的な変化はあまり重要ではないが、一般的な状況ではもちろん、たいへん重要である。

という関係式が成立する。実際には分極の存在によっていろいろな変化が起こることになるので事は単純ではないが、それは後で具体的に考えていくことにしよう。

なお、ここまでの話は物質を構成する分子などは分極はしても、イオン化したり化学変化をしたりはしないとして考えている。たとえば電場が $3 \times 10^6 \text{V/m}$ ぐらいになると、空気は電離してイオンになってしまう（分極が強すぎて引きちぎられてしまう）。

4.3.2 分極と電気双極子モーメント

前節ではおおざっぱに「電場が一部打ち消された」など書いたが、どのようにどの程度に分極により電場が変化するかは、具体的に分極が起こっている様子を考察していかなくてはわからない（そもそも、前節の具体的な図を見たら、電場が弱くなっている部分もあれば強くなっている部分もあるので、実際のところどうなのか即答はできない）。

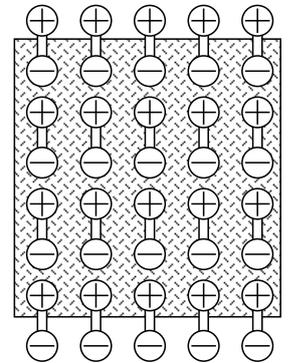
ここでまず、分極という物理現象の強さ（大きさ）を測るための物理量を用意しよう。

分子一個の分極を測るならば、それは電気双極子モーメントを見ればよい。電気双極子モーメントは、電気の無い状態から正電荷 $+q$ と負電荷 $-q$ に分離するようなことが起こった時、その負電荷から正電荷に向かうベクトル \vec{d} に q をかけて、 $\vec{p} = q\vec{d}$ と定義されている。

分子一個一個が分極した時、単位体積あたりに n 個の双極子モーメント \vec{p} が現れたとしたら、単位体積内の双極子モーメントの和 $n\vec{p}$ を分極 \vec{P} の定義としよう。実際には各々の分子が持つ双極子モーメントは同じではないので、 $\langle \vec{p} \rangle$ を双極子モーメントの平均として、

$$\sum_{\text{単位体積内}} \vec{p}_i = n \langle \vec{p} \rangle = \vec{P} \tag{4.12}$$

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

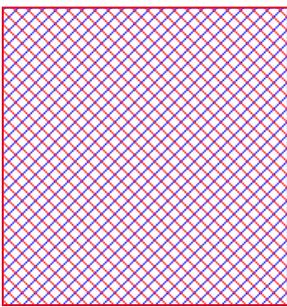


$$\vec{P} = n\vec{p}$$

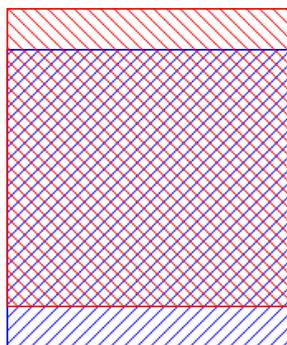
と考えた方がいいだろう。双極子モーメントの単位は $[\text{C}\cdot\text{m}]$ なので、分極の単位はこれを体積 $[\text{m}^3]$ で割って、 $[\text{C}/\text{m}^2]$ となる。

実際には分子ごとにいろいろな双極子モーメントを持っているはずだが、それをならして考えて単位体積あたりとしたのが分極 \vec{P} である。すると、ここには電荷密度 nq の正電荷の集まりと電荷密度 $-nq$ の負電荷の集まりがあり、正電荷の集まりの方だけが d だけずれたと考えればよい。断面積 S 、高さ d の角柱を考えて、その角柱内に一様な分極 \vec{P} （向きは断面の法線に等しいとしよう）ができていたとすると、その天井からは $qd \times S = PS$ の正電荷が飛び出し、床の部分には $-qd \times S = -PS$ の負電荷が取り残されていることになる。つまり、分極ベクトル \vec{P} は、単位面積あたりどれだけの電荷が面から浸み出してくるか、という量だと考えてもよい。

