

2008年度電磁気学II講義録

前野昌弘

平成21年1月31日

目次

第 0 章 静電場から静磁場へ	1
0.1 電磁気学 I の復習	1
0.2 磁場とは何か	2
0.2.1 磁石の作る磁場	2
0.2.2 電流の作る磁場	2
0.2.3 磁場中の電流の受ける力	4
0.2.4 磁極の正体	5
0.3 章末演習問題	8
第 1 章 静磁場の法則その 1 —アンペールの法則	9
1.1 無限に長い直線電流による磁場	9
1.2 アンペールの法則	11
1.3 磁位	12
1.4 アンペールの法則の応用例	12
1.4.1 ソレノイド内部の磁場	12
1.4.2 平板を流れる電流	13
1.5 章末演習問題	14
第 2 章 静磁場の法則その 2 —ビオ・サバールの法則	15
2.1 ビオ・サバールの法則	15
2.1.1 微分形の法則から場を求めること	15
2.1.2 電流が作る磁場の式を作る	16
2.1.3 アンペールの法則との関係	19
2.1.4 線積分で書いたビオ・サバールの法則	20
2.1.5 ビオ・サバールの法則のもう一つの導出	21
2.2 ビオ・サバールの法則の応用	22
2.2.1 円電流の軸上の磁場	22
2.2.2 円電流の軸上以外での磁場	23
2.2.3 ソレノイドコイル	26
2.3 章末演習問題	28
第 3 章 静磁場の法則その 3 —電流・動く電荷に働く力とポテンシャル	29
3.1 無限に長い直線電流間の力と、アンペアの定義	29
3.2 電流素片の間に働く力	29
3.3 導線の受ける力と動く電荷の受ける力	31
3.3.1 ローレンツ力	31
3.3.2 ローレンツ力を受けた荷電粒子の運動	32
3.3.3 ホール効果	34
3.4 ベクトルポテンシャル	35
3.4.1 数学的な定義	35
3.4.2 物理的意味	36
3.4.3 ベクトルポテンシャルが一意でないこと	38
3.4.4 ベクトルポテンシャルの計算	39

3.5	章末演習問題	40
第4章	磁性体中の磁場	43
4.1	磁性	43
4.2	反磁性	44
4.3	常磁性体	46
4.4	強磁性体	47
4.5	磁場の表現—磁束密度 $\vec{B}$ と磁場 $\vec{H}$	49
4.5.1	誘電体中の $\vec{E}$ と $\vec{D}$	49
4.5.2	$\vec{B}$ と $\vec{H}$	50
4.5.3	透磁率	52
4.6	例題：一様に磁化した円筒形強磁性体	53
4.7	媒質が変わる場合の境界条件	54
4.8	章末演習問題	54
第5章	動的な電磁場—電磁誘導	57
5.1	ファラデーの電磁誘導の法則	57
5.2	導線が動く時の電磁誘導のローレンツ力による解釈	60
5.2.1	仕事をするのはいったい誰か？	62
5.3	磁束密度の時間変化と電場	62
5.3.1	時間変動する電磁場の場合の電位	64
5.4	自己誘導・相互誘導	65
5.4.1	自己インダクタンスと相互インダクタンス	65
5.4.2	同軸ケーブルの自己インダクタンス	67
5.5	コイルの蓄えるエネルギー	68
5.6	章末演習問題	69
第6章	変位電流とマックスウェル方程式	71
6.1	変位電流	71
6.1.1	マックスウェルによる導入	71
6.1.2	変位電流は磁場を作るか？	74
6.2	電磁波	75
6.2.1	電磁波の方程式	76
6.3	章末演習問題	78

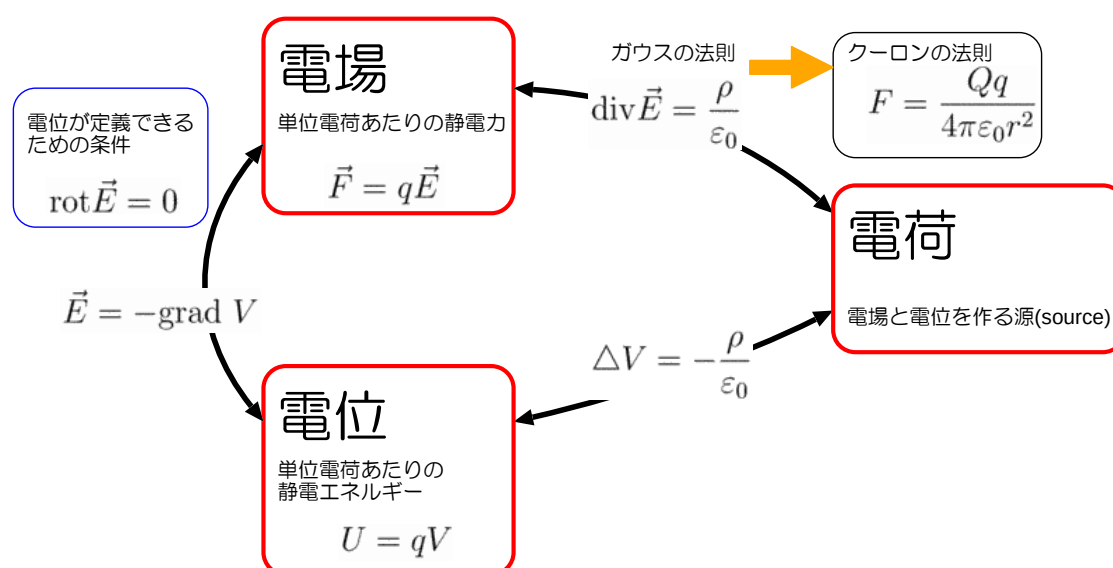
第0章 静電場から静磁場へ

電磁気 I では、電場および電荷に関する物理法則を学んできた。電磁気 II では磁場と電流に関する物理法則を学ぶ。ただし、この章からしばらくは電流および磁場は時間的に変動しないものとする。

以下この章では、静磁場の持つ性質を定性的に扱う。具体的な計算などは次の章以降にまわす。

0.1 電磁気学 I の復習

静電気の法則をざっと図表にまとめると以下のようなになる。



大事なことは「場」の概念（つまり「近接作用」の概念）である。電荷と電荷の間に力が働くことは実験事実であるが、その力が直接伝わる（「遠隔作用」）のではなく、電荷が電場（電位）を作り、その電場（電位）の中にいる電荷は力を受ける。

電荷は

- 電場を作るという能動的役割
- 電場によって力を受けるという受動的役割

の両方を持っていることになる。場に対してこのような性質を持つものを「源 (source)」と呼び、以上のような作用を「場と源の相互作用」と言う。今後、磁場が加わるが、磁場には磁極もしくは電流という源がある¹。

なお、物質中の静電気現象を考える時には、

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1)$$

で表される「電束密度 $\vec{D}$ 」も大事な物理量となる。 $\vec{P}$ は「分極」と呼ばれる量で、物質を構成する原子がどの程度の双極子モーメントを持っているかを表す量である。物質中では上に書いた法則のうち、ガウスの法則が

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \text{div} \vec{D} = \rho \quad (2)$$

と修正される。

¹現代物理では全ての力が場との相互作用の形で記述されている。電磁場の相互作用を量子力学的に考えたものが量子電磁力学である。

0.2 磁場とは何か

0.2.1 磁石の作る磁場

磁場というものを直観的に感じることができるのは磁石である。磁石を人類が発見したのはかなり古い（電荷よりも古い）。磁石に働く力は静電気と似た性質をたくさん持っている。まず、N 極と N 極など、同種の極が反発し、N 極と S 極つまり異種の極は引き合う。これは同種電荷が反発し異種電荷が引き合うのと同じである。また、実験によりこの力にもクーロンの法則が成立することがわかっている。そこで、「電荷」に対応するものとして「磁極」を定義し、N 極を「プラスの磁極」、S 極を「マイナスの磁極」と呼ぶ。単位として Wb（ウェーバー）² を使って測定した場合、二つの磁極（それぞれ $m_1[\text{Wb}]$ と $m_2[\text{Wb}]$ ）が距離 $r[\text{m}]$ 離れている時に、

$$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu r^2} \quad \text{真空中なら } F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^2} \quad (3)$$

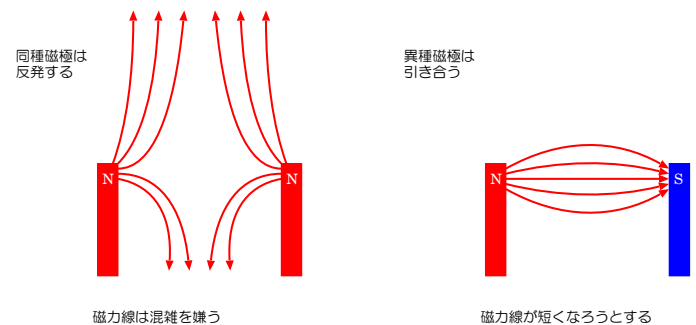
という式で力を表すことができる。 μ は透磁率と呼ばれる量で、誘電率と同様にまわりの物質によって決まり、特に真空中の値を μ_0 と書く。MKSA 単位系では $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ という値であるが、こういうぴったりした数字になるのは、MKSA では電流の単位 $[\text{A}]$ をこの式で定義しているからである³。静電気力に対応して「電場」 $\vec{E}[\text{N/C}]$ という場を考えように、「磁場」 $\vec{H}[\text{N/Wb}]$ を考えることもできる。

透磁率の単位は、上の定義からすると $[\text{Wb}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2]$ となるが、 $[\text{Wb}]$ が $[\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}]$ であることを使って書き直すと、 $[\text{N}/\text{A}^2]$ である。本来 SI 単位系は $[\text{m}][\text{kg}][\text{s}][\text{A}]$ を基本に使うということになっているので、 $[\text{N}/\text{A}^2]$ という表記がその原則には沿っているのだが、後で出てくるインダクタンスの単位 $[\text{H}]$ （「ヘンリー」と読む）を使って $[\text{H}/\text{m}]$ という表記もよく使われる。

以上のように「磁場 $\vec{H}$ 」を電場との対応させて定義した。表にすると以下のようになる。

	源	定義式	クーロンの法則	源の単位	場の強さの単位
電場	電荷 q	$\vec{F} = q\vec{E}$	$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	$[\text{C}]$	$[\text{N/C}]$ または $[\text{V/m}]$
磁場	磁極 m	$\vec{F} = m\vec{H}$	$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^2}$	$[\text{Wb}]$	$[\text{N/Wb}]$ または $[\text{A/m}]$

電場と磁場の類似点はこれだけではなく、重ね合わせの原理が使えるところも同じである。また、電気力線に対応する磁力線は電気力線と同様の性質（混雑を嫌がり、なるべく短くなろうとする）を持ち、磁力をこの磁力線の力学的性質から説明することもできる。これは、電場の基本法則と磁場の基本法則であるクーロンの法則が同じ形をしているので当然と言えば当然ではある（しかし、面白い）。



0.2.2 電流の作る磁場

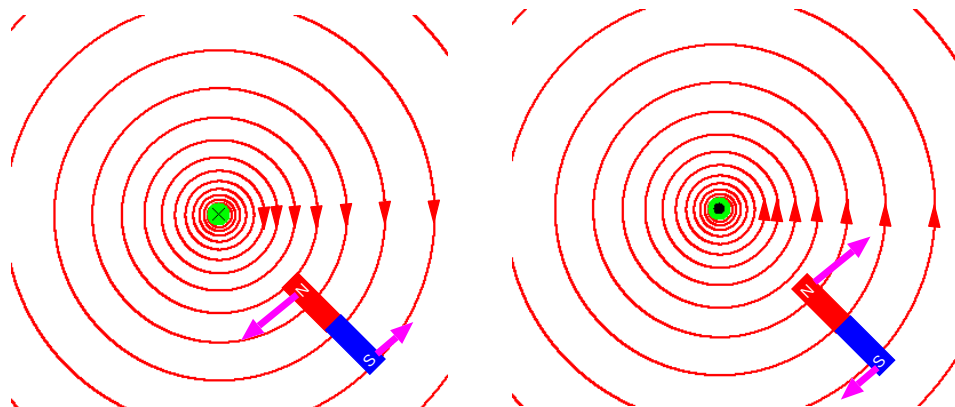
ここまでの話だと、電場と磁場は二つの全く別々のもので、たまたまその性質が似ているというふうに感じられるかもしれない。実際、電気的現象と磁気的現象が科学的に研究されるようになった 1600 年から 200 年近くの間、科学者たちは電場と磁場の間の直接的関係を見つけられずにいた。この認識に大きな変化が現れたのは、エールステッド（Oersted）が「電流が磁場によって力を受けること」を発見した 1820 年である⁴。同じ年にアンペール（Ampere）⁵が「電流と電流の間に力が働くこと」を発見し、さらに電流と磁場の間の関係を深く研究している。

²まず後で述べる方法で電流の単位 A（アンペア）を定義し、電流が作る磁場の大きさから磁場の単位 A/m を定義し、その磁場が磁極に及ぼす力が $\vec{F} = m\vec{H}$ となるように磁極の単位 Wb を定義する。そういうわけで今の段階では単に「そういう単位がある」としておいて欲しい。

³「ぴったりした数字」と言いながら、なんで 4π やら 10^{-7} やらがつくんだよ？と思うかもしれない。この辺も歴史的事情がいろいろある。

⁴エールステッドは授業中に実験装置の磁針が近くの電流の ON/OFF によって向きを変えることに気づいたと言う。

⁵電流の単位アンペアは、彼の名にちなむ。ちなみにエールステッドの方も cgs 単位系の磁場 $\vec{H}$ の単位になっているのであるが、cgs 単位系は最近使われることが少なくなっている。



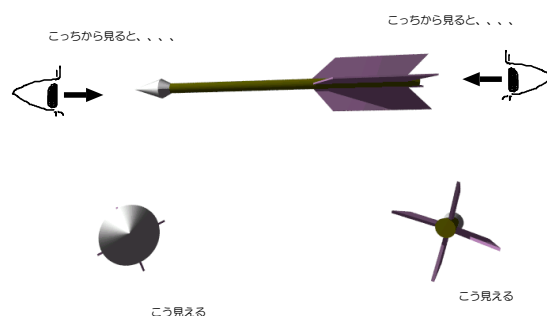
アンペールたちの研究により、電流がどのように磁場を作るかという法則（経験則）が得られたわけであるが、ここでは式で説明するのは後に回し、どのような形の磁場ができるのかだけを説明しておく。

電流によって作られる磁場 $\vec{H}$ の向きは「右ネジの法則」で決まる。すなわち、電流が流れていると、その電流の周りを回するような磁場 $\vec{H}$ が生まれる。

図の○の中に×が書かれたマークは「紙面の表から裏へ抜ける方向」を意味する。この方向に紙面を電流が貫いている時、図のように電流の周りに同心円状の磁場 $\vec{H}$ が発生する。逆に「紙面の裏から表へ抜ける方向」は○の中に小さな●を入れたマークで表現する。

これは飛んでいる矢を前後から見た時の見え方を示している。×は矢羽根なのである。この場合は電流の向きが逆転したのだから、磁場 $\vec{H}$ の向きも逆転する。「右ネジの法則」と呼ばれるのは、右ネジ⁶を回転させる方向を磁場 $\vec{H}$ の向きと考えた時、ネジがそれによって進む方向が電流の向きに対応しているからである。

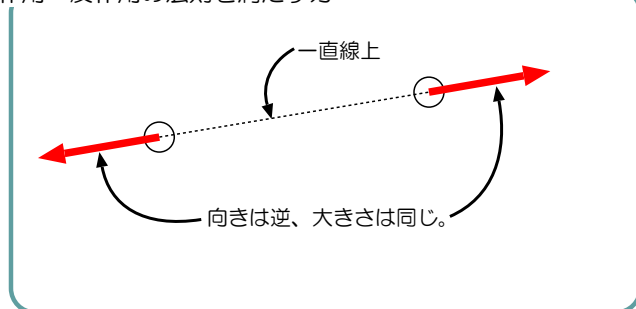
電流の作る磁場に関して、アンペールら発見者を大いに驚かせたのは、電流によって作られる磁場が磁極に及ぼす力がクーロン力のような中心力ではなかったことである。二つの電荷の間に働くクーロン力は、(引力の場合も斥力の場合も) 二つの電荷を結ぶ線の上にあった。ところが磁場が電流に及ぼす力は、磁場とも電流とも垂直な方向を向くのである。それゆえ、通常の力と違って、作用反作用の法則を満足しない。作用反作用の法則は、作用と反作用が



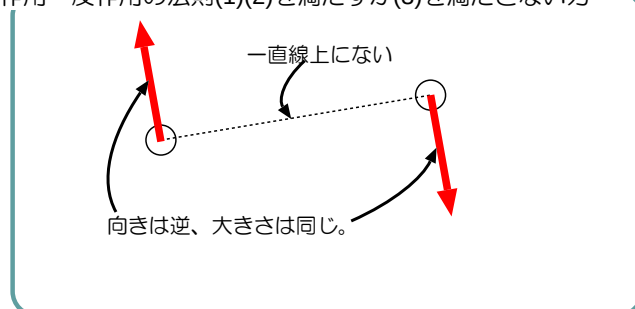
- (1) 逆向きであること
- (2) 大きさが等しいこと
- (3) 一直線上にあること

を要求する。(3) は教科書などでは省略されていることも多い⁷が、角運動量保存則を導くためには必要である（下の図を見れば、(3) を満たしてないと角運動量が保存しないことが理解できるだろう）。

作用・反作用の法則を満たす力



作用・反作用の法則(1)(2)を満たすが(3)を満たさない力



電流と磁極の間に働く力の場合、一見 (3) が満足されない。より細かく調べると、電場や磁場も運動量や角運動量を持ち、電磁場も含めた系で考えるとちゃんと作用反作用の法則が満足されることがわかる（後述）。

⁶市販されているネジのほとんどは右ネジであるので「普通のネジ」とっておけばよい。回転する部品（扇風機など）には左ネジと右ネジが両方使われて、ネジが自然に抜けないように工夫されている。

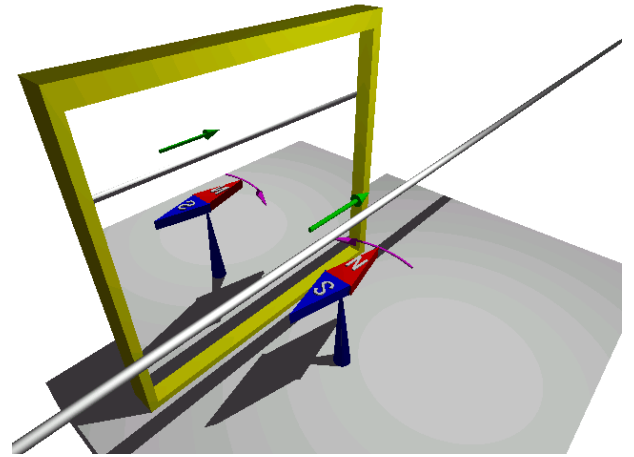
⁷ニュートンの「プリンキピア」冒頭にある力学の第3法則の中には書かれていない。

余談ながら、アンペールがもう一つ不可解に思ったのは、この力が左右対称に見えないということである。次の図のように、磁針の上に導線が通っているところを考える。これを鏡に映したと考えると、鏡の中（鏡像）で起こることは、現実世界で起こることと逆になるように思われる。