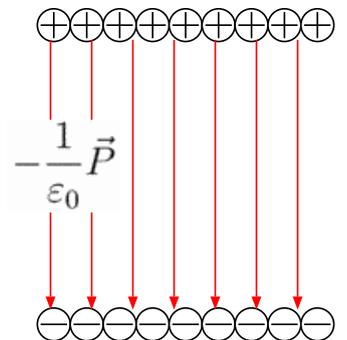
分極していない時は、正電荷と負電荷の分布は完全に一致。トータルの電荷は0で、（マクロな）電場はどこにもない。



分極している時。正電荷と負電荷の分布が距離 d だけずれる。



結局、端っこに電荷が並んでいるのと同じこと。



⊕ の存在する範囲。電荷密度は $+nq$

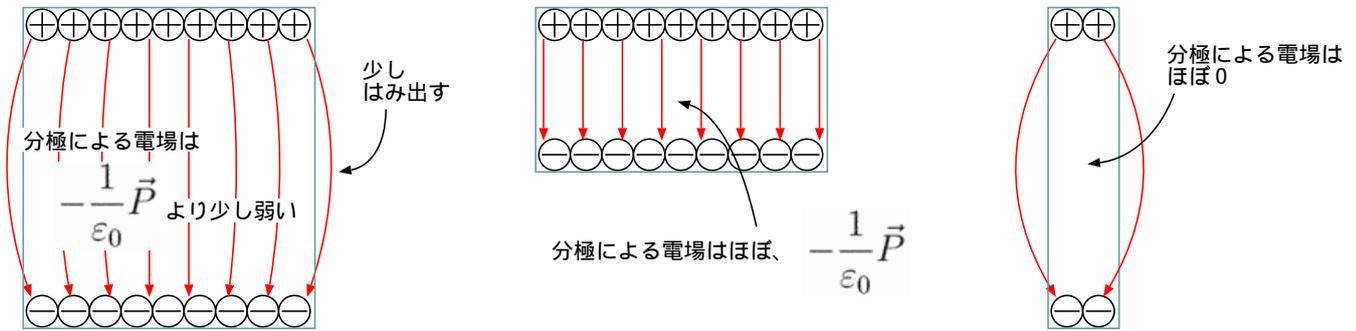
⊖ の存在する範囲。電荷密度は $-nq$

誘電体の分極が作る電場が図の上下方向であると仮定すれば、この飛び出したり取り残されていたりする電荷は、図の下向きに $\frac{P}{\epsilon_0}$ の電場を作る。

ここでは分極によってできる電場を $-\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}$ と考えたが、たとえばコンデンサによってできる電場が $\frac{Q}{\epsilon_0 S}$ という式が厳密には正しくなかった（コンデンサの端の部分で電気力線が外に漏れるため、電場が弱まった）のと同様、厳密にはこの電場の式は正しくはない。

平べったい誘電体

細長い誘電体



分極ベクトルと、分極によって作られている電場の比は、誘電体の形状によって、そして場所によって異なるのである。ただし、次の節で考える誘電体中の電束密度を定義するにおいては、その部分の実際の電場との差は無視して $-\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}$ という式を使う。

4.4 誘電体中の電束密度

平行平板型の誘電体に分極 \vec{P} が存在している場合、分極電荷が発生させる電場は $-\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}$ と表現できることがわかった。ここで、実際の電場 \vec{E} から、分極による電場を取り去ってしまったものを考える。それを $\frac{1}{\epsilon_0}\vec{D}$ と書くことにすると、

$$\underbrace{\vec{E}}_{\text{実際の電場の平均}} = \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0}\vec{D}}_{\text{分極によるもの以外の電場の平均}} - \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}}_{\text{分極による電場の平均}} \quad (4.13)$$

となる。言わば、電場（の平均）を分極によって起こった部分とそれ以外による部分に分けていると考えてもよい。

電束密度の定義

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4.14)$$

を「電束密度 (electric displacement または electric flux density)⁶」と呼ぶ。

なお、一般的な状況では分極によって作られる電場は $-\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}$ とは限らない。平行平板型の誘電体や、球体の誘電体で電場も球対称にできるなど、対称性がよい場合は $-\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}$ でよいが、そうでない場合も多い。しかしその場合でも、電束密度 \vec{D} の定義は上のように行う。「分極による電場を引き去ったもの」という意味からは外れるものの、この定義には後で示す有用な点があるからである。

上では電束密度の定義式を「誘電体中の電場は分極が存在する分だけ、電束密度の $\frac{1}{\epsilon_0}$ 倍より弱くなる」と説明したが、この説明は厳密ではなく、「電束密度は電場の ϵ_0 倍に分極を足したものと定義する」とした方が正しい。

電束密度を測る単位は電場の単位とは（SI 単位系では） ϵ_0 倍違う。電場の単位は [N/c] または [V/m] であるし、電束密度は上の式からわかるように分極と同じ単位 [C/m²] を使って表す。

電束密度にそれに垂直な面積をかけたもの (flux) が「電束」である。単位は [C] となり、1C の電荷から 1C の電束が出る。

真空中ならば \vec{P} がないので $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ となり、 \vec{E} と \vec{D} は定数倍されるだけで同じ方向を向いたベクトルとなる。真空中に一個の点電荷 Q が置かれている場合の電場は $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ であったから、この場合 $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r$ である。真空中

⁶ 「electric displacement」は直訳すれば「電気変位」となるが、この呼び名は日本ではあまり使われない。これが「変位」と呼ばれる理由は誘電体の分極によって起こった電荷の移動（変位）に関連するからである。そういう意味では真空中でも $\vec{D} \neq 0$ である場合があるのはおかしいのだが、昔は真空も一種の誘電体と考えられていたのである。 \vec{D} の記号が D なのは displacement からくる。

での電束密度を考えると、電場に比べて単純に ϵ_0 で割るという操作をしなくてよい、というだけの違いとなる（真空中では、 \vec{E} と \vec{D} の両方を考える意味はあまりない）。

真空中でなくても、多くの物質では、 $\vec{P}, \vec{D}, \vec{E}$ はみな同じ方向を向く⁷。その場合は、(4.14) の右辺はやはり \vec{E} に比例するので、その比例定数を ϵ (添字 0 が無いのに注意) とおいて、

線型な媒質の場合の \vec{D} と \vec{E} の関係

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (4.15)$$

とまとめることができるだろう（こうまとめられる場合、その物質を「線型な媒質」と呼ぶ）。 ϵ は $\epsilon \vec{D} = \epsilon_0 (\vec{D} - \vec{P})$ によって定義される定数であり「誘電率」と呼ぶ（ ϵ_0 は「真空の誘電率」であった）。

点電荷のまわりに誘電体を置いた時、誘電体が線型な媒質であれば、電場は真空の場合の $\frac{\epsilon_0}{\epsilon}$ 倍になる。真空であれば距離 r の場所での電場は $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ であったから、誘電体中ならば、 $\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r$ となる（ $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ という置き換えを行った形になっている）。

結局、ミクロな目で見ると、「分極によって作られた電場が元の電場を打ち消して、電場を弱くしている。その弱くなる度合いは物質によって違い、その違いが誘電率 ϵ の差である」と考えることができる。与えられた電場によってどの程度分極が起こるかは物質の性質で決まるので、誘電率も物質によって違う。物質の誘電率と真空の誘電率との比 $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r$ を「比誘電率」と呼ぶ。

	空気	水	エタノール(液体)	ガラス	大理石	紙	酸化チタン
比誘電率	ほぼ 1	80	24	4	8	3	100

いろいろな物質の比誘電率のおおまかな値は上の表の通り。

.....
【FAQ】「外部からきた電場を分極による電場が打ち消すのだとすると、その結果電場が弱くなるから分極も弱くなる。そういうふうに考えると鶏と卵のようにいつまでも互いに影響し合って、話が終わらないのではないか？」

ごもっともな疑問であるが、上の関係 $\epsilon \vec{E} = \vec{D}$ は、そういう影響の及ぼしあいが起こった結果、このような状態で落ち着いていると考えるべきである。つまり、 $\epsilon \vec{E} = \vec{D}$ は因果関係を示す式ではなく、最終の状態が満たすべき関係である。

では、変化が落ち着く前に電場がさらに変化すればどうなるのか、という疑問を持った人もいるかもしれない。これはたいへんよい疑問である！

変動する電磁場（電磁波など）をかけた時、分極がついていけないというようなことも起こり、その場合は誘電率が一定電場をかけた時とは変わってくる。つまり、誘電率が電磁波の振動数の関数になったりするのである。この章で述べたことはあくまで静電場に対する話であり、変動する電磁場についてはより深い考察が必要になるということになる。