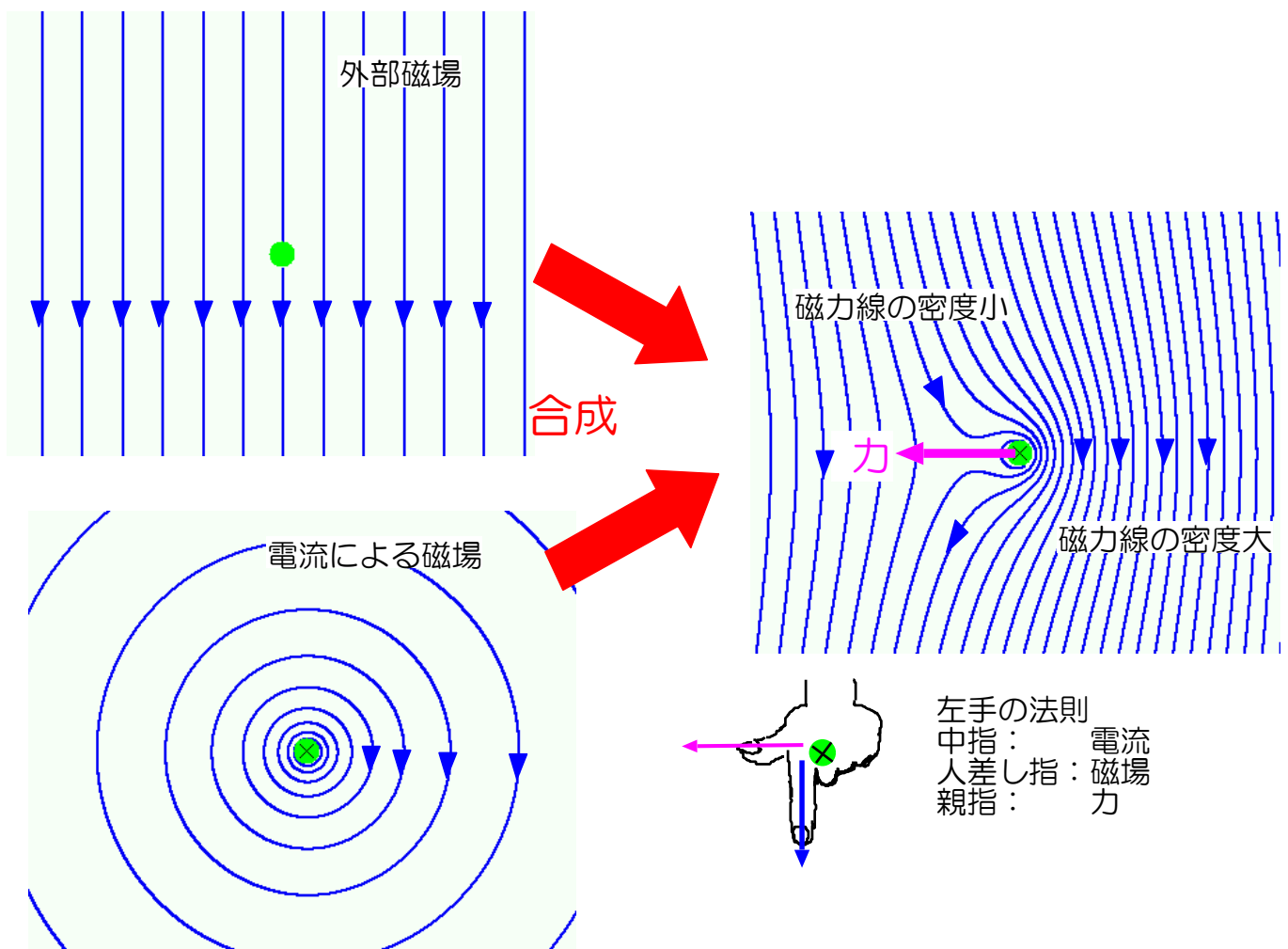
ということは、電磁気の法則は左右対称ではないのだろうか???

この時代では、「物理法則というのは左と右を区別しない」と思われていたので、この疑問は実にもっともなものである。

後で磁極というものの正体がわかれば謎は氷解することになるだろう。結論を述べると、物理法則の左右対称性は（この段階では）破れていない⁸。実は鏡の中のN極はS極になるのである（このテキストの後の部分を読めば、なぜそうなるのかはわかるはず）。



0.2.3 磁場中の電流の受ける力



静磁場に関する問題については、電流と磁場の関係は

- 電流が磁場を作る。
- 磁場中の電流は力を受ける。

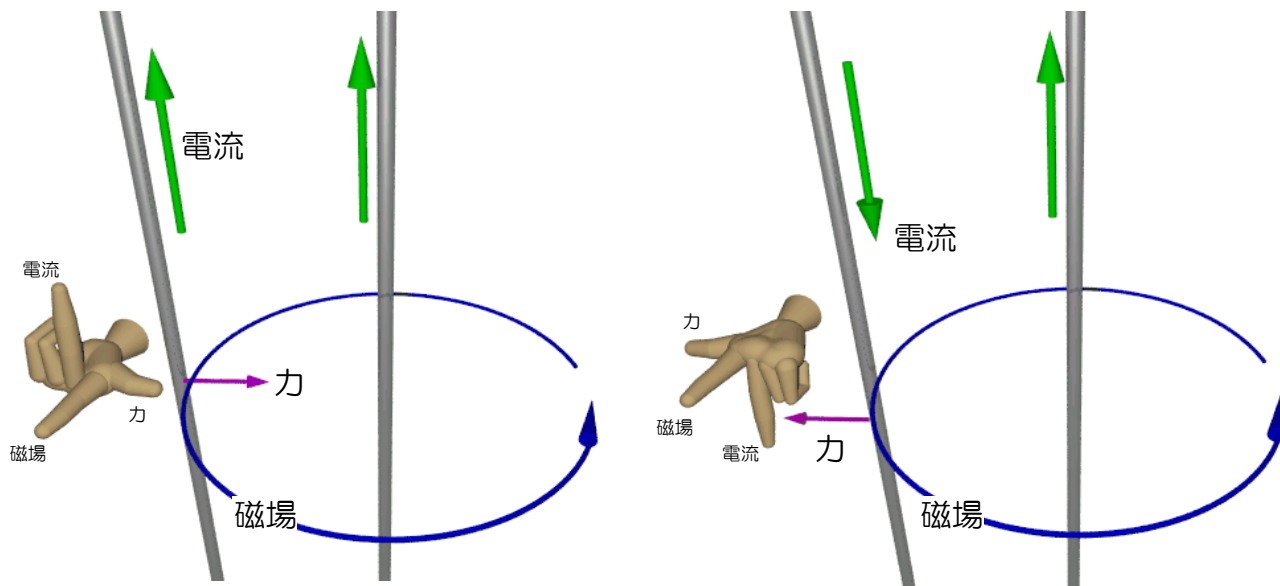
ということになる⁹。この「磁場中の電流は力を受ける」ということを、磁力線の張力と斥力で説明しよう。

⁸後にβ崩壊という現象の中で、左右対称性が破れていることが発見されるが、これは電磁気学の範囲外である。

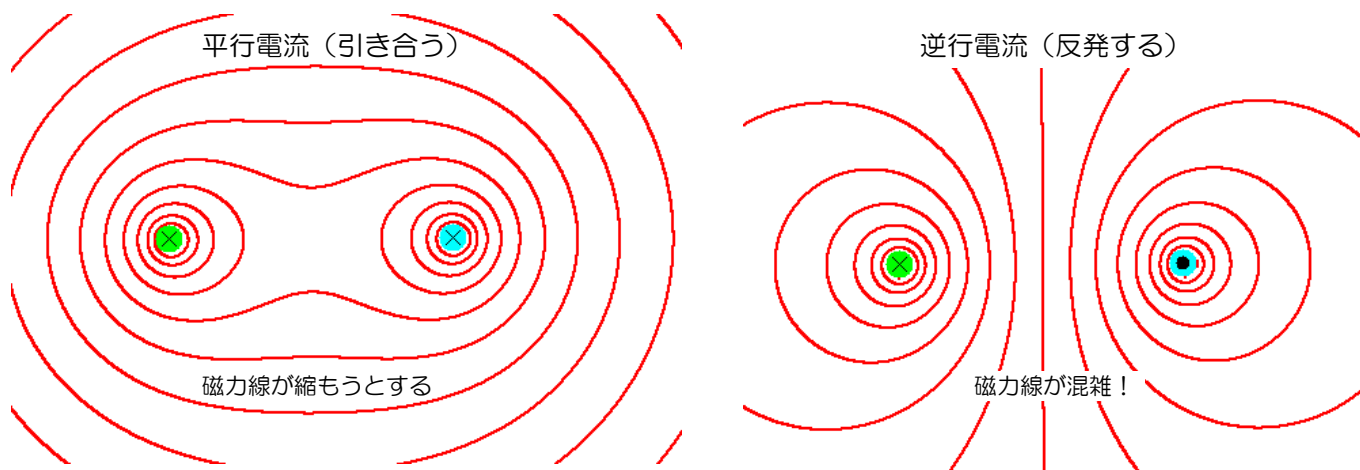
⁹変動する電磁場の場合、「磁場が変化すると電場が発生する（電磁誘導）」という現象が加わる。それは後の章でやろう。

外部から（磁石などにより）上から下へ向かう磁場が存在している場所があったとする（図左上）。ここに電流を紙面表から裏へ流すと、電流の周りを回る磁場ができる（図左下）。この二つが合成された磁場を考えると、電流の右側では二つの磁場が強め合って強い磁場となる。ここで、磁力線が電気力線同様に「短くなろうとする」「混雑を嫌う」という性質を持っていると考える。すると、右側の強い磁場、すなわち混雑した電気力線による強い圧力によって電流が左に押されることになる。なお、図を見ると「磁力線が短くなろうとする」という性質でこの左向きの力を理解することもできる。

磁場中の電流が磁場とも電流とも垂直な方向に力を受けることを表現するのが「フレミングの左手の法則」である。左手の中指と人差し指がそれぞれ「電流の方向」と「磁場の方向」を示し、親指の方向に力が発生する。



図のように、フレミングの法則から考えると、平行な電流は引っ張り合い、逆行する電流は互いに反発することがわかる。そのことは、磁力線を描いてみると、



のようになって、やはり、「磁力線が短くなろうとする」「磁力線は混雑を嫌う」という性質によってこの力が発生するのだと考えることができる。

0.2.4 磁極の正体

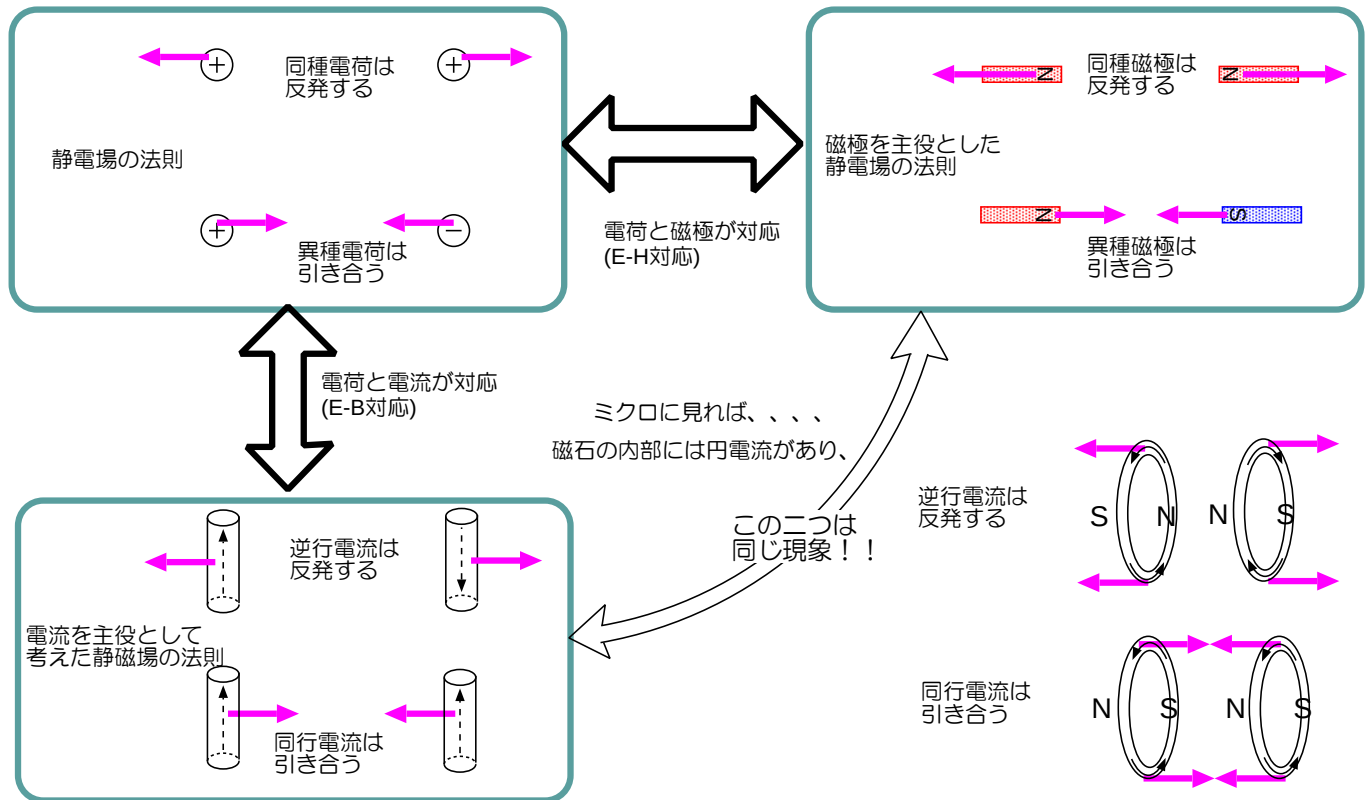
しかし、実は電荷のように独立した存在としての「磁極」などというものは存在しない。磁場を作るのは電流である¹⁰。そして、磁場中に置かれた電流が力を受ける。

電磁石はまさに電流の作る磁石である。永久磁石は一見どこにも電流など流れていないように思えるが、実は原子分子レベルで流れている電流がその磁力の源である¹¹。「磁極」は実は電流が作っているものなので、磁極どうしに力が働

¹⁰ 棒磁石などの磁石が作っている磁場は、原子レベルで流れている電流によって作られていると考える。

¹¹ スピンと呼ばれる、粒子の自転に対応する“運動”も源の一つである。というより、磁石の磁力のほとんどは、電子のスピンに由来する。スピンは量子力学で理解すべき物理量であって、古典力学的な意味の“運動”ではないので、電荷粒子のスピンを「電流」と呼ぶには語弊がある。しかし電

くように見えるわけである。つまり、静電場における「電荷」に対応するものは静磁場では「電流」であると考えべきなのである¹²。



これが磁石の正体

立場としては上の図に示したように「電荷と磁極が対応するという立場（電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{H}$ が対応するので、E-H 対応と呼ばれることが多い）」と「電荷と電流が対応するという立場（こちらは E-B 対応と呼ばれる）」の二つがある。ミクロに見ると（少なくとも今現在知られている）磁力はすべて電流に由来すると言ってよいので、E-B 対応の方がより本質的だと考えてよいだろう。

そこで、以下では電流の間に働く力を使って「磁場」を定義する方法で考えよう。

問題をややこしくしているのは、電荷と電荷の間の力である静電気力の場合には電荷に向きがない（プラスマイナスはあるが）が、電流には向きがある、ということである。これに関連して、電場が電荷に力を与える場合、その力の方向は電場の方向と一致する（負電荷なら逆を向くが、方向は同じ）が、電流と磁場の場合は電流の方向とも磁場の方向とも違う方向に力が働くという点が少しややこしい。

もう一つややこしいのは、電場を表現する場には、電場 $\vec{E}$ と電束密度 $\vec{D}$ があったように、磁場を表現する場には磁場 $\vec{H}$ と磁束密度 $\vec{B}$ がある¹³。電流を主役として磁場を定義する場合、最初に定義されるのは $\vec{B}$ の方である¹⁴。

ではまず、磁束密度 $\vec{B}$ の定義¹⁵を述べよう。

荷のある粒子の持つ角運動量が磁場の源であることには違いない（スピンは角運動量なのである）。このあたりは量子力学を勉強してから考え直して欲しい。

¹² こう考えると、アンペールの疑問に答えることができるのである！

¹³ 物理現象を表すための言葉である「電場」「磁場」と、物理量であるところの $\vec{E}$, $\vec{H}$ を表す言葉としての「電場」「磁場」が同じなのはちょっとややこしい（無用な混乱を招くことがある）。文脈で判断しよう。

¹⁴ 磁極を主役として磁場を定義するならば最初に定義されるのは $\vec{H}$ となる。これがこのような形式を「E-H 対応」と呼ぶ理由である。このテキストでは E-B 対応で行くので、まず $\vec{B}$ が定義される。

¹⁵ なお、 $\vec{B}$ の方が本質的であるので、 $\vec{B}$ のことを単に「磁場」と呼ぶ本も中にはある。英語では、 $\vec{B}$ を「magnetic induction」と呼ぶこともある。

$\vec{B}$ の定義

試験電流 $\vec{I}$ (向きも表現してベクトルで書く) に、単位長さあたり

$$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B} \quad (4)$$

の磁場による力が働く時、そこには磁束密度 $\vec{B}$ の磁場がある。

あるいは、試験電流のうち、場所 $\vec{x}$ から場所 $\vec{x} + d\vec{x}$ までの部分には、

$$d\vec{F} = I d\vec{x} \times \vec{B} \quad (5)$$

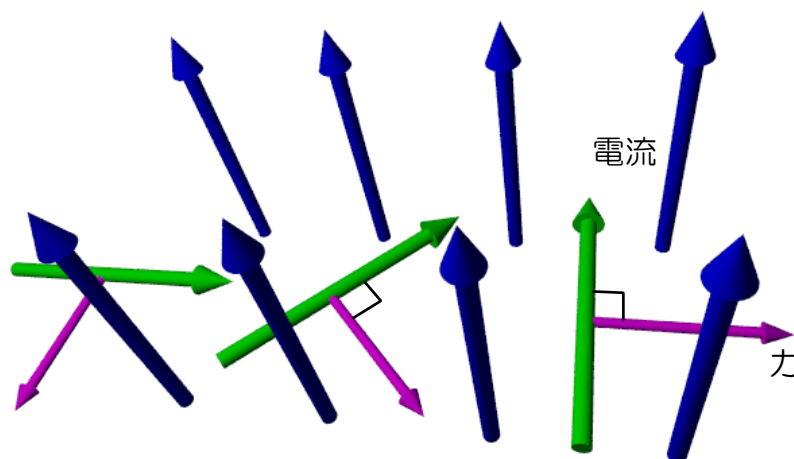
の微小な力が働く (微小であることを表現するために、力も $d\vec{F}$ のように d をつけた)。

真空中では、磁場 $\vec{H}$ と磁束密度 $\vec{B}$ は $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ の関係がある。

上の式から組み立てるならば、磁束密度 $\vec{B}$ の単位は (電流と長さをかけると力になるので) $\text{N/A}\cdot\text{m}$ となる。ただし、磁束密度 $\vec{B}$ には T (テスラ) という独自の単位が割り振られている。また、磁極の単位である Wb を使って表すと Wb/m^2 となる。

この定義の仕方は、電場 $\vec{E}$ を「単位電荷あたりに働く静電気力」としたのと同様である。磁束密度 $\vec{B}$ は「単位電流あたり、単位長さあたりに働く磁場による力」ということになるが、気をつけなくてはいけないのはこの定義式には外積が入っているため、電流と力の方向に注意しなくてはならない。