.....
 なお、ここまで述べた状況はかなり理想化されたものだということに注意しなくてはいけません。まず分極が電束密度に比例するとは限らない。電束密度が分極に比例するということはつまり「外部からかけた力に比例した距離だけ電荷が移動する」ということであって、そうなるのは原子のプラス電荷とマイナス電荷を引き留める力がちょうどフックの法則を満たしている場合だけである。ただ、現実的な力でも平衡点の周りの短い距離の近似としてならフックの法則が成立する場合が多いので、近似計算としては正しい。

また、分極によって生じる外部電場と逆向きの電場を、ここでは $-\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$ であるとして考えたが、実はこの考察も厳密には正しくなく、誘電体の形状によることは既に述べた通りである。

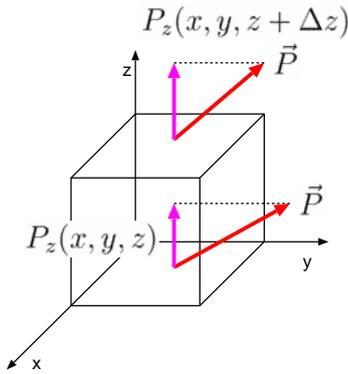
もう一つ注意しなくてはいけなはのは、電束密度と分極（どちらもベクトル）が平行であるとは限らない点である。原子が規則正しく並んだ結晶などでは、ある方向には分極を受けやすく、ある方向には分極を受けにくいということがあり得る。そのような場合は電束密度によって引っ張られた方向へ素直に分極するとは限らない。分極が電束密度に比例はするが同じ向きを向かない場合、「異方性の誘電体」と呼ぶ。この場合、電束密度と電場も同じ方向を向かず、

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

のように行列で表される関係で結ばれる。

⁷一般の誘電体では、 \vec{P} は \vec{E} と同じ方向を向くとは限らない。そのような誘電体は「異方性の誘電体」と言う。

分極があってもトータルの電荷密度は0であると述べたが、分極の大きさが場所によって変わる場合、そうとは限らない。誘電体がもともと電荷を持っていなかったとしても、場所によって違う分極を持っていると、結果として電場を持つことになる。例によって微小な直方体を考えると、その6つの面のそれぞれを通して分極により電荷が進入してくることになる。



たとえば z 方向の成分 (図の天井と床での電荷の出入り) を考えると、天井から $P_z(x, y, z + \Delta z)\Delta x\Delta y$ の電荷が抜け、床から $P_z(x, y, z)\Delta x\Delta y$ の電荷が入ってくる。差し引きすると、 $\frac{\partial P_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$ の電荷が出て行くことになる。 x, y 方向も考えると結局、

$$\rho_P \Delta x \Delta y \Delta z = - \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.17)$$

の電荷がこの直方体の中に入っていることになる。

よって、分極による電荷の電荷密度 ρ_P は $-\text{div} \vec{P}$ と書くことができる。 ρ_P を分極電荷密度と呼ぶ。分極とは関係ない電荷を「真電荷」と読んで区別しよう。

結果として、誘電体内には真電荷の電荷密度 ρ と分極電荷の電荷密度 $-\text{div} \vec{P}$ の両方がある。よって誘電体内では

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ではなく} \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho - \text{div} \vec{P}}{\epsilon_0} \quad (4.18)$$

という式が成立することになる。この式を見ると $\text{div} \vec{P} = 0$ になる状況では誘電体の存在は電場に何の影響もしないように思える。実際のところ、もし誘電体がどこまでいっても $\text{div} \vec{P} = 0$ を満たすように分極しているのなら、電場への影響はないと考えられる。しかし、現実の誘電体には必ず端 (境界) があり、境界の外では分極も0になってしまう。つまり少なくとも境界で必ず $\text{div} \vec{P} \neq 0$ の場所があり、その影響は誘電体内部にも及ぶ。

たとえば電荷 Q を持つ半径 R の球が誘電率 ϵ の液体中に浮かんでいる場合を考える。この場合 $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r, \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \vec{e}_r$ となるので、