記号 $\times$ は外積であり、単なる掛け算ではもちろんない。ベクトル $\vec{a}$ とベクトル $\vec{b}$ の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ ととも垂直な方向を向く。



磁場による力は、磁場とも電流とも垂直な方向に働く

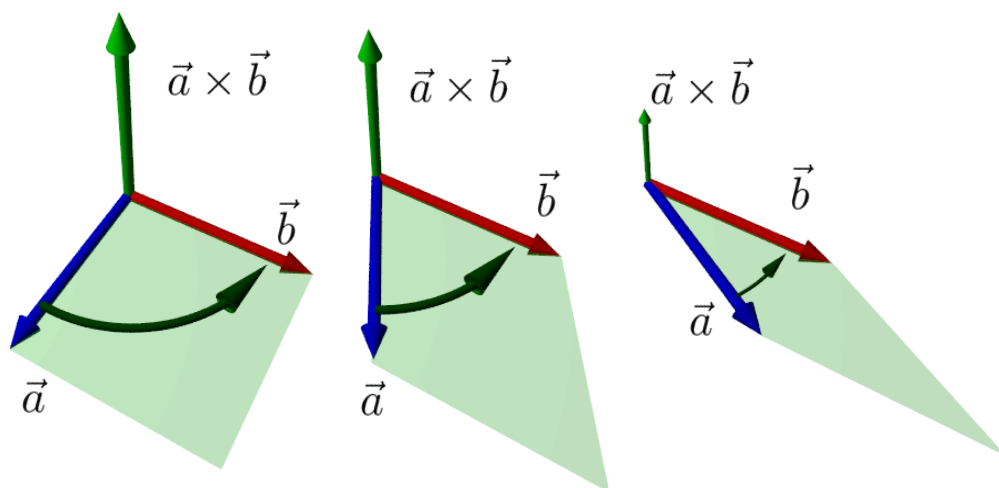
二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ があって、二つのベクトルのなす角を θ とすると、その外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさは

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

である。つまり、 $\vec{a}$ に垂直な成分 $|\vec{b}| \sin \theta$ を掛け算する。

この結果は、図に示した平行四辺形の面積となる。

外積の結果はベクトルである。その向きは、 $\vec{a}$ から $\vec{b}$ の方向へとネジを回した時、ネジの進む方向を向く。



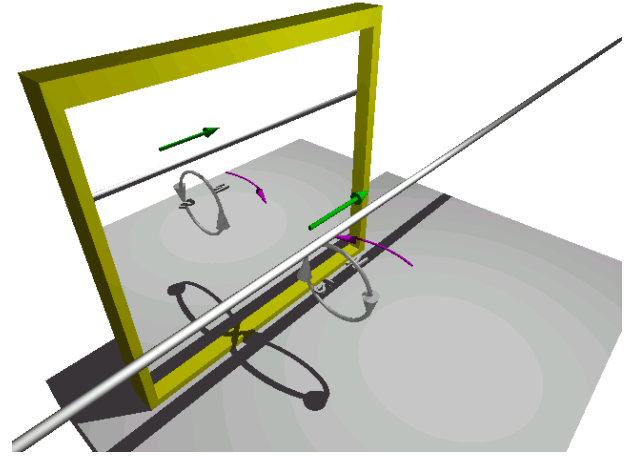
電荷の定義の場合、試験電荷を一個おけば電場 $\vec{E}$ は向きと大きさが全てわかったが、それとは違って、磁場の場合試験電流 $\vec{I}$ が1本あるだけでは、 $\vec{B}$ が決定できない。 $\vec{I}$ を持ってきて、 $d\vec{F}$ を測定したとして、 $\vec{B}$ は一つに決まらないのである (具体的には、 $\vec{B}$ のうち、 $\vec{I}$ と平行な成分が決まらない。そういう成分があったとしても、式 (4) には効かないからである)。平行でない試験電流が2本以上あれば、 $\vec{B}$ を完全に決定できることになる。

距離 r 離れて2本の平行電流 (I_1 と I_2 としよう) が走っている時、互いの電流に単位長さあたり $\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$ の引力が働くことが実験的に知られている。

これらの力をきちんと計算するためにはまず磁場と電流の間にどのような法則が成立するかを数式で表現していなくてはならない。次の章からそれを実行しよう。

この章の最後に、アンペールの疑問「物理法則は左右対称ではないのだろうか？」の答を与えておこう。右の図を見て欲しい。磁石もなんらかの「電流」によって作られるとして、磁石がある時にはそこにどのような電流があるのか、ということを図で表現したのがこの図である。図のように円状に回る電流があればそこに N 極、S 極が存在する。鏡に映すと、電流の回る方向も鏡像となる。この結果、(図ではそのまま鏡に映っているが!)、実は鏡に映した N 極は S 極になるのである!!

以上のように、磁場の源が電流であるということを考えれば、磁極が鏡の中では反転することを理解することができ、物理法則の左右対称性は保たれる。



0.3 章末演習問題

★【演習問題 0-1】「電磁気学 I」の復習問題。

- (1) 電場ベクトル $\vec{E}$ と電位 V の間にはどのような関係があるか?
- (2) 電位 V が定義できるためには、電場 $\vec{E}$ はどのような条件を満たさなくてはならないか。
- (3) その条件が満たされている時、電場 $\vec{E}$ が電荷に対してする仕事に関して、どのようなことが言えるか。
- (4) ガウスの法則とはどのような法則か。
- (5) 原点に置かれた電気量 Q の点電荷の作る電場の式 $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ を、ガウスの法則を使って求める過程を示せ。

★【演習問題 0-2】「電磁気 I」の復習問題続き。ベクトル解析。

- (1) $\text{div}, \text{rot}, \text{grad}$ はそれぞれどのような計算か?
- (2) grad の rot が 0 であることと、 rot の div が 0 であることを具体的に示せ。
- (3) 極座標の $\vec{\nabla}$ は、なぜ $\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi}$ という形をしているのか、説明せよ。
- (4) 極座標のラプラシアン $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ を求める方法を説明せよ。
- (5) 極座標でのポアソン方程式 $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ を解け。ただし、ここでは ρ は定数とせよ。

第1章 静磁場の法則その1 —アンペールの法則

1.1 無限に長い直線電流による磁場

前の章では、電場と電荷の相互作用を考えるのと同様に、磁場と電流の相互作用を考えていくことができることを示した。この章では、磁場と電流の相互作用を記述する法則を具体的に数式で表現していこう。そのために、電流が磁場を作っている状況の中でもっともシンプルである、「無限に長い直線電流による磁場」について考えるところから始めよう。以下のことが知られている。

— 無限に長い直線電流による磁場 —

真空中に無限に長い直線電流 $I[A]$ がある時、その電流から距離 r 離れた点での磁場は、 $\frac{I}{2\pi r}$ で、電流と垂直な平面上で、電流からその地点に伸ばした線と垂直な方向で、電流に対して右ネジの方向を向く。

実際には無限に長い直線電流を作ることはできないが、十分長い導線を設置して実験してその磁場を測定することができる（さらに導線の長さによる実験結果の違いを分析すれば、「無限に長い導線ならどうなるか」を推測することも可能であろう）。そうやって実験することで、上のような結果を得ることができる。

これを円筒座標または極座標を取った時の方位角 ϕ 方向の単位ベクトル $\vec{e}_\phi$ を使って表現すれば、

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\phi \quad (1.1)$$

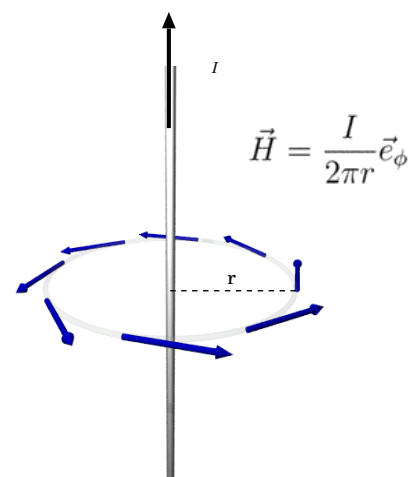
である。 $\vec{e}_\phi$ は各点各点で z 軸周りに回転する方向を向く単位ベクトルである。

真空中であれば

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\phi \quad (1.2)$$

と書いても同じことである。

ところで、静電場の場合の基本法則は



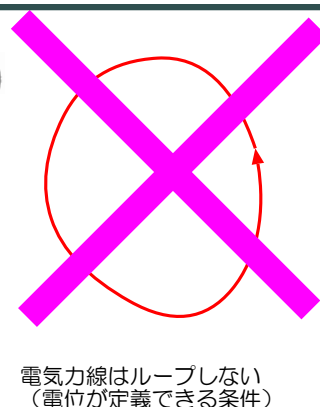
静電気学の基本法則

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

真空中なら $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

電荷 Q から電束が Q 本出る
(真空中なら、電荷 Q から電磁力線が $\frac{Q}{\epsilon_0}$ 本出る)

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$



のようにまとめられた¹。

¹ $\text{rot} \vec{E} \neq 0$ なら電磁力線がループする、ということではないことに注意（逆は正しい。ループがあれば $\text{rot} \vec{E} \neq 0$ である）。前にも述べたが、電磁力線がループしなくても $\text{rot} \vec{E} \neq 0$ になる例はある。

電荷に対応する「磁荷」は実は存在していない²ということがわかっているの、 $\text{div } \vec{B} = 0$ という法則³が成立する。

一方、磁力線はループすることもあることがわかった。ということは、 $\vec{H}$ については $\text{rot } \vec{H} = 0$ という法則は成立しないということになる。ではどんな法則が成立するのだろうか？—実験的に得られた式の一つである $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\phi$ から予想をたててみよう（あくまで予想であるから、どんな場合でも予想が正しいかどうか、検証することが必要である）。

rot の意味は「微小な面積を囲む閉曲線によってベクトル場 $\vec{A}$ を線積分した値を単位面積あたりに直したもの」であった。もっと物理的に表現すると「 $\vec{A}$ を各点各点で場所に依存して働く力だとみなして、微小な面積を囲む閉曲線によってその力を受けながら動いた物体がどれだけ仕事をされたかを考え、それを単位面積あたりに直すとそれが $\text{rot } \vec{A}$ である」ということになる。

そこで、磁場を力だとみなしてある面積を一周させた時にどれだけの仕事をするかを考えよう。「みなして」などと言わなくても磁場は単位磁極に働く力と定義されているのだから、単位磁極のある面積を回るように一周させた時に磁場がする仕事を計算して単位面積あたりに直せば、 $\text{rot } \vec{H}$ を計算できる。

電流と垂直な面上で電流を中心とする半径 r の円の上を、 $m[\text{Wb}]$ の磁極が運動する場合を考えると、力は一定値 $m \times \frac{I}{2\pi r}$ であり、常に運動方向に働くから、距離をかければ仕事が計算できる。すなわち、

$$m \times \frac{I}{2\pi r} \times 2\pi r = mI \quad (1.3)$$

となる。ここで半径 r に依存しない答が出ていることに注意しよう（遠いところでは磁場が弱くなるが、その分距離が長くなるので、仕事は一定値となる）。

では次に、図のような経路で動かすとどうなるかを考えてみよう。図の $A \rightarrow B$ では、磁場は

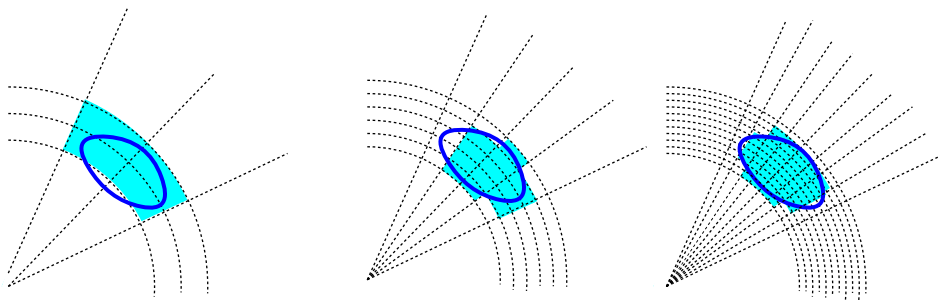
$$m \times \frac{I}{2\pi r} \times r \Delta\theta = \frac{m\Delta\theta}{2\pi} \quad (1.4)$$

の仕事を。 $B \rightarrow C$ では磁場による力と運動方向が垂直なので仕事をしない（これは後の $D \rightarrow A$ も同様）。 $C \rightarrow D$ では

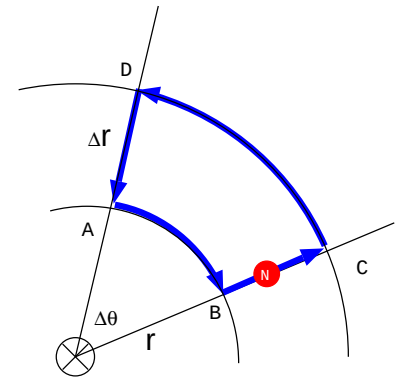
$$-m \times \frac{I}{2\pi(r+\Delta r)} \times (r+\Delta r)\Delta\theta = -\frac{m\Delta\theta}{2\pi} \quad (1.5)$$

の仕事がされる（これもまた、半径 $r+\Delta r$ への依存性がなくなったことに注意）。一周分トータルの仕事は0になってしまった。

これから「電流を回るように磁極を動かすと仕事は mI となる（電流をまわらないで磁極を動かすと仕事は0）」という法則が成り立つことが予想される。今考えた経路だけではなく、一般の経路でもそうだろうか???



ができる。



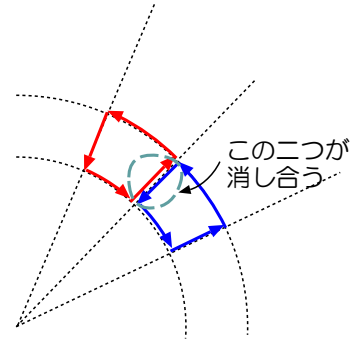
一般の経路で考える時には、再び物理の定石である「細かく分けて考える」という手段を使う。つまり、左図のように、任意の図形を既に計算した形の小さな図形の集まりと取るのである。右へ行くほどより細かい分割を考えている。最終的に分割のサイズを無限小とした極限で、任意の図形は上で計算した図形の集合として扱うこと

²もちろん、将来発見されるかもしれない。その時には電磁気の教科書全部に改訂が必要である。

³真空中では $\text{div } \vec{H} = 0$ と $\text{div } \vec{B} = 0$ は同じ式であってどっちを使っても差し支えない。物質中では $\text{div } \vec{B} = 0$ だけが正しい。これについては後で述べる。

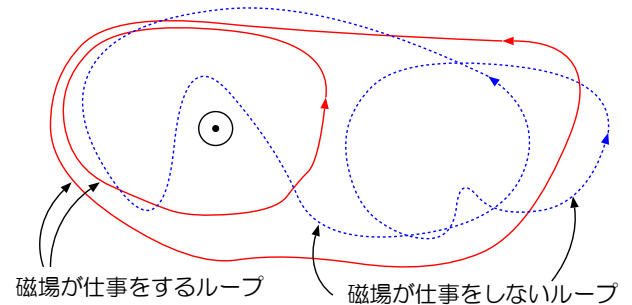
こうやって細かく分けた時、「後でくっつけることができるのかどうか」という点が重要になるが、今の場合、ループの方向を常に同じになるように（「上から見て反時計回り」とか）決めておけば、となり合う微小ループの接する部分については仕事（線積分）の寄与は常に消え「ループの外側部分」だけが残るのである（なお、どんな形のループでも大丈夫であることを厳密に証明するのは少しややこしいので、ここでは証明は略する）。

なお、実験により、磁場についても重ね合わせの原理が成立することが確かめられているので、電流が一本でなく複数本ある時も同様の計算が成立すると結論してよい。



1.2 アンペールの法則

以上をまとめると、次のような結論が出る。右の図に書いた、電流の周りを回っていないループ（破線）の場合は、磁場のする仕事はトータルで0となる。一方電流の周りを回るループ（実線）の場合は磁場のする仕事は磁極の大きさ×電流となる。後者の場合、経路を小さく分割していった時に、一個だけ電流の周りを円を描いて回るといった経路が含まれていると考えればよい。



以上から、「電流 I [A] の周りを回るように磁極 m [Wb] を周回させると、磁場は一周の間にちょうど mI [J] の仕事をする。」という法則（「アンペールの貫流則」と呼ぶこともある）があることが結論される。この式からも、 $[\text{Wb} \cdot \text{A}] = [\text{J}]$ という単位の関係があることがわかる。これは静電場の時の $[\text{C} \cdot \text{V}] = [\text{J}]$ に対応する式である。

いろんな電流を使って磁場を測定する実験から、この法則を導き出されたわけである⁴。

アンペールの法則における周回の軌道を、微小面積 $d\vec{S}$ の周りを回るような経路に設定する。すると、この時の仕事はすなわち、 $m \times \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S}$ となる⁵。

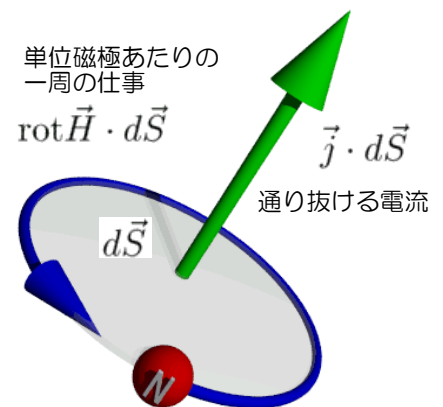
電流が単位面積あたり $\vec{j}$ という密度で流れているとすれば、アンペールの法則は

$$m \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = m \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1.6)$$

という式となる。

この式を、 $(\text{rot } \vec{H} - \vec{j}) \cdot d\vec{S} = 0$ と変形してのち「 $d\vec{S}$ というのは任意のベクトルだから、その任意のベクトルとの内積をとって0ということは $\text{rot } \vec{H} - \vec{j} = 0$ だ、というふうに考えると、両辺にある $m d\vec{S}$ を取り去ることができる⁶。

このようにして、



アンペールの法則の微分形

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad (1.7)$$

という式が作られる。この式は、真空中であれば $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ と同じ式である。

ここでは無限に長い直線電流の例に対してのみこの式が成立することを確認したが、幸いなことにこの式は静磁場の任意の状況で成立することがわかっている。 $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ と、上に書いた $\text{div } \vec{B} = 0$ を合わせると、真空中の静磁場の基本法則となる。静電場、静磁場の基本法則は右のようにまとまる。

上の分類では式で div を使ったか rot を使ったかで分けたが、物理法則としての役割を基準に分類するならば、

	div	rot
電場	$\text{div } \vec{D} = \rho$	$\text{rot } \vec{E} = 0$
磁場	$\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$

⁴ 「アンペールの法則」と言われているが、数式の形でまとめたのはマクスウェルである。

⁵ 力は $m\vec{H}$ であり、微小面積 $d\vec{S}$ を回る仕事は $\text{rot } (m\vec{H}) \cdot d\vec{S}$ ということになるが、定数である m は rot という微分演算子の外に出してもよい。

⁶ これを、「 $m d\vec{S}$ で割る」などと表現する人がいるが、もちろん、文字通りの意味で「割る」ことはできない。

	源と場の関係	ポテンシャルが定義できる条件
電場	$\text{div } \vec{D} = \rho$	$\text{rot } \vec{E} = 0$
磁場	$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$	$\text{div } \vec{B} = 0$

という分類が有効である。静電場において $\text{rot } \vec{E} = 0$ という式は、電位を定義して $\vec{E} = -\text{grad } V$ と書くことができることを保証する条件であった。これはベクトル解析における「rot が0であるベクトル場はスカラー場の grad で書ける」という定理のおかげである。

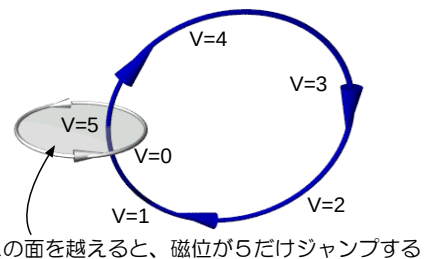
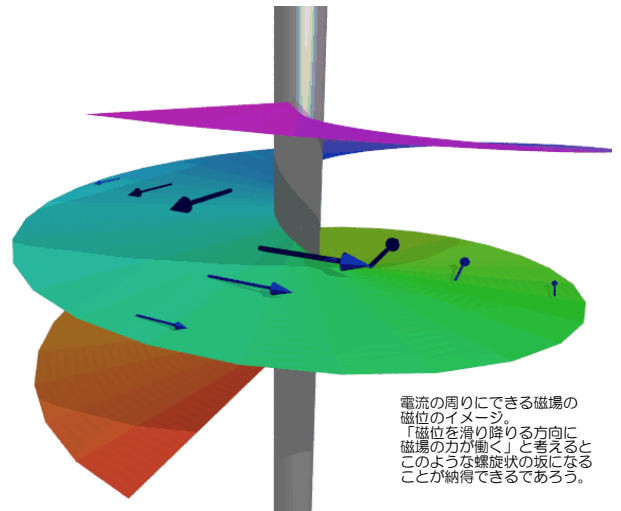
$\text{div } \vec{B} = 0$ という式もまた、磁場に対するポテンシャルを定義することができる条件になる⁷。

1.3 磁位

電場 $\vec{E}$ に対して電位 V を考えて $\vec{E} = -\text{grad } V$ という関係を使って考えることで静電場の計算を簡単にすることができた。ならば、磁場 $\vec{H}$ に対して磁位 V_m (スカラー量) を考えて $\vec{H} = -\text{grad } V_m$ のように表すことができるのでは、と考えたくなるところである。

しかし「磁位」という考え方は問題を含んでいる。rot $\vec{H}$ が0ではないからである。「磁場は磁位の高いところから低いところに向かう」と考えてみよう（これは「電場は電位の高いところから低いところに向かう」という物理現象の磁場バージョンである）。すると「磁場をさかのぼる方向に進めば、磁位はどんどん上がっていく」ことになる（電位の場合ならば、「電場をさかのぼる方向に進めば電位はどんどん上がっていく」ということになるが、これは全く正しい）。図のような円形電流の場合にこれを適用すると、どんどん磁場をさかのぼっていき、「磁位はどんどん上がっていったのに、元の場所に戻ってきてしまった」ということになるわけである。

ただし、「磁位」というものは全く使えないのかというと、そんなことはない。「一周回ってきても元に戻らない関数⁸」であるということに注意して使えば、じゅうぶん使える。たとえば一例として、空間の一部に「切れ目」を入れて、その部分で磁位が不連続になると考えてもよい。不連続な関数を考えるのはいろいろな問題があるので、その不連続面は問題と関係ないところに来るようにしてややこしい問題を回避するようにする（例えば考えている物体は決してその不連続面を通らないような状況のみを考える）。また、「電流が磁場を作る」という考え方でなく「磁極が磁場を作る」という考え方に立った場合も、磁位は有効である。そのような問題点に注意さえ払えば、磁位を使って磁場を計算する方法も有用になる。しかし、このテキストではこれ以上取り上げないことにする。直線電流の場合で磁位を考えるとどのようなことになるかについては、章末演習問題の1-3を見よ。

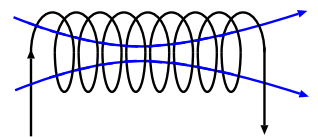


1.4 アンペールの法則の応用例

1.4.1 ソレノイド内部の磁場

アンペールの法則を使って磁場を求めることができる例として、ソレノイドコイル内部の磁場を考えよう。「ソレノイドコイル」とは、導線をびっちり詰めて巻いたコイルを意味する。

実際のコイルでは磁場は多少は外に漏れることもあるのだが、ここでは理想的状況を考えて、コイルの内側のみ磁場があると考えよう。すると、コイルの中の磁場はコイルの軸方向



⁷ここで注意しておくべきことは、この「磁場に対するポテンシャル」は電場における「電位」とは全く違ったものになるということである。大きな違いは、このポテンシャルは電流というベクトル量を作るポテンシャルなので、ベクトル量になるということである。電荷というスカラー量が源となって作られるポテンシャルである電位はスカラーであった。ベクトル解析には「div が0になるベクトル場はベクトル場の rot で書ける」という定理もあるので、 $\text{div } \vec{B} = 0$ であるところの $\vec{B}$ は $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ と書くことができる。この $\vec{A}$ を「ベクトルポテンシャル」と呼ぶ。ベクトルポテンシャルについては、電流と電流の間に働く力について学んだ後で再び触れよう。

⁸こういう関数は「多価関数」と呼ばれる。複素関数論でリーマン面に cut が必要な状況に似ている。

を向く（少なくともコイルの端以外では）。そのような状況で、右下図のようにループを考えよう。

ループ EFGH は、内部に電流が通っていない。よってこのループに沿って磁極を一周させると、磁場のする仕事は 0 でなくてはならない。F → G と H → E では明らかに磁場は仕事をしない（進行方向と垂直）。よって、E → F での仕事と G → H での仕事がちょうど逆符号とならなくてははいけない。ということは直線 EF 上と直線 GH 上では、磁場の強さが全く同じではなくてははいけない。これはコイルの内側のどこでも成り立つから、コイル内部では磁場の強さは一様となる。

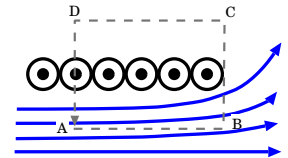
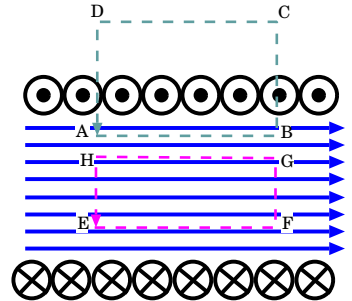
ループ ABCD では、C → D での仕事も 0 である。磁場が仕事をするのは A → B のみである。直線 AB の長さを L とし、磁場の強さを H とすれば、磁場が一周です仕事単位磁極に対しては HL となる。ループ ABCD の中には電流が貫いている。今コイルが単位長さあたり n 回巻きになっているとすると、電流 I が nL 回貫くことになり、全電流は nLI となる。アンペールの法則により、

$$HL = nLI \quad \text{ゆえに} \quad H = nI \quad (1.8)$$

とソレノイドコイル中の磁場の強さを求めることができた。

磁場の強さが「巻き数」そのものではなく「単位長さあたりの巻き数」になるのは、電流が遠ざかればそれだけ電流の作る磁場の強さも弱くなるからである。よってコイル内の磁場の強さは「その近辺にどれだけの電流を詰め込むことができるか」によって変わることになるわけである。

この式はコイルの端では成立しないことは言うまでもない。端では磁力線が「混雑を嫌う」という性質によって離れていって、密度が下がるからである。では端の方ではアンペールの法則は成立しないのかというと、もちろんそんなことはない。磁場が広がるということは図の上へ向かう磁場成分があるので、B → C の部分でも磁場が仕事することになり、磁場の仕事は減らないのである。



1.4.2 平面板を流れる電流

無限に広い板（厚さ $2d$ として、 z 軸に垂直に配置して、 $z = d$ の面と $z = -d$ の面が表面になるようにしよう）を考えて、これにある方向に電流密度 j のような電流を x 方向に流す。この板の近所ではどのような磁場ができるだろうか。

問題を解くためにはこの状況の対称性を手がかりにする。まず、 x, y 方向にいくら移動して物理的状況が変わらない（無限に広い板に一樣に電流が流れているので）ということを考えると、できる磁場は z のみに依存する。

次に、電流が x 方向に流れていることを考えると、磁場はそれに垂直な yz 面内にできるはずである。

一方、状況は $z \rightarrow -z$ という反転に関して対称である。ゆえに磁場の z 成分が $z > 0$ で上向きなら $z < 0$ では下向きになるだろう（あるいはこの逆）。しかしそれでは $\text{div } \vec{H} = 0$ にならない（磁場に湧き出しや吸い込みがあることになる）。

よって磁場は z 成分もない。つまり y 成分しかないであろう。 $|z| > d$ の部分（電流の流れていない部分）では $\text{rot } \vec{H} = 0$ であるから、その部分では H_y は変化できない。

電流のある部分では、 $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ の x 成分を考えると、

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j \quad (1.9)$$

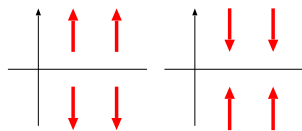
という式が成立しているので、 $H_y = -jz$ というのが解になるだろう。

まとめると、

$$H_y = \begin{cases} -jd & d < z \\ -jz & -d < z < d \\ jd & z < -d \end{cases} \quad (1.10)$$

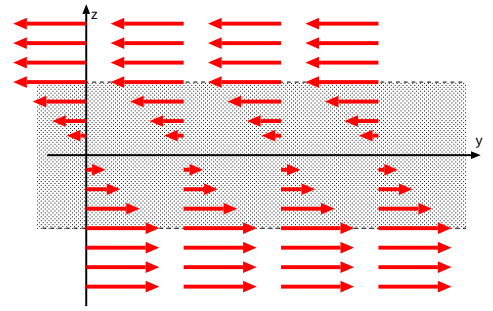
ということになる。

z 軸反転で対称な磁場の例



どちらも、 $\text{div } \vec{B} = 0$ を満たさない。

磁場のできる状況をグラフに書くと右の図ようになる。網掛けした部分が電流が流れている部分で、この部分では $\text{rot } \vec{H}$ が0ではない。電流が流れていないところでは磁場は一定になり、もちろん $\text{rot } \vec{H} = 0$ である。



1.5 章末演習問題

★【演習問題 1-1】無限に長い直線電流による磁場 $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\phi$ を直交座標で表現するとどのようなになるか。

その式を使って $x = 0, y = 0$ の線を除けば $\text{rot } \vec{H} = 0$ であることを確認せよ。

★【演習問題 1-2】アンペールの法則を使って、図のようなドーナツ型のコイル（電流 I が流れていて、全部で N 回巻いてあるとする）の内側での磁場の強さがどのようなになるかを求めよ。ただし、コイルの外には一切磁場は漏れることなく、コイル内の磁力線は全て図の z 軸上に中心を持つ円の形をしているものとする。

★【演習問題 1-3】無限に長い直線電流による磁場に対応する磁位は

$$V_m = -\frac{I}{2\pi} \phi$$

と表現することができる。これの $-\text{grad}$ を取ると磁場は円筒座標 (ρ, ϕ, z) で表現して $\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{e}_\phi$ が出てくることを確認せよ。なお、円筒座標における $\vec{\nabla}$ は

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

である。

確かに $\vec{H} = -\text{grad } V_m$ が成立するという意味では V_m を「磁位」と呼んでいいのだが、これを電位と同様にポテンシャルとして使用しようとすると、困ったことが起こる場合がある。どこで困るのだろうか??

★【演習問題 1-4】極板間の距離が d で、十分広い平行平板コンデンサーが速度 v で極板と平行な方向に走っている。

両極板には面積あたりの電荷密度が $\pm\sigma$ になるように電荷を与えられている。極板間は真空である。電荷が運動するということは、電流があるのと同じだから、極板間には磁場が発生する。

(1) 極板間にはどのような磁場が発生するだろうか?? —概略図を書いた後、極板の真ん中付近では極板の外側には磁場はないと近似して極板間の磁場の強さを計算せよ。

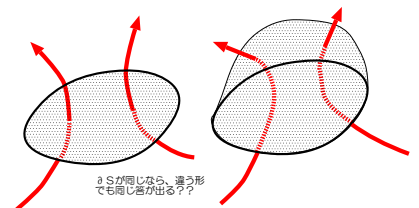
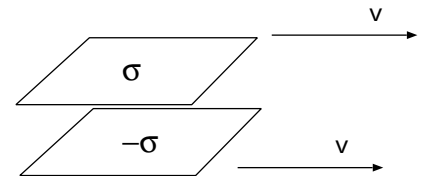
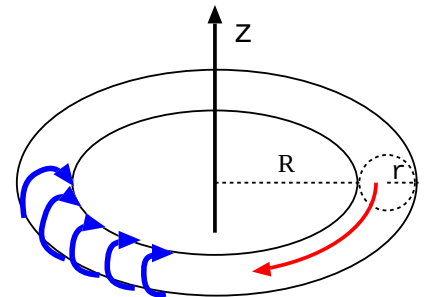
(2) 極板には電場による引力が働く。その力の大きさは極板の単位面積あたり、 $\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2$ である。磁場によってはどのような力が働くだろうか? —また、二つの力はどちらが大きいのか?

(註: 電場による力に $\frac{1}{2}$ がつくのは、この電場が極板間だけに存在し、外側で0になることが効いている (つまり、電荷が完全に電場に浸されてないことが効いている)。磁場についても同様であることに注意)

★【演習問題 1-5】静磁場のアンペールの法則の微分形 $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ をある面積 S で積分し、ストークスの定理を適用すると

$$\int_{\partial S} d\vec{x} \cdot \vec{H} = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{j} \quad (1.11)$$

になることを示せ (∂S は「 S の境界」を示し、 $\int_{\partial S} d\vec{x}$ は境界にそっての線積分である)。今作った式の右辺は、境界 ∂S が同じならば、どんな形でも同じ答を出すことになる。なぜそうなるのか、説明せよ (今考えているのは時間的に変化しない状態であることに注意!)。



第2章 静磁場の法則その2—ビオ・サバールの法則

アンペールの法則はきれいにまとめられているが、実際の状況では使いにくいこともある。積分形のアンペールの法則は、磁場を線積分したもの（磁場を力とみなした時の仕事）を与える法則である。そのため、磁場そのものを計算することができるのは、対称性がいい場合に限られる¹。この章では、静磁場を求めるためにもう少し使い勝手のよい方法を考えよう。

2.1 ビオ・サバールの法則

2.1.1 微分形の法則から場を求めること

ガウスの法則 $\text{div } \vec{D} = \rho$ にせよアンペールの法則 $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ にしても、未知の量であることが多い $\vec{D}, \vec{H}$ を微分すると $\rho, \vec{j}$ が出てくるという形の式になっている。ゆえに $\vec{D}, \vec{H}$ を求めるには積分が必要である。電場の場合は、以下のように考えることで ρ から $\vec{E}$ を求めることができる（例によって「細かく区切って考える」という物理の極意のお世話になる）。

$$\text{div } \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad \longleftrightarrow \quad \text{等価} \quad \vec{E}(\vec{x}) = \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}$$

電荷密度 ρ から電場 E を求める式

点電荷 Q が $\vec{x}'$ にいるのだとすると、この電荷が $\vec{x}$ に作る電場は $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}$ である。 $\vec{x}'$ に点電荷がいるのではなく、電荷密度 ρ の電荷分布が存在しているとすれば、その付近の微小体積 $d^3\vec{x}'$ の各点各点に微小電荷 $\rho(\vec{x}')d^3\vec{x}'$ が存在していると考えればよい。各点各点にある電荷の作る電場を足し上げていく事で全電荷の作る電場を計算できる。

こうやって計算した電場の式

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \quad (2.1)$$

と $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ は、適切な境界条件²の下では等価である³。

後で使うので、この式から一つの公式を導いておこう。(2.1)の両辺に div をかける（ということはつまり $\vec{\nabla}$ と内積を取る）。

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E}(\vec{x}) &= \int d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \right) \quad \left(\text{左辺に } \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ を代入してから } \epsilon_0 \text{ をかけて、} \right) \\ \rho(\vec{x}) &= \int d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \right) \quad \leftarrow \text{同じ関数に戻ったことに注意！} \end{aligned} \quad (2.2)$$

¹この事情はガウスの法則が便利だが対称性がない状況では使いにくかったのと全く同様である。ガウスの法則の場合「電気力線の本数＝電場の面積分」が「電気量 $\div \epsilon_0$ 」で与えられるため、対称性がよくないと電場は求められない。

²式(2.1)で電場を計算するということは、「無限遠では電場は0」という境界条件を取っていることになる。

³「 $\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}$ をかけて積分する」という操作が div の逆演算のようなものだという事。

となる。この式は、 $\rho(\vec{x})$ がどんな関数であるかによらずに成立する式である。 $\vec{x}-\vec{x}'$ の関数である $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|^2} \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \right)$ は「任意の $\vec{x}'$ の関数をかけて $\vec{x}'$ で積分すると、積分結果はその関数を $\vec{x}' \rightarrow \vec{x}$ と置き換えたものになる」という性質を持っている。これは前に出てきた「デルタ関数」である。

デルタ関数

任意の関数 $f(\vec{x})$ に関して、

$$\int d^3\vec{x}' f(\vec{x}') \delta(\vec{x}-\vec{x}') = f(\vec{x}) \quad (2.3)$$

が成立する関数がデルタ関数 $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ 。このデルタ関数の一つの例が、

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|^2} \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \right) \quad (2.4)$$

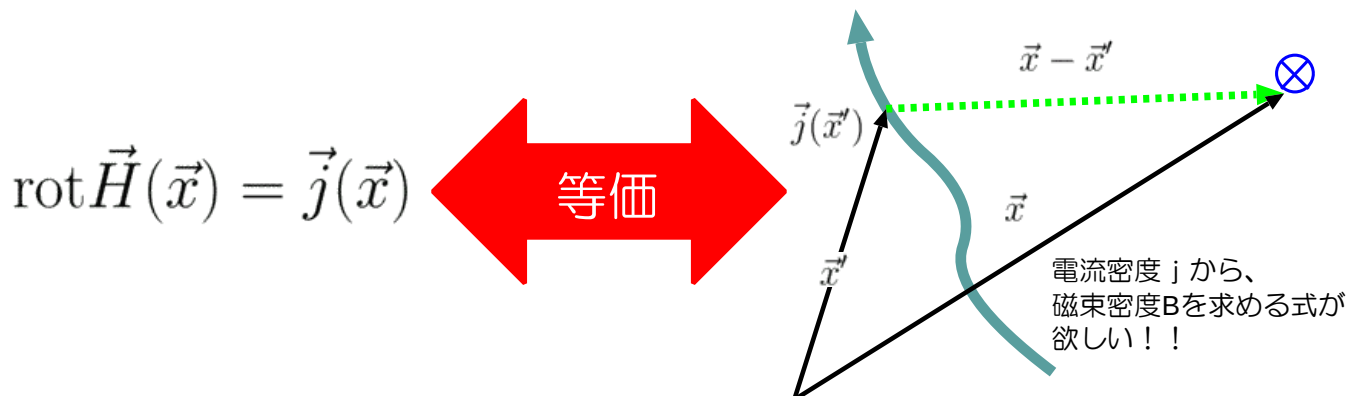
この関数は $\vec{x} \neq \vec{x}'$ の点では0となり、 $\vec{x} = \vec{x}'$ の点では無限大となる。そして積分結果は

$$\int d^3\vec{x}' \delta(\vec{x}-\vec{x}') = 1 \quad (2.5)$$

である。この積分結果が1であることは、ガウスの発散定理を使って $\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|^2}$ の表面積分に直せばわかる。