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad (4.19)$$

となる。誘電体の境界には、分極と同じ大きさの電荷密度が現れるので、誘電体の半径 R の球の表面に接する部分には、

$$\sigma_P = - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{Q}{4\pi R^2} \quad (4.20)$$

の電荷密度が現れて、トータルで $4\pi R^2 \sigma_P = - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) Q$ の電荷が現れる。この境界の電荷が元々の真電荷 Q を一部打ち消して

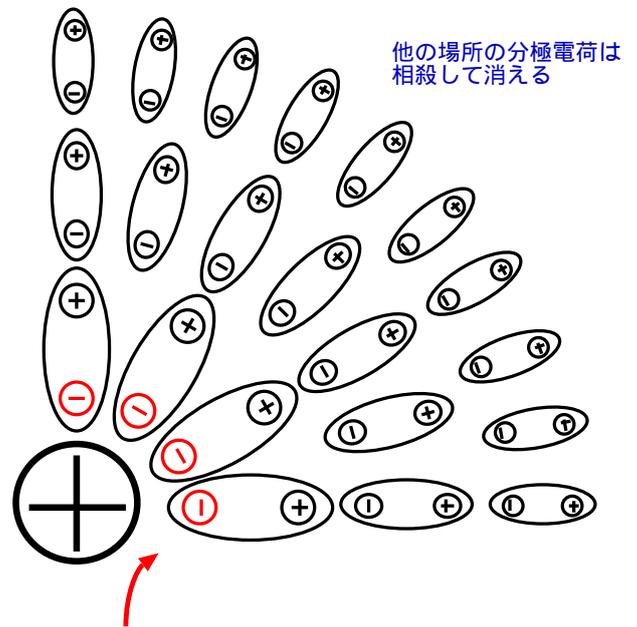
$$Q - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) Q = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} Q \quad (4.21)$$

の電荷がそこにあるのと同じことになる。これが、誘電体中で電場が弱くなる理由である。

すなわち、点電荷が誘電体内に作る電場は、

(1) 誘電率が違う分弱くなると考えて、真空中の公式の ϵ_0 を ϵ に書き換えて、 $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \vec{e}_r$ の電場ができる。

(2) 誘電体の境界に分極による表面電荷により一部の電荷が相殺されて $\frac{\epsilon_0}{\epsilon} Q$ の電荷になっていると考えると、 $\vec{E} = \frac{\epsilon_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ の電場ができる。の2通りの方法で求めることができる⁸。



⁸この両方を同時に考えて「電荷が相殺されて $\frac{\epsilon_0}{\epsilon} Q$ になり、誘電体中だから $\vec{E} = \frac{\epsilon_0}{4\pi \epsilon r^2} \vec{e}_r$ になって」などと考えると間違える。同じ効果を2回考えてしまったことになる。

以上で述べた通り、静電気の基本公式 $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ は

$$\begin{aligned}\text{div}\vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0}(\rho + \rho_P) \\ \epsilon_0\text{div}\vec{E} &= \rho - \text{div}\vec{P} \\ \text{div}(\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}) &= \rho\end{aligned}\tag{4.22}$$

と書き直される。

ここで、 $\epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$ とすることで、

媒質中の静電気学の基本公式

$$\text{div}\vec{D} = \rho\tag{4.23}$$

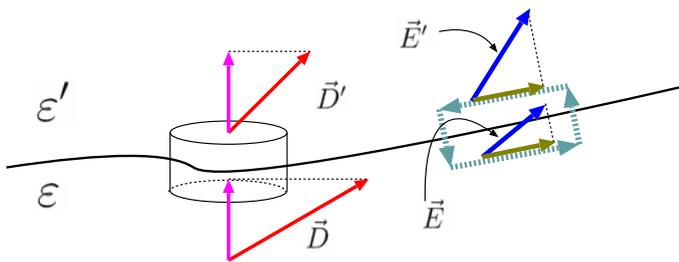
が導ける。この電荷密度 ρ には分極による電荷密度は含まない(真電荷のみである)。逆に真空中で成立していた $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ は(分極が存在する分だけ)成立しなくなる。なお、この式を見て、「 $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ なのだから、これは $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$ ということだな」と早とちりしないように注意すること。誘電率 ϵ はそこにある物質によって違うのだから、微分(div)の外に出せない可能性もある。