この関数は、点電荷 Q が一点 $\vec{x}'$ に存在している場合の電荷密度 ρ を Q で割ったものだと思えばよい。 ρ は電荷のない場所では0、電荷のある場所で無限大で、全体で積分すると結果は Q である。この関数は後でも使う。

2.1.2 電流が作る磁場の式を作る

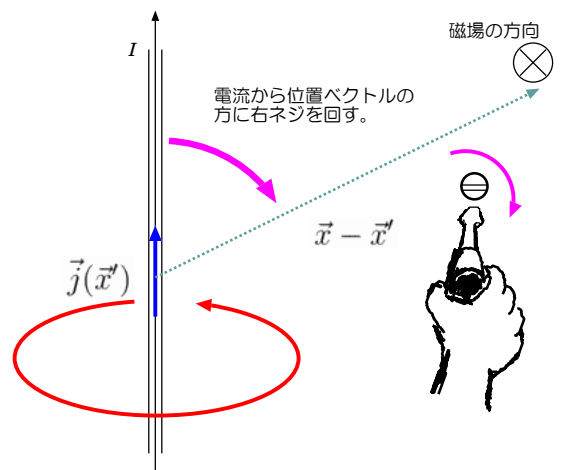


電場の場合で $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ から (2.1) を作ったように、磁場に対応する法則を作ろう。つまり、

$$\vec{B}(\vec{x}) = \int d^3\vec{x}' \left(\vec{j}(\vec{x}') \text{ と } \vec{x}-\vec{x}' \text{ の関数} \right) \quad (2.6)$$

という法則を作り、各点における電流密度 $\vec{j}(\vec{x}')$ が与えられればその各点の電流密度が場所 $\vec{x}$ にどんな磁束密度を作るかを考え（当然それは $\vec{x}-\vec{x}'$ に依存する）、全空間の $\vec{j}(\vec{x}')$ の影響を足し上げる（積分する）ことで $\vec{B}(\vec{x})$ がわかるようにしたいわけである。

まず最初に「どんな向きの磁場ができるのか」を考えよう。その向きも、 $\vec{j}$ と $\vec{x}-\vec{x}'$ で決まる。直線電流の例からわかるように、電流の作る磁場は、電流とも、電流からその位置にひっぱった変位ベクトル（図の $\vec{x}-\vec{x}'$ ）とも垂直である。よって、 $\vec{j} \times (\vec{x}-\vec{x}')$ が出てくることを仮定する。 $\vec{j} \times (\vec{x}-\vec{x}')$ は $\vec{j}$ と $\vec{x}-\vec{x}'$ ととも直交し、 $\vec{j}$ から $\vec{x}-\vec{x}'$ の方向に右ネジを回した時に進む方向であるので、磁場のできる方向を向いているようである。



こうして、各点各点にある微小電流素片が作る微小磁場を足していったものがその場所の磁場になる。

ではある程度この形を予想しよう。まず、

$$\vec{B}(\vec{x}) = K \int d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^n} \quad (2.7)$$

としてみる。 K は比例定数であり、 n は距離によってどの程度磁場が弱まっていくかを決定する数字である。

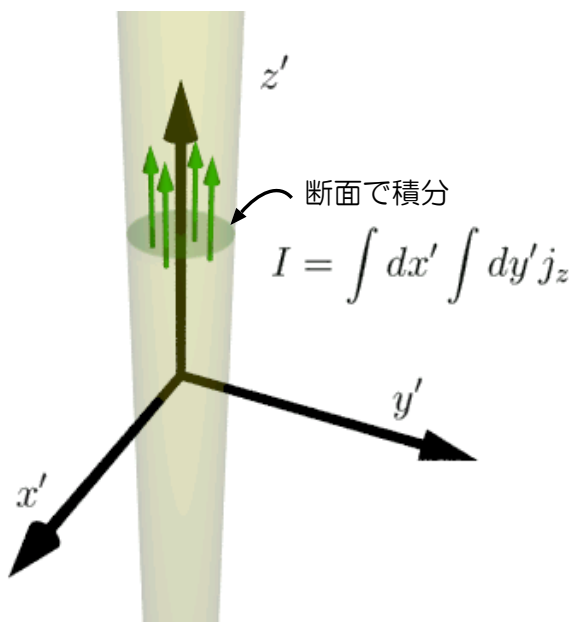
磁場と電場の法則がよく似ていることから考えて「電流の作る磁場も、距離の二乗に反比例するのでは？」と予想すれば、 $n = 3$ となる。「二乗に反比例」なのに $n = 2$ でないのは、分子にも $\vec{x} - \vec{x}'$ があるからである。

とりあえず $n = 3$ とおいて、

$$\vec{B}(\vec{x}) = K \int d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = K \int d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \quad (2.8)$$

とする。これは電場の場合の式 $\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}$ に似ている。違いは磁束密度を作るのが ρ ではなく $\vec{j}$ ということと、磁束密度の向きが $\vec{x} - \vec{x}'$ の方向を向かない（むしろそれに垂直な方向を向く）ということであるが、これは磁場の性質にかなっている。

この式で計算した磁場が無限に長い直線電流の場合の答である $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\phi$ を再現するように、定数 K の値を決めてみよう。



電流を z 軸に沿って置く。電流密度は j_z しかない。よって $\int dx' \int dy' \int dz' j_z$ という積分⁴を行うのだが、このうち $\int dx' \int dy' j_z$ をやってしまうと、全体の電流 I になる（電流密度を面積積分したことに対応する）。電流は z' 軸 ($x' = y' = 0$) の付近に局在している（つまりその部分だけが0でない）場合を考えているので、積分の結果 $x' = y' = 0$ の部分だけが残ると考えてよい。結局 $\vec{x}' = z' \vec{e}_z$ となる。後は残った dz' 積分をやっていく。

$\vec{x} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$ として、

$$\vec{x} - \vec{x}' = r \vec{e}_r + (z - z') \vec{e}_z \quad (2.9)$$

である。電流は $I \vec{e}_z$ であるから、これとの外積を取ることで $\vec{e}_z$ の部分は消えてしまって、 $\vec{I} \times (\vec{x} - \vec{x}') = I(\vec{e}_z \times r \vec{e}_r) = r I \vec{e}_\phi$ となる（下の図を参照）。

これを使うと、

$$\vec{B}(r) = K \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{I r}{(r^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_\phi \quad (2.10)$$

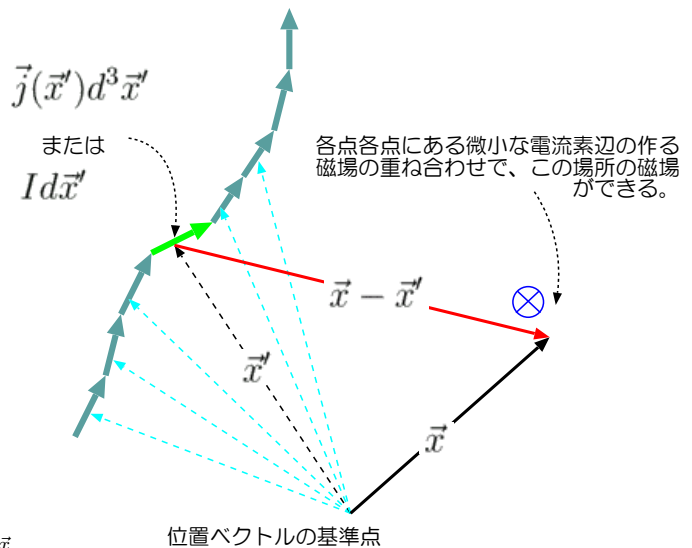
となる。

答は z によらないことは明らかである。なぜなら、今考えている状況は、 z 方向に移動してから考えても全く変化しない（導線はどちらの立場でも、 $z = -\infty$ から $z = \infty$ まで流れている）。ゆえに、 z によって答が変化するはずがない。よって、以下では $z = 0$ の場合、すなわち

$$\vec{B}(r) = K \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{I r}{(r^2 + (z')^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_\phi \quad (2.11)$$

を計算しよう。

⁴さっきまでは $\int d^3\vec{x}'$ と略記していたが、省略なしに書くと $\int dx' \int dy' \int dz'$ となる。



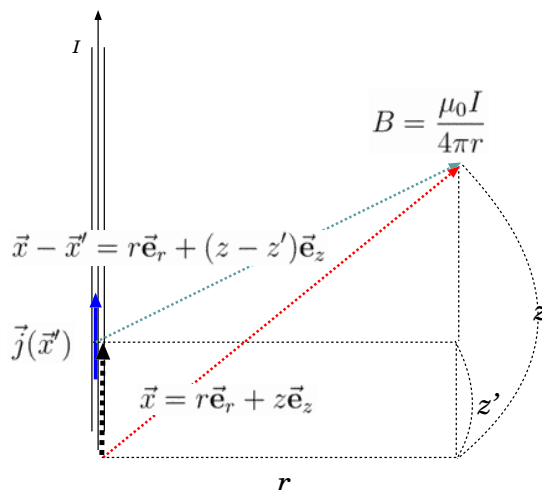
この積分は前に帯電した棒の場合にした計算と同じである。よって、 $z' = r \tan \theta$ とした⁵後 θ を $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで積分すれば計算できて、結果は

$$\vec{B}(r) = \frac{KI}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \frac{1}{(1 + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_\phi = \frac{2KI}{r} \vec{e}_\phi \quad (2.12)$$

となる。

この答が $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\phi$ と一致してはいけなくてはいけないので、比例定数 K は $\frac{\mu_0}{4\pi}$ とすればよい⁶。

以上から、体積積分の形で書いた電流密度と磁場の関係式が求まった。この式はビオ・サバル (Biot-Savart) の法則と呼ばれる。ビオ (Biot) とサバル (Savart) という二人の物理学者が1820年に実験的研究で確認した式に基づくものであるが、正確に言うと、この時代にはまだ「磁場」という概念はなく、「電流と磁石の相互作用」という形で式だったし、ここに書いたような形には整理されていない。



ビオ・サバルの法則 (体積積分形)

電流密度 $\vec{j}(\vec{x})$ が空間に存在している時、 $\vec{x}$ における磁束密度 $\vec{B}(\vec{x})$ は

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad \text{または} \quad = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \quad (2.13)$$

である。この法則は、すぐ後で示す線積分で書いた形もよく使われる。

今は無限に長い直線電流の場合でのみ式を合わせたので、実際に他の状況でも成立するかどうかは実験で確認すべきことである。幸いなことに、この式は一般の静磁気的状況で成立することがわかっている⁷。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

電場を求める積分と磁場を求める積分の決定的な違いを一つ述べておこう。それは

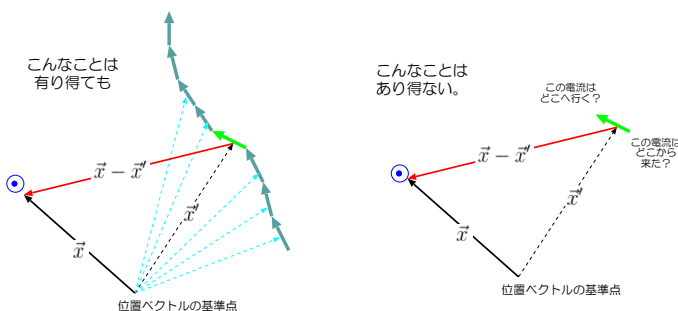
「孤立した電荷は存在するが、孤立した電流は存在しない」

ということである。電荷はある一点にだけ存在することが有り得る (いわゆる点電荷)。しかし、電流は「流れ」である以上、一点だけに流れているわけにはいかず、かならず流れがつながらなくてはならない。

数式で表現するならば、 $\text{div } \vec{j} = 0$ でなくてはならないのである。電流の流線 (電気力線に対応するもの) は湧き出しも吸い込みもなくつながってなくてはならない。ビオ・サバルの法則はあたかも「微小な電流素片が微小な磁場を作る」という法則のように書いているが、これを文字通りに解釈してはいけない。「微小な電流素片」は実在しないからである。

なお、正電荷の溜まる場所と負電荷の溜まる場所があって、その間に電荷が流れて入れば「電流素片」もあるのでは、と考える人もいるかもしれない。だがその場合、図の正電荷は減少し続けることになり、正電荷の作る電場は時間変動する。数式で書くと、 $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ となる (つまり、電流が湧き出すところでは、電荷密度 ρ が減少する)。

時間変動する電場は、磁場にある影響を与えるのである。したがって、このような状況で静磁場の法則であるビオ・サバルの法則を使えるかどうかは慎重に検討してはいけない問題になる。これについては「時間変動する電磁場」の章で詳しく説明しよう。



【補足終わり】

⁵もし $z = 0$ としなかったのなら、ここで $z - z' = r \tan \theta$ と置けば、後は同じ結果になる。

⁶ $\frac{\mu_0}{4\pi}$ の値は、 10^{-7} 。電流と電流の間に働く力を元に電流の単位を決定したので、このような数字になっている。

⁷ビオとサバルが行った最初の実験では、V字型に折れ曲がった導線を通る電流が使われた。この時磁場の強さは、方位磁石を振動させた時の周期で測定されたという。

μ_0 の位置

「電荷が電場を作るように、電流が磁場を作る」と繰り返し述べているが、そう考えると、電荷のつくる電場の式 $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ には比例定数である「真空の誘電率 ϵ_0 」が分母に現れ、電流の作る磁束密度の式 $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{x} \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$ には比例定数「真空中の透磁率 μ_0 」が分子に現れることに、アンバランスな点を感じるかもしれない。このような比例定数が現れるのは、SI 単位系ではまず電流を定義して、電流から電荷と磁束密度を定義しているからである。ゆえに磁束密度 B の中にある長さ L の電流 I に働く力の式 $F = BIL$ には比例定数は現れない。また、磁極と磁極の間の力の式 $F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^2}$ には、分母に μ_0 が現れる。

2.1.3 アンペールの法則との関係

では、今導出したビオ・サバールの法則の式は、 $\text{rot } \vec{B} = \vec{j}$ と等価であろうか。それを次で確認しよう。

ビオ・サバールの法則の両辺の rot を取る。

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \int d^3 x' \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \quad (2.14)$$

ベクトル解析の公式 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ をちょっと順番を変えて $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{B} \cdot \vec{A})\vec{C}$ にしてから使うと、

$$\underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{A}}}_{\vec{B}} \times \left(\underbrace{\vec{j}(\vec{x}')}_{\vec{B}} \times \underbrace{\left(\frac{\vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right)}_{\vec{C}} \right) = \underbrace{\vec{j}(\vec{x}')}_{\vec{B}} \left(\underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{A}}}_{\vec{B}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right)}_{\vec{C}} \right) - \left(\underbrace{\vec{j}(\vec{x}')}_{\vec{B}} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{A}}}_{\vec{B}} \right) \underbrace{\left(\frac{\vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right)}_{\vec{C}} \quad (2.15)$$

と計算できる。ここで気をつけてやらないと失敗するポイントは、 $\vec{\nabla}$ は単なるベクトルではなく微分記号であり、「何を微分するのか」を忘れてはならないという点である。ここで出てきた $\vec{\nabla}$ は $\vec{x}$ による微分である⁸。それゆえ、 $\vec{\nabla}$ は $\vec{j}(\vec{x}')$ は微分しない ($\vec{x}$ の関数じゃないのだから)。微分されるのは $\left(\frac{\vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right)$ 中の $\vec{x}$ である。そのため、 $\vec{A}(\vec{\nabla})$ と $\vec{C} \left(\frac{\vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right)$ の順番は変えてはいけない。一方、 $\vec{A}(\vec{\nabla})$ と $\vec{B}(\vec{j}(\vec{x}'))$ の順番は ($\vec{B}$ と $\vec{C}$ の順番も) 変えてもいいので、上の式では公式とは並び方を変えている。

一般的に、 $\vec{\nabla}$ を含むベクトルに対して公式を適用する時は、「この $\vec{\nabla}$ は何を微分するのか」ということを明確に考えておかないと計算を間違える可能性がある。今の場合 $\vec{B}$ が微分されなかったので計算が以上で済んだが、もし $\vec{B}$ も $\vec{C}$ も両方が微分されるのであれば、

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) + (\vec{C} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{C} - \vec{C}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \quad (2.16)$$

のように、それぞれの微分を両方考える必要がある。

以上に注意しつつこの公式を使うと、

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \int d^3 x' \left(\vec{j}(\vec{x}') \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right) - \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right) \right) \quad (2.17)$$

である。ここで括弧内の第二項に対応する式が 0 になることを示そう。

$\vec{\nabla}$ が微分している相手は $\frac{\vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^2}$ という、 $\vec{x} - \vec{x}'$ という差にのみ依存する関数である。これを x で微分した結果は、 $-x'$ で微分した結果と同じになる。ゆえに、 $\vec{\nabla} \rightarrow -\vec{\nabla}'$ と置き換えると、

$$- \mu_0 \int d^3 x' \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right) = \mu_0 \int d^3 x' \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right) \quad (2.18)$$

となる ($\vec{\nabla}'$ は $\vec{x}'$ による微分)。こうしておいて部分積分を使うと、

$$\mu_0 \int d^3 x' \vec{j}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right) = -\mu_0 \int d^3 x' \left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{x}') \right) \frac{\vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \quad (2.19)$$

⁸正確に書くならば、 $\vec{x} = (x, y, z)$ であり、 $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ 。

と書き直すことができる（表面項は、積分範囲の端では $\vec{j}$ が 0 になっていると仮定して落とした）。

ところが、 $\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{x}') = \text{div } \vec{j}(\vec{x}') = 0$ である。なぜなら今考えているのは定常状態であり、ある領域に流れ込んで来た電荷は同じだけ流れださなくてはいけない。そうでないとその領域内の電気量が変化してしまうのである（それでは定常状態にならない！）。つまり、電流密度は湧き出しも吸い込みもなく、divergence が 0 になる。よって、(2.17) の括弧内第二項は 0 となる⁹。

括弧内第一項には $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \vec{e}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \right)$ が登場する。これはデルタ関数と呼ばれる関数の一例であることはすでに示した。ゆえに、

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \int d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = \mu_0 \vec{j}(\vec{x}) \quad (2.20)$$

となる。真空中なので $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ であることを思えば、これはアンペールの法則 $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ に他ならない。

以上から、ビオ・サバルの法則は、 $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ の逆の計算に対応していることになる。

2.1.4 線積分で書いたビオ・サバルの法則

さて、電流密度が与えられている時の式は以上の通りだが、実際には電流密度ではなく電流 I と、その電流がどの場所を通っているかという線（導線の位置）が与えられている場合が多い。太さの無視できる細い導線に電流 I が流れているとする（この I は定数である。分岐する電流は考えないので、導線上では一定）。その時は電流密度は導線のある場所でのみ 0 ではないので、空間積分は導線のある場所のみの線積分でよいことになる。

電流が x 方向を向いている時であれば、

$$\int dx \int dy \int dz \ j_x \vec{e}_x \times (\dots) \quad (2.21)$$

という計算をしなくてはいけないわけだが、 $\int dy \int dz j_x$ でちょうど「電流密度×電流に垂直な面積」になっているから、この積分で電流 I が出る。この時、電流は充分細い導線内を流れていて、 y, z の変化による影響は現れないものとしよう（そう考えてはいけない状況であれば、まじめに体積積分するしかない）。

つまり積分は

$$\int dx \ I \vec{e}_x \times (\dots) \quad (2.22)$$

に変わるわけである。今は電流が x 方向を向いているという特殊な状況を考えていたので dx 積分だけが残る結果となったが、電流が一般の方向を向いているならば答は 3 つの成分を持つことになる。つまり、電流の x 成分に比例する部分は dx で積分し、 y 成分、 z 成分に対応する部分はそれぞれ dy, dz 積分することになる。ようは、

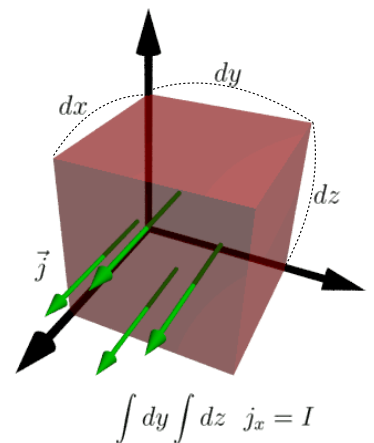
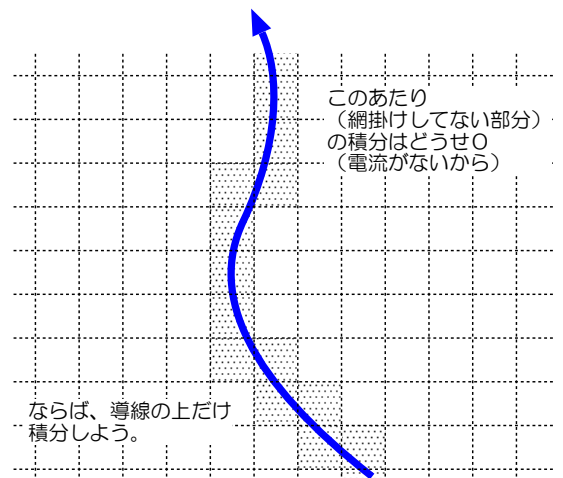
$$\int (I dx \vec{e}_x + I dy \vec{e}_y + I dz \vec{e}_z) \times (\dots) \quad (2.23)$$

という計算をなささい、ということである。この積分の置き換え（ $\int \int \int d^3\vec{x} \vec{j} \rightarrow I \int d\vec{x}$ ）は今後もよく使われる。

結果をまとめると、

$$\int dx \int dy \int dz \ \vec{j} \times (\dots) \rightarrow I \int d\vec{x} \times (\dots) \quad (2.24)$$

と積分が書き換わる。 $d\vec{x}$ は (dx, dy, dz) という成分を持つベクトル（ $d\vec{x} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$ ）である。



【FAQ】「…の部分は $\vec{x}$ の関数なのに、置き換えて大丈夫ですか？」

⁹ このように、ビオ・サバルの法則を導出する時に電流の保存則 $\text{div } \vec{j} = 0$ が必要であったことは記憶しておこう。定常状態でない時はこの保存則は $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ と書き換えられるので、その場合の式も変わってくることに注意。

この積分を行う時、 $\vec{j}$ が0でないのは、電流が流れている特定の場所だけです。つまりどっちの積分も、 $\vec{j}$ が0でないところだけを積分していることになります。

$$\int d\vec{x} \times \vec{A} \quad (2.25)$$

のように書くと、この積分結果はベクトルであり、

$$\begin{aligned} \left(\int d\vec{x} \times \vec{A} \right)_x &= \int (dyA_z - dzA_y), \\ \left(\int d\vec{x} \times \vec{A} \right)_y &= \int (dzA_x - dxA_z), \\ \left(\int d\vec{x} \times \vec{A} \right)_z &= \int (dxA_y - dyA_x) \end{aligned} \quad (2.26)$$

となる。

—— ビオ・サバルの法則（線積分形） ——

電流 I が空間を流れている時、 $\vec{x}$ における磁束密度 $\vec{B}(\vec{x})$ は

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (2.27)$$

である。積分は、存在している電流の経路全体について行う（ I が定数なので積分の外に出てしまったことに注意）。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

2.1.5 ビオ・サバルの法則のもう一つの導出

少しだけ楽な導出方法をもう一つ紹介しておく。ただしこの導出法には「電流と磁場の間に働く力は互いに逆向きで大きさが同じである」という仮定が必要になる¹⁰。

今、場所 $\vec{x}$ に磁極 m を置く。この磁極は場所 $\vec{x}'$ には

$$\vec{B} = m \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{4\pi|\vec{x}' - \vec{x}|^3} = \frac{m}{4\pi|\vec{x}' - \vec{x}|^2} \vec{e}_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}'} \quad (2.28)$$

という磁束密度ができる（磁場に関するクーロンの法則）。

この場所に I という大きさで、 $d\vec{x}$ なる長さを持つ電流素片があったとすると、この素片の受ける力は、 $\vec{F} = Id\vec{x} \times \vec{B}$ で計算して、

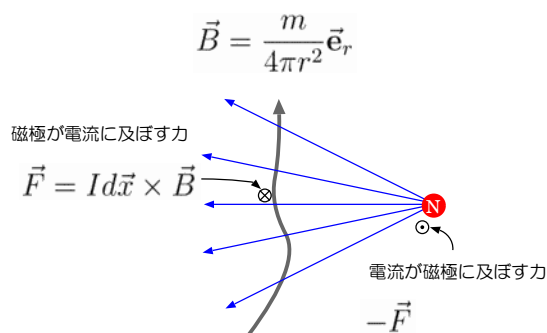
$$\vec{F} = mI \frac{d\vec{x} \times (\vec{x}' - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \quad (2.29)$$

となる。さて、今計算したのは「磁極が電流に及ぼす力」であるが、これと向きが逆で大きさが同じ力が「電流が磁極に及ぼす力」として働くとする。その力は

$$\vec{F} = -mI \frac{d\vec{x} \times (\vec{x}' - \vec{x})}{4\pi|\vec{x}' - \vec{x}|^3} = mI \frac{d\vec{x} \times (\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \quad (2.30)$$

である。これを磁極の大きさ m で割れば「電流によって作られる磁場」 $\vec{H}$ が計算できる。結果は上の式と同じである。

【補足終わり】



¹⁰前にも述べたが、これは作用反作用の法則の一部である。単に逆向きではなく「逆向きで一直線上」とすればこれは作用反作用の法則そのものとなる。この仮定はもっともではあるが、実は電流と磁場の間に働く力の式を作る時に必須のものではない。一見作用反作用の法則を満たさないような式の作り方もある。なぜそんなふうに法則の作り方に任意性があるのかというと、次の補足のところにあるように「孤立した電流は存在しない」のに、孤立した電流に対する法則を作ろうとしているからである。

2.2 ビオ・サバールの法則の応用

この節では、ビオ・サバールの法則を使って実際に電流のつくる磁場を計算してみよう。

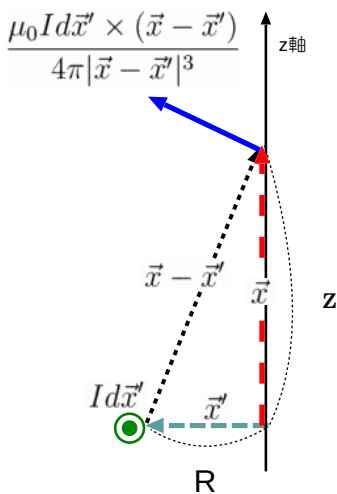
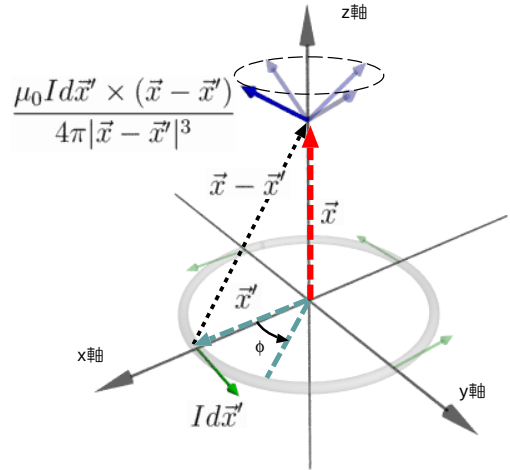
2.2.1 円電流の軸上の磁場

半径 R の円形コイルに電流 I が流れている。この時に周りにできる磁束密度を計算しよう。

図のように、円の中心が原点であるとして、この点を基点として位置ベクトルを考える。まず、比較的計算が簡単な、円の中心軸上を計算してみよう。

$\vec{x}'$ は原点から導線の上のどこか1点へと向かうベクトルである。 $d\vec{x}'$ というベクトルは $\vec{x}'$ の変化量を表すベクトルであり、 $\vec{x}'$ が円の上を一周するうちに、やはり 360 度回転する。ここでは磁場を求める場所を z 軸上にしたので、 $\vec{x} = z\vec{e}_z$ と書くことができる。 $\vec{x} - \vec{x}'$ は図のようなベクトルになり、 $I d\vec{x}'$ から $\vec{x} - \vec{x}'$ へとネジを回した時にネジの進む向きは図のように斜め上の方角を向く ($\vec{x} - \vec{x}'$ と $I d\vec{x}'$ と垂直である)。

円上を $\vec{x}'$ を積分するうちに、この微小磁場もくると一回転することになる。もし $z = 0$ なら、磁束密度は常に上 (+ z 方向) を向く。 $z \neq 0$ ではそうはいかないが、磁束密度の z 方向成分は常に同じ大きさである。またそれ以外の成分は一周積分するうちに対称性から 0 になると考えられる。



立体的に把握するのは難しいので、断面図で書いたものが左の図である。この図では電流は紙面表から裏へ向かい、 $\vec{x} - \vec{x}'$ と磁場が紙面に収めることができる方向になっている。

ここで、積分は半径 R の円を一周するように (図の角度 ϕ を 0 から 2π まで) 行われる。この間、 $d\vec{x}'$ は、大きさ $R d\phi$ で、円周方向を向いたベクトルとなる。

この場合、 $d\vec{x}'$ と $\vec{x} - \vec{x}'$ は直交しているので、外積 $d\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}')$ の大きさは $d\vec{x}'$ の大きさ $R d\phi$ と $\vec{x} - \vec{x}'$ の大きさ $\sqrt{R^2 + z^2}$ の単なる掛け算になる。つまり、微小磁束密度は

$$\frac{\mu_0 I R d\phi}{4\pi(R^2 + z^2)} \quad (2.31)$$

である。

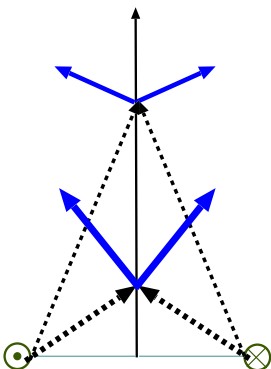
三角形の相似を使ってこの磁束密度の z 軸方向の成分を考えると、

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \frac{\mu_0 I R d\phi}{4\pi(R^2 + z^2)} \quad (2.32)$$

となる。後は積分して、

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.33)$$

が求めたい磁場である。



今出てきた答えは遠方では z^3 に反比例して弱くなる。基本法則であるビオ・サバールの法則では自乗に逆比例して弱くなるのに、円電流の場合で計算すると三乗に逆比例するのは、今考えている電流がループを描いていて、結果として「左向き電流の作る磁場と右向き電流の作る磁場が打ち消し合う」という形で磁場が弱まるからである。図を見るとわかるように、逆行電流のつくる磁場は $z = 0$ 付近ではほぼ同じ方向を向いて強め合うが、遠方では逆方向を向いて弱め合う。このために三乗逆比例するという答になるのである。

また、 $z = 0$ においては

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (2.34)$$

という答になる。距離 R のところに直線電流が流れている場合より π 倍強くなっているが、これは直線電流の場合より近い位置に電流がいることが効いている。

なお、以上を図形的でなく代数的に計算してしまうこともできる。ここで登場したベクトルを、円筒座標の基底を使って書き直すならば、 $d\vec{x}' = R d\phi \vec{e}_\phi$ であり、かつ $\vec{x} - \vec{x}' = z\vec{e}_z - R\vec{e}_r$ である。ただし、ここで書いた $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi$ の向く方向は、場所 $\vec{x}'$ において向く方向である¹¹。

ゆえに、

$$Id\vec{x}' \times (\vec{x} - \vec{x}') = IR d\phi \vec{e}_\phi \times (z\vec{e}_z - R\vec{e}_r) = IR(z\vec{e}_r + R\vec{e}_z) d\phi \quad (2.35)$$

となる¹²。ここで、 $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ の外積は

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_z = \vec{e}_r, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\phi \quad (2.36)$$

になるということを使った。

これから求めるべき磁束密度は

$$\vec{B}(z\vec{e}_z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{IR(z\vec{e}_r + R\vec{e}_z)}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.37)$$

となる。 ϕ を変化させても（積分路として導線上をくると回っても）変化しない量を外に出すと、

$$\vec{B}(z\vec{e}_z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi \vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR^2 \vec{e}_z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi \quad (2.38)$$

となる。 $\vec{e}_z$ は変化しないが、 $\vec{e}_r$ は変化することに注意。 $\int_0^{2\pi} d\phi \vec{e}_r = 0$ となるので、結局最終結果は

$$\vec{B}(z\vec{e}_z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2 \vec{e}_z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.39)$$

となる。

2.2.2 円電流の軸上以外での磁場

次に、 z 軸上から離れた場所での磁場を計算してみる。 z 軸から x 軸方向に距離 x だけ離れた場所を考えよう。 y 方向は考えない¹³。

まず、図からわかるように、

$$\vec{x} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z \quad (2.40)$$

である。また、 $\vec{x}'$ は、原点から角度 ϕ の方向に R 進むベクトルであるから、

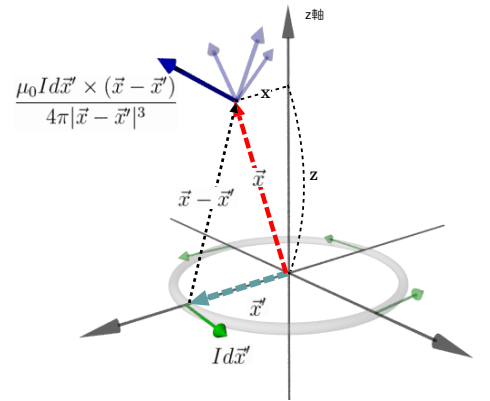
$$\vec{x}' = R \cos \phi \vec{e}_x + R \sin \phi \vec{e}_y = R\vec{e}_\rho \quad (2.41)$$

である。 $\vec{e}_\rho$ は円筒座標で z から遠ざかる距離である ρ が増加する方向を向いた単位ベクトルである。

$d\vec{x}'$ はこれを微分して、

$$d\vec{x}' = R d\phi (-\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y) = R d\phi \vec{e}_\phi \quad (2.42)$$

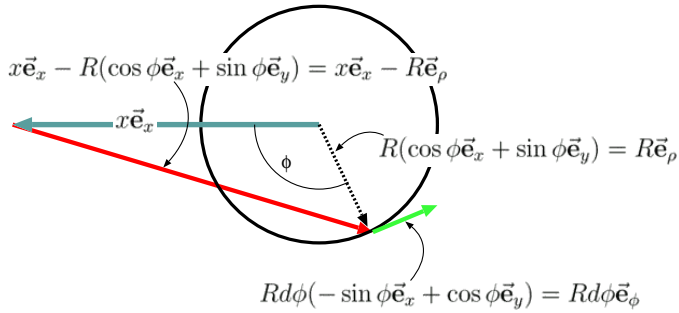
となる。 $\vec{e}_\phi$ は円筒座標の角度方向を向いた単位ベクトルである。



¹¹ 忘れやすいので念のため。円筒座標や極座標では、基底ベクトル $\vec{e}$ は場所によって違う方向を向く。よってベクトル計算をする時「その $\vec{e}$ はどの場所のものか」を確認しておくべき。直交座標なら不要。

¹² 「同じベクトルの外積は 0」と思って $d\vec{x}' \times \vec{x}' = 0$ とやっちゃダメ。図を見てもわかる通り、 $d\vec{x}'$ は $\vec{x}'$ とは違う方向を向く。字面にだまされないように。

¹³ 問題は軸対称なので、 y 方向に離れた場合を考えれば、状況全てを回転してやればよい。



一方、場所 $\vec{x}'$ にいる微少電流素片から磁場を計算したい場所 $\vec{x}$ へと向かうベクトルは

$$\vec{x} - \vec{x}' = z\vec{e}_z + x\vec{e}_x - R(\cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y) \quad (2.43)$$

となり、この式の自分自身の内積をとって、 $\vec{x}$ と $\vec{x}'$ のなす角が ϕ であることを使うと、

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx\cos\phi} \quad (2.44)$$

がわかる。この式は、 z 軸真上から見た図（左の図）で余弦定理を使って xy 平面内での距離を考えた後、 z 方向にも z だけ離れているということを考えれば図形で出すこともできる。

以上を組み合わせ、ビオ・サバールの法則を使って磁場を計算する式は

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{Rd\phi \vec{e}_\phi \times (z\vec{e}_z + x\vec{e}_x - R\vec{e}_\rho)}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx\cos\phi)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.45)$$

となる。ここで被積分関数の分子に現れている外積を計算しておく、

$$\vec{e}_\phi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho, \quad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_\rho = -\vec{e}_z \quad (2.46)$$

は定義にしたがい図を書いてみればわかる。 $\vec{e}_\phi \times \vec{e}_x$ は、 $\vec{e}_\phi = -\sin\phi\vec{e}_x + \cos\phi\vec{e}_y$ であって、 $\vec{e}_x \times \vec{e}_x = 0, \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$ を使えば、

$$\vec{e}_\phi \times \vec{e}_x = -\cos\phi\vec{e}_z \quad (2.47)$$

となる¹⁴。これで、

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{Rd\phi (z\vec{e}_\rho - x\cos\phi\vec{e}_z + R\vec{e}_z)}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx\cos\phi)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.48)$$

を計算すればよいことがわかった。

こうして出てきた式を吟味しておく。まず磁場の向きは ρ 方向と z 方向であり、 ϕ 方向はない。問題が軸対称であることを考えると、これでよさそうである。

答を見ると、 $R = x\cos\phi$ の時、磁場の z 成分は0になる。これは図を見ても納得できるはずである。この時、電流と $\vec{x} - \vec{x}'$ の xy 方向の成分が一直線になるのである。

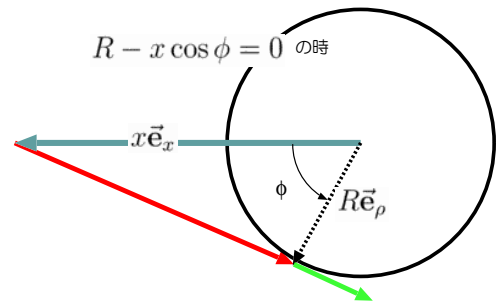
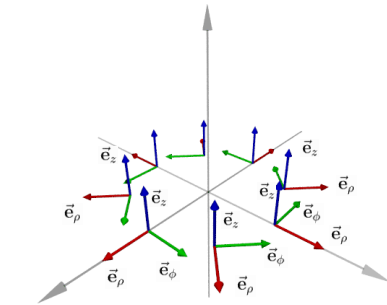
後は積分をすればいいのだが、実はこの積分はそう簡単ではない。そこで、以下では R が、 z, x に比べて小さいという近似のもとで計算することにする。つまり、この円電流の円の半径が、今測定しようとしている距離に比べて十分小さい場合を考えるわけである。コイルに近いところは考えないことにする。

R を小さいとして、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx\cos\phi)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx\cos\phi)^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{R=0} + R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx\cos\phi)^{\frac{3}{2}}} \right)\bigg|_{R=0} + \dots \\ &= \frac{1}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3xR\cos\phi}{(z^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} + \dots \end{aligned} \quad (2.49)$$