$\text{div}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho + \rho_P)$ ではなく $\text{div}\vec{D} = \rho$ と書く意義を確認しておこう。誘電体が存在している場合、 $\text{div}\vec{E}$ は $\frac{\rho}{\epsilon_0}$ とは $\frac{\rho_P}{\epsilon_0}$ だけ違ってくる。分極というのは原子分子レベルで起こっている現象で目に見えるものではないから、測定がしにくい。そのため、 $\text{div}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho + \rho_P)$ という式は使いにくい。それに比べ、 $\text{div}\vec{D} = \rho$ という式は測定可能(もしくはコントロール可能)な量だけが右辺にある。しかも、真電荷がない場合ならば(誘電体が存在しても) $\text{div}\vec{D} = 0$ である。

電場 \vec{E} に対して「電気力線」を定義したように、電束密度 \vec{D} に対して「電束線」を定義すると、電束線は(真空中の)電気力線同様、途切れたり分裂したり合流したりしないし、正電荷(または無限遠)で始まり負電荷(または無限遠)で終わる。

これに対し、電場 \vec{E} を表現する電気力線の方は、誘電体が存在している状況では「途切れたり分裂したり合流したりしない」という性質を失ってしまう。分極電荷によって始まったり終わったりするからである(もちろん、分極電荷をちゃんと考慮に入れるならば問題なく使えるのだが、それは問題を難しくする)。

もちろん、ある閉曲面から出る電束線の本数は、その閉曲面内に含まれている電気量に等しい(ガウスの法則)。 \vec{E} と \vec{D} では単位が変わっているの、真空中の電場に関するガウスの法則では必要であった $\frac{1}{\epsilon_0}$ は、電束密度に関する法則においては必要ない。



途中でまわりにある物体の誘電率が変わると、電場や電束密度はそれに応じて変化することになる。真電荷がない場合、誘電率が変わる境界面ではどのような条件がつくのかを確認しておこう。本質的には基本法則である $\text{div}\vec{D} = \rho, \text{rot}\vec{E} = 0$ を考えればよい。真電荷がないならば、 $\text{div}\vec{D} = 0$ であるから、左図のような境界面を含むような微小な円柱を考えると、天井から抜ける電束と床から抜ける電束は等しい。よって、 \vec{D} のうち、境界面に垂直な成分は同じでなくてはいけない。

一方、 $\text{rot}\vec{E} = 0$ から、境界面に平行な電場は等しくなくてはいけない(上の図参照)。

以上をまとめると、「電場の面に平行な成分と、電束密度の面に垂直な成分が接続される」ということになる。

【FAQ】「 \vec{E} と \vec{D} と電場を表現するものが二つありますが、どちらが本質的なんですか？」

実際のところ、実在するのは \vec{E} でも \vec{D} でもない、「ミクロな電場」である。そのミクロな電場は場所によって、時間によって激しく(つまりミクロなレベルで)変動している。しかしこの実在するミクロな電場はあまりに激しく変化しすぎて(たとえば原子の右側と左側で違うのだ)何かを計算する時の使い勝手が悪い。そこで平均を取った結果が「マクロな電場」 \vec{E} であると考えればよい。これに対し、ミクロな電場から、物質が存在することに起因する乱れの部分をとっばらっておいてから平均したものが $\epsilon_0\vec{D}$ である。どちらが本質的かという比較で言えば、物質の影響を取り去るという作業をしていない分だけ \vec{E} の方が本質的であろう。