と展開して考えよう。

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int Rd\phi (z\vec{e}_\rho - x\cos\phi\vec{e}_z + R\vec{e}_z) \left(\frac{1}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3xR\cos\phi}{(z^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right) \quad (2.50)$$



¹⁴もちろんこの計算を、図から求めることもできる。

となるが、まず R の 1 次の項を考える。

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int R d\phi (z\vec{e}_\rho - x \cos \phi \vec{e}_z) \frac{1}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.51)$$

今、 ϕ で積分するのだが、 ϕ が変化すると変化する部分は $\vec{e}_\rho$ と $\cos \phi$ しかない。一周（たとえば 0 から 2π ）積分するということを考えると $\int d\phi \vec{e}_\rho$ も $\int d\phi \cos \phi$ も 0 である。よって R の 1 次の項は積分結果に効かない。

では次に R^2 の項を計算する。

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int R d\phi R \vec{e}_z \frac{1}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int R d\phi (z\vec{e}_\rho - x \cos \phi \vec{e}_z) \left(\frac{3xR \cos \phi}{(z^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I R^2 \vec{e}_z}{4\pi (z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \int d\phi + \frac{3\mu_0 I x R^2}{4\pi (z^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \left(z \int d\phi \cos \phi \vec{e}_\rho - x \vec{e}_z \int d\phi \cos^2 \phi \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

となる（2行目では、積分と関係ない量をどんどん積分の外に出した）。各々の積分は、 $\int d\phi = 2\pi$, $\int d\phi \cos \phi \vec{e}_\phi = \pi \vec{e}_x$, $\int d\phi \cos^2 \phi = \pi$ と実行できる¹⁵ので、答は

$$\frac{\mu_0 I R^2 \vec{e}_z}{2 (z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\mu_0 I x R^2}{4 (z^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} (z \vec{e}_x - x \vec{e}_z) = \frac{\mu_0 I R^2 \vec{e}_z}{4 (z^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} (3xz \vec{e}_x + (2z^2 - x^2) \vec{e}_z) \quad (2.53)$$

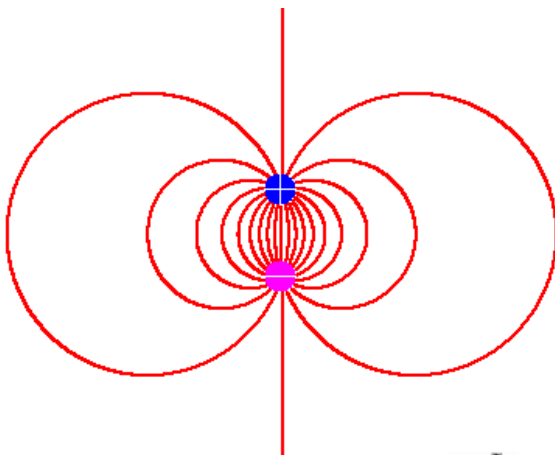
と求めることができる。じゅうぶん遠方での円電流による磁束密度の式である。

ここで、 z 軸方向を向いた電気双極子 p のつくる電場が

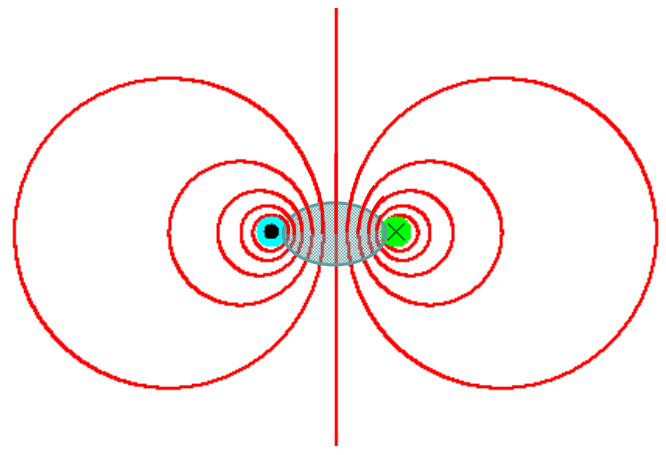
$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(3(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \vec{e}_z \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &\rightarrow \frac{p}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} (3xz \vec{e}_x + (2z^2 - x^2) \vec{e}_z) \end{aligned} \quad (2.54)$$

だったことを思い出そう。2行めでは、上の計算で使った位置座標に合わせて $y = 0$ とした。円電流の式 (2.53) と電気双極子の式 (2.54) を見比べると、電気双極子モーメント p と $I\pi R^2$ という量に対応関係にあることがわかる（比例定数は除いて比較した）。

静電気の場合、正電荷 q と負電荷 $-q$ が $\vec{\ell}$ だけ離れている時そこには $q\vec{\ell}$ の電気双極子モーメントがあると言う。 $q\vec{\ell}$ を「モーメント」と呼ぶのは、「電場 $\vec{E}$ をかけると、 $\vec{E} \times (q\vec{\ell})$ の力のモーメントが発生する」ということを考えると理解しやすい。



磁極 $+m$ と $-m$ が距離 L 離れていると、 $\frac{mL}{\mu_0}$ の磁気モーメントがある。



電流 I が面積 S を回るように流れていると IS の磁気モーメントがある。

$$IS = \frac{mL}{\mu_0} \quad \text{ならば、遠方で見ると、この二つは区別がつかない。}$$

¹⁵ 2 番目の積分は、まず $\vec{e}_\rho = \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y$ と分けておいてそれぞれ積分する。 $\int d\phi \cos \phi \sin \phi = 0$ である。

同様に磁気についても双極子モーメントを考える。磁極というものが存在するとすれば、正磁極 m と負磁極 $-m$ が $\vec{\ell}$ 離れていれば $\frac{1}{\mu_0} m \vec{\ell}$ の磁気双極子モーメントである、と考えればよい。ここで $\frac{1}{\mu_0}$ がつく理由は電気双極子モーメントが電場 $\vec{E}$ をかけた時にどのようなモーメントが発生するかで定義されているのに対し、磁気双極子モーメントは $\vec{B}$ ($\vec{H}$ ではなく) に対して定義されているからである。

実際には磁極は存在せず、磁気双極子モーメントを作るのは電流であるが、その電流の大きさと磁気双極子モーメントとの関係は、

$$\vec{p} = I \vec{S} \quad (2.55)$$

となる。 $\vec{S}$ は電流が囲んでいる面積を表すベクトルで、向きは電流に関して右ネジで面の法線方向である。

これを正方形コイルの場合で確認しておこう。右の図のように、正方形コイルに磁場をかけた場合と、磁気双極子に磁場をかけた場合を比較する。どちらも回転する力のモーメントが起こる（電流は磁場と垂直になりたがるし、磁気双極子は磁場と平行になりたがる）。

$$IL^2 = \frac{m\ell}{\mu_0} \quad (2.56)$$

という関係が成立していれば、二

つのモーメントは全く同じになる。遠方から見ると、そこに小さな周回電流があるのか、磁気双極子があるのかわからなくなるのである。

前に「磁極等という物は存在しない。磁場を作るのは電流である」ということを述べた時、少なからず驚いた人もいたかもしれない。しかしこうして円電流の作る磁場と磁石の作る磁場を見比べてみると、式の上でも（遠くからでは）全く区別のつかないものになってしまった。古い時代の物理学者が磁場の源が何であるのかわからなかったもの仕方ないことかもしれない。

2.2.3 ソレノイドコイル

ソレノイドコイルについてはアンペールの法則でも求めたが、ここでビオ・サバールの法則を使っても出せることを確認しておく。

まず、円電流を二つ重ねたものを考えよう。円電流一つによる磁場はすでに計算したから、これを足せばよい。たとえば $z=0$ 面と $z=\ell$ 面に二つの円電流があるとすれば、それは円電流の作る磁場の式に、その式で $z \rightarrow z-\ell$ と置き直したもの（こうすれば z 方向に ℓ だけ平行移動したことになる）を足せばよい。つまり、

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{R d\phi (z \vec{e}_\rho - x \cos \phi \vec{e}_z + R \vec{e}_z)}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{R d\phi ((z-\ell) \vec{e}_\rho - x \cos \phi \vec{e}_z + R \vec{e}_z)}{((z-\ell)^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.57)$$

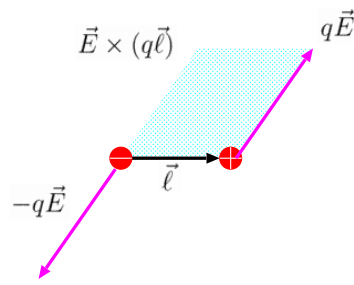
となる。

円電流が二つでなく、もっとたくさんならば、 z を少しずつ平行移動させながらこの式をどんどん足していけばいいだろう。

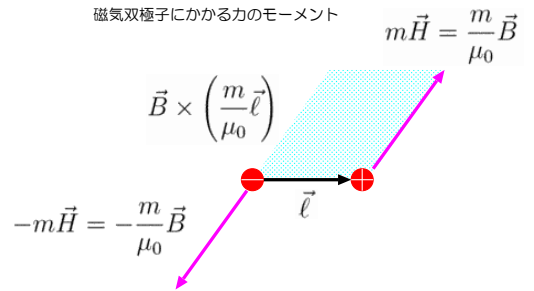
$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{R d\phi ((z-n\ell) \vec{e}_\rho - x \cos \phi \vec{e}_z + R \vec{e}_z)}{((z-n\ell)^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.58)$$

のように、円電流の影響をどんどん足していけばソレノイドコイルの場合の磁場が出せるだろう。

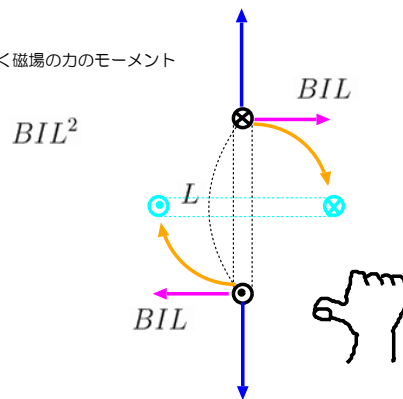
電気双極子にかかる力のモーメント



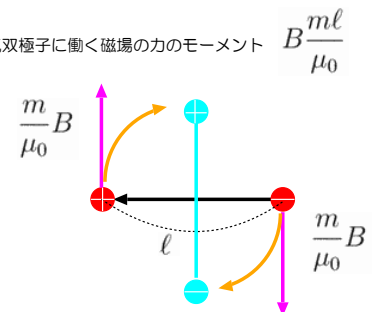
磁気双極子にかかる力のモーメント



電流に働く磁場の力のモーメント



磁気双極子に働く磁場の力のモーメント $B \frac{m\ell}{\mu_0}$



電流と磁気モーメントの関係も、右ネジの法則

しかし、無限和 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ を計算するのは少々面倒である。そこで、 ℓ が非常に小さいと考えて、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ell \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dz \quad (2.59)$$

と考えることにする（ここで和記号の後に ℓ があるのは、それがあってちょうど、無限和の極限が積分と一致するからである。図を参照）。

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int \frac{R d\phi (z \vec{e}_\rho - x \cos \phi \vec{e}_z + R \vec{e}_z)}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.60)$$

という計算をすればよいわけである。

ここで、 z に関して奇関数ならば答は z 積分の結果は 0 になる。分母は偶関数だから、分子にある $z \vec{e}_\rho$ は積分すると消える。磁場は z 成分しかないことになり、

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R (-x \cos \phi + R) \vec{e}_z}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.61)$$

例によって、 $z = \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi} \tan \theta$ と変数変換して、 $dz = \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ を使うと、

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R (-x \cos \phi + R) \vec{e}_z}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi} \frac{1}{\cos^2 \theta} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R (-x \cos \phi + R) \vec{e}_z}{\left((R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi) \underbrace{(1 + \tan^2 \theta)}_{=\frac{1}{\cos^2 \theta}} \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R (-x \cos \phi + R) \vec{e}_z}{(R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)} \end{aligned} \quad (2.62)$$

のように計算が進み、 θ に関する積分の答は $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta = 2$ である。

ϕ に関する積分は少々面倒に思えるが、この式の背後にある図形的意味を考えると、あっという間にできる。実はこの $d\phi \frac{R (-x \cos \phi + R) \vec{e}_z}{(R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi)}$ という量は「半径 R の円運動している車を、円の中心から x 離れたところで人がじっと注視している。車が $d\phi$ だけ回る間に、この人はどれだけの角度目線を動かさなくてはいけないうか」という問題の答なのである。

なぜそうなるのかは純粋に図形の問題なので、右の図を見て考えるとわかる。AB は車の移動で、長さ $Rd\phi$ である。この時 P 点にいる人の目線の動く角度は、 $\frac{AC}{AP}$ である。AP = $\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi}$ であり、AD = $x \cos \phi - R$ である。後は、三角形 ABC と三角形 APD が相似であることを使うと、

$$AC = AB \times \frac{x \cos \phi - R}{\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi}} \quad (2.63)$$

となるので、

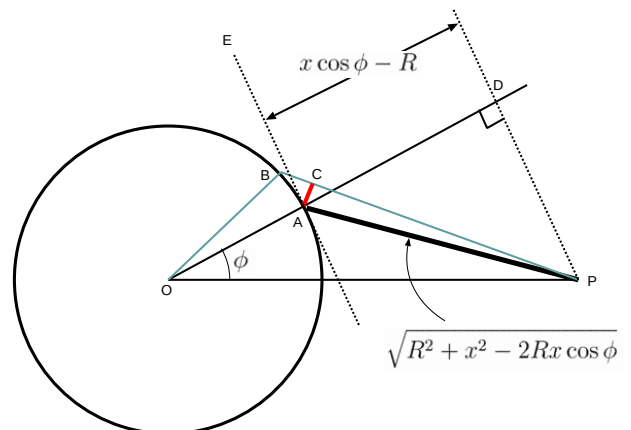
$$\frac{AC}{AP} = Rd\phi \frac{x \cos \phi - R}{R^2 + x^2 - 2Rx \cos \phi} \quad (2.64)$$

となる。できる。なお、以上の計算においては「弧」であって曲線であるところの AB は（角度 $d\phi$ が微小なので）直線と考えた。

こう考えると、 $x > R$ であれば、0 から 2π まで積分すれば 0 になるのはすぐにわかる。なぜなら、外から見れば車はあっちいたりこっちいたりを繰り返しているの、一周分で目の動く角度を積分すれば 0 となる。

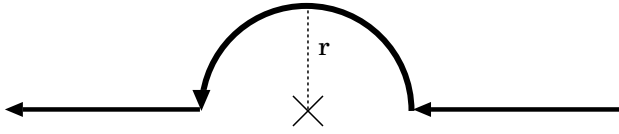
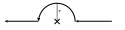
一方、 $x < R$ であれば、車が一周する間にこの人の目線も一周するから、積分結果は 2π である。

結局、内側では $\frac{\mu_0 n I}{4\pi} \times 2 \times 2\pi = \mu_0 n I$ という答が出る。これはアンペールの法則を使って出した式と全く同じである（アンペールの法則を使った方が簡単であることは言うまでもない）。



2.3 章末演習問題

★【演習問題 2-1】右図のように、直線と半円を組み合わせた導線に電流 I が流れている。半円の中心部分での磁束密度を求めよ。



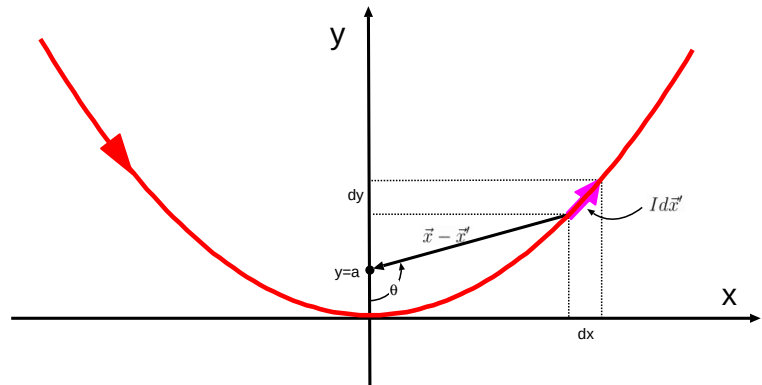
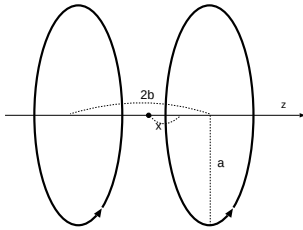
★【演習問題 2-2】一辺 $2a$ の正方形の形をしたコイルに電流 I が流れている。正方形の中心での磁場を求めよ。

★【演習問題 2-3】下の図のように、半径 a の同じ円形コイルを中心軸を共通にして距離 $2b$ だけ離して両者に同じ電流を流した。この時、中心軸上の磁束密度を求めよ。2.2.1 節での結果を使ってよい。

また、二つの円の中心の midpoint 付近での磁場がほぼ一様となるのは a, b にどのような関係がある時か計算せよ。ただしここで「ほぼ一様」というのは、中点からのずれを x とした時、 x^2 までの近似 (x^3 以上は無視する) において一定という意味である。

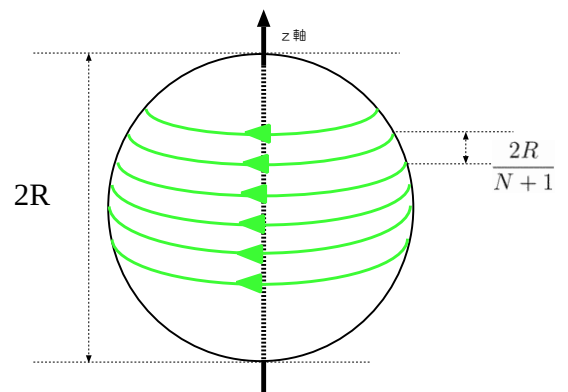
★【演習問題 2-4】 $y = \frac{1}{4a}x^2$ で表現される放物線の形の導線に電流 I を流した。放物線の焦点 ($x = 0, y = a$) にできる磁場の磁束密度を求めよ。

ヒント：積分の方法はいろいろあるが、焦点を中心として下図のような極座標を取るのがよい。この時、焦点から角度 θ の方向にある電流までの距離は $r = \frac{2a}{1 + \cos \theta}$ である。電流素片との外積は、 r と $d\theta$ で表現することができる。



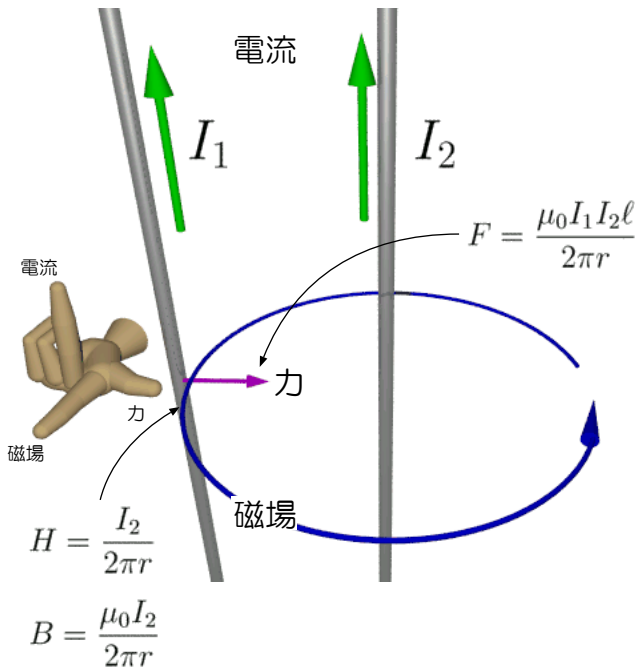
★【演習問題 2-5】

図のように球面上の、地球でいけば緯線に対応する形で合計 N 本の導線を巻き付け、各々に電流を流した。それぞれの導線は z 座標で見て $\frac{2R}{N+1}$ ずつ離れている。この時、 z 軸上での磁束密度を求めよ。ただし、 N は非常に大きいとして、電流の和を積分に置き換えてよいとする。