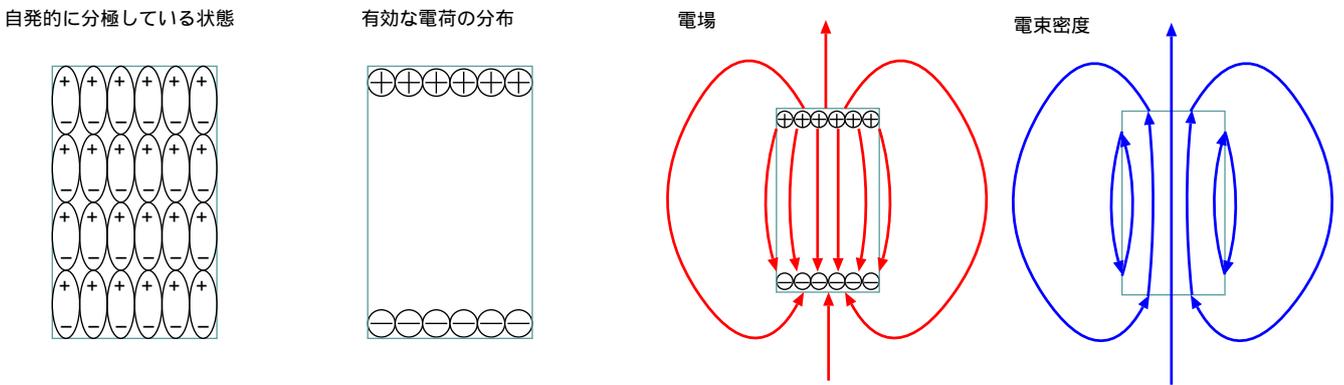
\vec{D} は、誘電体中の電場を表現する時に便利になるように作った人工的な量であると考えられる (歴史的には物質が原子や分子でできていることがわかる前から \vec{D} は使われていた)。

本質的でないのに \vec{D} を使うのはなぜかということ、実際に我々が実験を行う時に設定できるのは真電荷 ρ であり、分極電荷 $\rho_P = -\text{div}\vec{P}$ は我々には制御できない (原子レベルで起こっている現象なので直接測定できず推測するしかない) からである。電束密度 \vec{D} を使って式を書いている間は我々はその「感知できない電荷であるところの ρ_P 」を考慮しないで、真電荷の分布だけを考えればよいという利点がある。たとえば $\text{div}\vec{D} = \rho$ という式が成立することからわかるように、真電荷に対するガウスの法則を使うことができるのは \vec{D} に対してである。

4.5 強誘電体と自発分極

ここまでは、外部から電場がかけられたことによって誘電体が分極する、という話をした。ところが物質の中には、外部から電場がかからなくても勝手に分極している物質もある。そのような状態を「自発分極している」と言う。自発分極するような性質を持つ物質を「強誘電体」と言う。

自発分極している場合で同様の図を書いてみると、電場 \vec{E} と電束密度 \vec{D} は下の図のようになる。



この場合、真電荷はどこにもないので、 $\text{div}\vec{D} = 0$ が成立する。つまり、電束線 (電気力線の \vec{D} 版) は途切れることなく一周する⁹。電場の方は分極によって生じた正電荷から発して負電荷に入る。特に誘電体内部では、電場と電束密度の方向は全く逆を向いていると言ってよい。

強誘電体は日常ではあまりなじみがなくぴんとこないと思う¹⁰が、後で出てくる強磁性体 (つまり、同様のことが電場ではなく磁場で起こっている物質) はなじみがあると思う。つまりそれが永久磁石というものである。永久磁石の中でも \vec{E}, \vec{D} に対応する \vec{H}, \vec{B} が上と同様に完全に逆を向いてしまったりする。

4.6 誘電体中の静電場の持つエネルギー

真空中の静電場は単位体積あたり $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$ のエネルギーを持っていた。誘電体中ではどうなるだろうか??

そもそも $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$ を出す時には、 $\frac{1}{2} \int \rho V d^3\vec{x}$ から出発して、 $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ を使って書き直した。誘電体中では、 $\text{div}\vec{D} = \rho$ が成立するのだから、

$$\frac{1}{2} \int \rho V d^3\vec{x} = \frac{1}{2} \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) V d^3x = -\frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{\nabla} V d^3\vec{x} = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d^3\vec{x} \tag{4.24}$$

となる。つまり、

⁹ $\text{rot}\vec{E} = 0$ という法則はあるが、 $\text{rot}\vec{D} = 0$ という法則はないことに注意。一般に $\text{rot}\vec{P} \neq 0$ だからである。よって電気力線はループしないが電束線はループすることもあってよい。

¹⁰ ガスの火をつける時に使うカチッと音が出て火花が散るタイプのライターは、強誘電体に圧力をかけると高電圧が発生するという性質を利用して

—— 誘電体中の電場の持つエネルギー ——

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d^3x = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}|^2 d^3x + \frac{1}{2} \int \vec{P} \cdot \vec{E} d^3x \quad (4.25)$$

が成立する。ここで、真空中との違い $\frac{1}{2} \int \vec{P} \cdot \vec{E} d^3x$ に注目しよう。 \vec{P} が $nq\vec{d}$ と書き直せることを使うと、

$$\frac{1}{2} \int \vec{P} \cdot \vec{E} d^3x = \frac{1}{2} \int nq\vec{d}\vec{E} d^3x = \frac{1}{2} \int n\vec{F} \cdot \vec{d} d^3x \quad (4.26)$$

となる。 $\vec{F} = q\vec{E}$ は電場から双極子の電荷 q に働く力である。この力がフックの法則にしたがっていたとすると、 $\vec{F} = K\vec{d}$ となり、この式は

$$\frac{1}{2} \int nK|\vec{d}|^2 d^3x \quad (4.27)$$

となり、まさに弾性力の位置エネルギーそのものとなる。一個あたり $\frac{1}{2}K|\vec{d}|^2$ のエネルギーと考えて、双極子モーメントの数 $\int nd^3x$ をかけているのである。つまりこのエネルギー密度 $\frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E}$ という式の中には、分極している物質がたくわえているエネルギーも含まれていることになる。

—— 【静電場に関する方程式のまとめ】 ——

電場の定義 「試験電荷 q を置いたと仮定した時に働く静電気力が \vec{F} であれば、その場所には $\vec{E} = \frac{1}{q}\vec{F}$ の電場ができています」

電場と電位の関係 $\vec{E} = -\text{grad}V$

電場と電束密度の関係 $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ 、異方性媒質でなければ、 $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$

電束密度と電荷の関係 $\text{div}\vec{D} = \rho$ または、 $\int_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$

電位と電荷の関係 $-\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

4.7 章末演習問題

【演習問題 4-1】真空中では、 $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ と $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ からポアソン方程式 $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ を導いた。分極 P が存在している誘電体内ではこの式はどうか？

【演習問題 4-2】誘電率 ϵ の物質を使って、無限に広く厚さ d の板を作った。真空中に一樣な電場 \vec{E} がある時、この板を法線ベクトルが電場と角度 θ を為すように配置した。板内部では電場 \vec{E} と電束密度 \vec{D} はどのようになるか？

真空中と誘電体内で電場 \vec{E} が等しくなるのはどのような時か？

また、真空中と誘電体で電束密度 \vec{D} が等しくなるのはどのような時か？

【演習問題 4-3】半径 R の球形をした強誘電体が、ある一方向に一樣に \vec{P} の分極をしている。外部から電場はかかっていないとして、この時の球の内部・外部それぞれについて、 \vec{E}, \vec{D} を求めよ。

(ヒント：この時、表面電荷密度は $|\vec{P}|\cos\theta$ となる。 θ は \vec{P} の向きと、球の中心から考えている表面へと向かうベクトルのなす角)

索引

- curl, 49
- div, 37
- flux, 26
- grad, 45
- rot, 49
- steradian, 21
- 位置エネルギー (クーロン力の), 52
- 重ね合わせの原理, 10
- ガウスの発散定理, 52
- ガウスの法則, 25
- ガウスの法則 (積分形), 32
- ガウスの法則 (微分形), 35
- 極座標の div, 39
- 近接作用論, 3
- クーロンの法則, 6
- クーロン力, 6
- グラディエント, 45
- 勾配, 45
- 作用・反作用の法則 (クーロンの法則に関して), 9
- 真空の誘電率, 6
- ステラジアン, 21
- ストークスの定理, 52
- 静電遮蔽, 69
- 静電ポテンシャル, 43
- 双極子モーメント, 62
- 素電荷, 7
- div, 37
- 電位, 43
- 電界 (電場), 11
- 電気双極子, 61
- 電気双極子モーメント, 62
- 電気力線, 12
- 電束, 75
- 電束密度, 75
- 電場, 11
- 導体, 69
- ナブラ (), 41
- 発散 (div), 37
- 比誘電率, 76
- 分極, 73
- 保存力, 48
- ポアソン方程式, 54
- 誘電体, 73
- 誘電率 (真空の), 6
- 誘電率 (物質の), 76
- ラプラシアン, 54
- ラプラス方程式, 54
- 立体角, 21
- ローテーション, 49