第3章 静磁場の法則その3—電流・動く電荷に働く力とポテンシャル

3.1 無限に長い直線電流間の力と、アンペアの定義



無限に長い直線電流が2本ある時、引力を生じることは既に述べた。その大きさを計算してみよう。左の図のように電流 I_1, I_2 が距離 r だけ離れて平行に流れている状況を考えよう。

この時、電流 I_1 のいる場所に電流 I_2 が作る磁場の強さは $\frac{I_2}{2\pi r}$ であり、磁束密度は $\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$ である。今は電流と磁場は垂直であるから、左の電線のうち長さ ℓ の部分に働く力は、(電流) $\times$ (磁束密度) $\times$ (長さ) で計算され、

$$F = I_1 \times \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \times \ell = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi r} \quad (3.1)$$

となる。実は、SI 単位系では $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ と決められているので、

$$F = 2 \times 10^{-7} \times \frac{I_1 I_2 \ell}{r} \quad (3.2)$$

という式になっている。実はこうなるようにアンペア [A] の単位を決めたのである。2 がついている理由は「2本の電線によって作られた力」であることを意味している。また、 10^{-7} がついているのは、決められた当時の標準的な電流の大きさに合わせたためである¹。

3.2 電流素片の間に働く力

この節では、電流素片と電流素片の間に働く力を計算し、それが電荷と電荷に働く力と類似点を持つことを確認しよう。

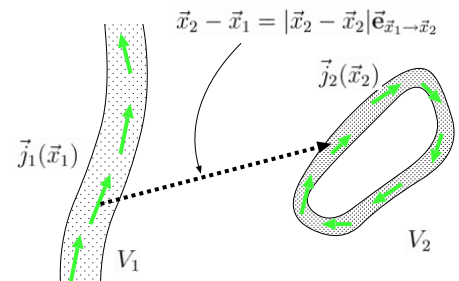
二つの電流があり、一方は電流密度 $\vec{j}_1$ で領域 V_1 を流れているとする。もう片方は電流密度 $\vec{j}_2$ で領域 V_2 を流れているとする。この二つの電流の間に働く力を考えるために、まず $\vec{j}_1$ によって $\vec{x}_2$ に作られる磁場を計算すると

$$\vec{B}_1(\vec{x}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3 \vec{x}_1 \frac{\vec{j}_1(\vec{x}_1) \times (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3 \vec{x}_1 \frac{\vec{j}_1(\vec{x}_1) \times \vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \quad (3.3)$$

であり、この磁場によって場所 $\vec{x}_2$ にある電流密度 $\vec{j}_2(\vec{x}_2)$ に及ぼされる力は、

$$\begin{aligned} \vec{F}_{j_1 \rightarrow j_2} &= \int_{V_2} d^3 \vec{x}_2 \vec{j}_2(\vec{x}_2) \times \vec{B}_1(\vec{x}_2) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3 \vec{x}_1 \int_{V_2} d^3 \vec{x}_2 \frac{\vec{j}_2(\vec{x}_2) \times (\vec{j}_1(\vec{x}_1) \times \vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2})}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

と書くことができる。



¹ どうせならこの係数を 1 にした方がすっきりするような気もするが、昔から使われて、定着してしまっている単位だから仕方がない。こうしないと、1A の電流は現在の約 3000 倍になってしまう。なお、この式については、距離 r を 1cm にして、力 F を cgs 単位系での力の単位であるダイン (dyne) で測ることにすると、ちょうど比例定数が 2 になる。

ここでベクトル解析の公式 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ から、

$$\underbrace{\vec{j}_2(\vec{x}_2)}_{\vec{A}} \times \underbrace{(\vec{j}_1(\vec{x}_1) \times \vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2})}_{\vec{B} \times \vec{C}} = \underbrace{\vec{j}_1(\vec{x}_1)}_{\vec{B}} \underbrace{(\vec{j}_2(\vec{x}_2) \cdot \vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2})}_{\vec{C}} - \underbrace{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}_{\vec{C}} \underbrace{(\vec{j}_1(\vec{x}_1) \cdot \vec{j}_2(\vec{x}_2))}_{\vec{B} \cdot \vec{A}} \quad (3.5)$$

となる。

第2項は二つの微小電流をつなぐベクトルの向きを向いており、「電流同志が押し合う（引き合う）」という力に対応する。第1項は電流 $\vec{j}_1(\vec{x}_1)d^3\vec{x}_1$ の方向を向いている力で、作用・反作用の法則を満たさない（1と2の立場を入れ替えると、 $\vec{j}_1(\vec{x}_1)(\vec{j}_2(\vec{x}_2)\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2})$ は $\vec{j}_2(\vec{x}_2)(\vec{j}_1(\vec{x}_1)\vec{e}_{\vec{x}_2 \rightarrow \vec{x}_1})$ となる）。

ここで我々は「電流素片・電流素片の間の力」と「電荷・電荷の間の力」を比較しようとしているが、電荷と電荷の間の力はもちろん、大きさ同じで逆向きで、一直線上を向く。比較のためには、同じ形に揃えたい。

そこで、まず作用・反作用の法則に反する部分である第1項について考察しよう。第1項の積分をちゃんと書くと

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \vec{j}_1(\vec{x}_1) \frac{\vec{j}_2(\vec{x}_2) \cdot \vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \vec{j}_1(\vec{x}_1) \vec{j}_2(\vec{x}_2) \cdot \vec{\nabla}_2 \left(\frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \right) \quad (3.6)$$

となる。ここで

$$\frac{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} = -\vec{\nabla}_2 \left(\frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \right) \quad (3.7)$$

という式²を使った。 $\vec{\nabla}_2$ とは、 $\vec{x}_2$ に関する微分で作られたナブラ記号である。

ここで $\vec{\nabla}_2$ を部分積分でひっくりかえす。 $\vec{\nabla}_2$ というベクトル微分演算子を部分積分でひっくりかえすことに不安を感じる人は、各成分ごとに考えてみるとよい。たとえば x 成分だけを考えれば、

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \vec{j}_1(\vec{x}_1) j_2(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \vec{j}_1(\vec{x}_1) \frac{\partial j_2(x_2)}{\partial x_2} \left(\frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \right) \quad (3.8)$$

となる。 y 成分、 z 成分も含めて考えれば、第1項は

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \vec{j}_1(\vec{x}_1) \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_2(\vec{x}_2) \left(\frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \right) \quad (3.9)$$

となる。もちろん、 $\vec{\nabla}$ の扱いに慣れている人はいっしょにこうやってよい。ここで、部分積分の表面項は考えなかった。領域 V_2 が、その端っこにおいて電流密度 $\vec{j}_2$ が0になるか、あるいは無限に遠くて $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1| \rightarrow \infty$ と考えていいという場合を考えているからである。

電流という流れもまた湧き出しなしの流れであることを思えば³、 $\text{div } \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \text{div } \vec{j} = 0$ なのでこの項は0である。

つまり、ビオ・サバルの法則の中には「積分したらどうせ消えることになる成分」が含まれていたことになる。前にも書いたように電荷と違って電流は「微小部分を切り出す」ということは（頭の中ではできても実際には）できないので、微小部分の式の作り方は一通りではないのでない。しかし、積分した結果、すなわち実際に観測される磁場はどのような微小部分の切り出し方をしたかに関係なく、同じになる。

残るのは第2項で、結果は

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \vec{j}_1(\vec{x}_1) \cdot \vec{j}_2(\vec{x}_2) \frac{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \quad (3.10)$$

となる。この式は、電荷間の力の式と強い類似性を持っている。

²この式は、点電荷の電場 $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ と電位 $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ の関係 $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ を思い出せば、おなじみの式である。

³ $\text{div } \vec{j} \neq 0$ の時は、その場所の電荷密度が増加したり減少したりする。そうすると静電場・静磁場ではなくなってしまう。

電荷密度 ρ_1 の電荷が領域 V_1 にいて電荷密度 ρ_2 の電荷が領域 V_2 にいる場合の電荷間に働く力は、

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \rho_1(\vec{x}_1) \rho_2(\vec{x}_2) \frac{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \quad (3.11)$$

である。

$$\frac{1}{\epsilon_0} \rho_1(\vec{x}_1) \rho_2(\vec{x}_2) \rightarrow -\mu_0 \vec{j}_1(\vec{x}_1) \cdot \vec{j}_2(\vec{x}_2) \quad (3.12)$$

という置き換えで同じ式である。二つの式が逆符号なのは、「同符号の電荷は反発するが、同方向の電流は引き合う」という状況の違いを示している。

例によって電流がある曲線上にしか存在しない場合は、 $\int_V \vec{j} d^3\vec{x} \rightarrow \int_L I d\vec{x}$ のように、体積積分を線積分に置き換えることができる。こうすると電流間に働く力は

$$-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 \frac{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \quad (3.13)$$

となる。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでください。

ところで電流密度は、電荷密度にその場所の電荷の持つ速度をかけることで得られる。つまり、 $\vec{j} = \rho \vec{v}$ と考えられる。それを考えにいて、電荷の力と電流の力を合わせて書くと、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \rho_1(\vec{x}_1) \rho_2(\vec{x}_2) \frac{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \\ & - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 (\rho_1(\vec{x}_1) \vec{v}_1(\vec{x}_1)) \cdot (\rho_2(\vec{x}_2) \vec{v}_2(\vec{x}_2)) \frac{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \\ & = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} d^3\vec{x}_1 \int_{V_2} d^3\vec{x}_2 \rho_1(\vec{x}_1) \rho_2(\vec{x}_2) (1 - \epsilon_0 \mu_0 \vec{v}_1(\vec{x}_1) \cdot \vec{v}_2(\vec{x}_2)) \frac{\vec{e}_{\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}_2}}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

とまとめられることになる。こうしてみると、 $\epsilon_0 \mu_0$ は速度の自乗分の 1 の次元を持つ量である。実際、後で示すように、 $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ には、ある重要な物理現象の速度という意味がある。

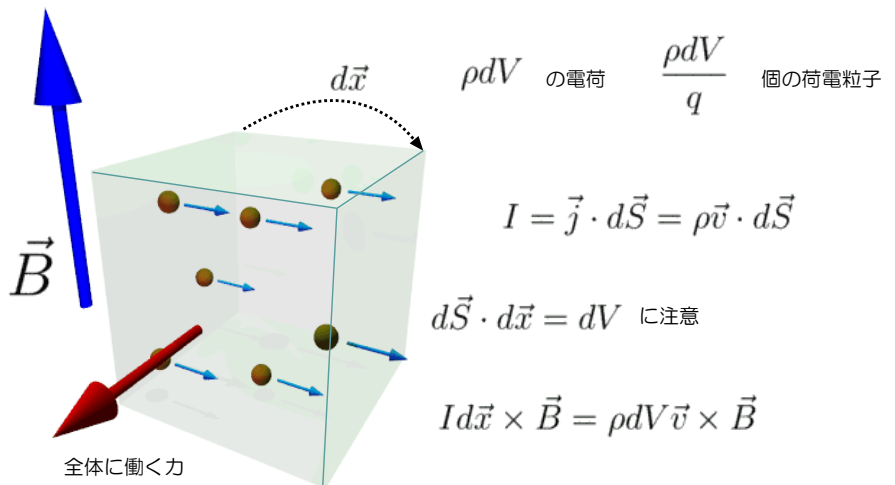
【補足終わり】

3.3 導線の受ける力と動く電荷の受ける力

電流素片 $I d\vec{x}$ が磁束密度 $\vec{B}$ の磁場内において、

$$d\vec{F} = I d\vec{x} \times \vec{B} \quad (3.15)$$

の力を受ける、ということは既に述べた。ところで電流とは結局は荷電粒子(たいていの場合電子)の運動である。そこでこの力を荷電粒子一個一個に働く力の和だと考えることにしよう。荷電粒子一個に働く力はどのように表されるであろうか。



3.3.1 ローレンツ力

今、ある微小体積 dV の中に電荷密度 ρ で電荷が存在していて、それらが速度 $\vec{v}$ で運動しているとしよう⁴。微小体積 dV 内には ρdV の電気量が存在している

⁴考察を簡単にするために全ての荷電粒子が同じ速度で運動しているところでは考えるが、実際には一個一個の荷電粒子はさまざまな速度を持ち、その平均が $\vec{v}$ だと考えるべきであろう。

のだから、今考えている荷電粒子の一個の電荷を q とすれば、 $\frac{\rho dV}{q}$ 個の荷電粒子がこの中にいる。電流が流れている方向の微小な長さを示すベクトルを $d\vec{x}$ とし、電流が流れた部分の微小面積を示すベクトルを $d\vec{S}$ と書く⁵と、微小体積 dV は $d\vec{S} \cdot d\vec{x}$ となる（角柱を底面積×高さで計算している）。

ここで $I d\vec{x}$ の部分は

$$I d\vec{x} = (\vec{j} \cdot d\vec{S}) d\vec{x} = \vec{j} (d\vec{S} \cdot d\vec{x}) = \rho \vec{v} dV \quad (3.16)$$

と電流密度を通じて荷電粒子の速度を使った式に書き換えることができる。この計算の中で、 $\vec{j}$ と $d\vec{x}$ が同じ方向を向いているので、 $(\vec{j} \cdot d\vec{S}) d\vec{x} = \vec{j} (d\vec{S} \cdot d\vec{x})$ となることを使った⁶。最後では $\vec{j} = \rho \vec{v}$ を代入した。

よって力は $\vec{F} = \rho dV \vec{v} \times \vec{B}$ となるので、これを荷電粒子の個数で割れば一個あたりの力が計算できる。すなわち、

$$\frac{\vec{F}}{\frac{\rho dV}{q}} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.17)$$

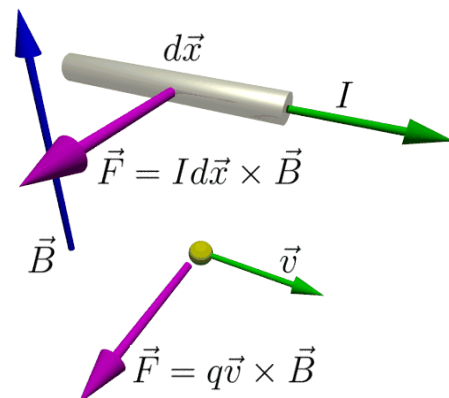
である。特に、（外積なので）磁場と運動方向が同じ方向を向くと、力は0になる。

この力 $q \vec{v} \times \vec{B}$ は磁場中を運動する電荷の受ける力を表す式である。電場中の電荷が受ける力 $q \vec{E}$ と併せて、

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.18)$$

を「ローレンツ力」と呼ぶ。これはローレンツの論文の中でこの式が導かれて有名になったためだが、実はそれ以前から知られている力である⁷。

磁場から与えられる力 $q \vec{v} \times \vec{B}$ は磁場とも運動方向とも垂直である。運動方向と垂直だということは重要で、これによって、「**磁場は荷電粒子に対して仕事をしない**」⁸ということが結論できる（運動方向と垂直な力は仕事をしないので）。



3.3.2 ローレンツ力を受けた荷電粒子の運動

荷電粒子が一様な外部磁場によるローレンツ力だけを受けて運動するとき、どんな軌道を描くかを考えよう。まず働く力は常に磁場に垂直であるから、この粒子の磁場に平行な方向の運動にはまったく磁場の影響は表れない。したがって（重力などのそれ以外の力が働かない限り）、磁場に平行な方向には荷電粒子は等速運動する。

では磁場に垂直な方向はどうかというと、常に運動方向に垂直な力を受け続ける。上で述べたように磁場は仕事をしないので、粒子の運動エネルギーは増えることも減ることもないまま、運動方向を変えつづける。このような運動は等速円運動である。半径 r で等速円運動するとして、その運動方程式を書けば、

$$m \frac{v^2}{r} = qvB \quad (3.19)$$

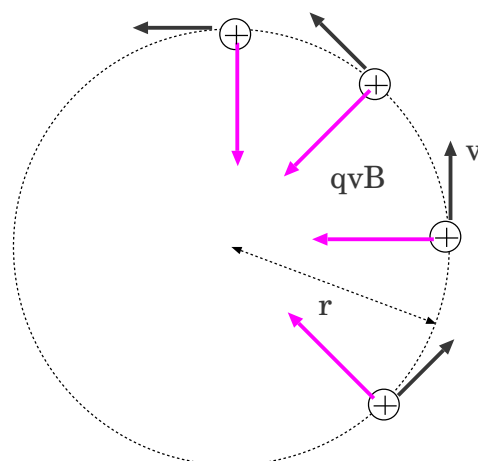
である。これから、

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad (3.20)$$

という式を作ることができる。すなわち角速度 ω は（粒子がどんな大きさの円を描くかとは関係なく）一定値をとる。またこの式は

$$mv = qBr \quad (3.21)$$

とも書ける。すなわち、円運動の半径を見ればその粒子の運動量を決定できるわけである⁹。



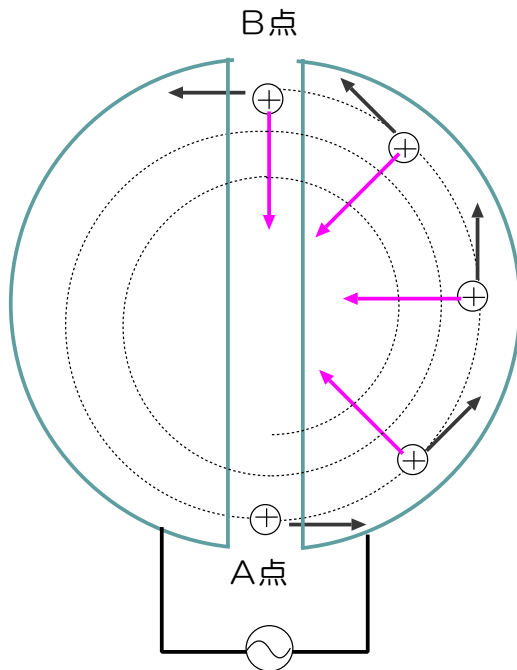
⁵面積ベクトルは、その面積に対する法線の方角を向く。

⁶ $\vec{j}$ と $d\vec{S}$ の角度を θ とすれば、 $(\vec{j} \cdot d\vec{S}) d\vec{x}$ の大きさも $\vec{j} (d\vec{S} \cdot d\vec{x})$ の大きさも、 $|\vec{j}| |d\vec{S}| |d\vec{x}| \cos \theta$ となる。

⁷磁場による力 $q \vec{v} \times \vec{B}$ の部分だけを「ローレンツ力」と呼ぶこともあるが、本来は磁場と電場による力両方を合わせたものを指す言葉である。

⁸当然だが、「仕事をしない」と「力を及ぼさない」は同じことではないことに注意。

⁹素粒子実験では荷電粒子を磁場中を運動させて描いた円から運動量を測る。そして運動量やエネルギーから質量を決定し、知られていないものが出てきたら「新粒子発見!」となるわけである。



この時、この円運動の周期を計算すると、

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (3.22)$$

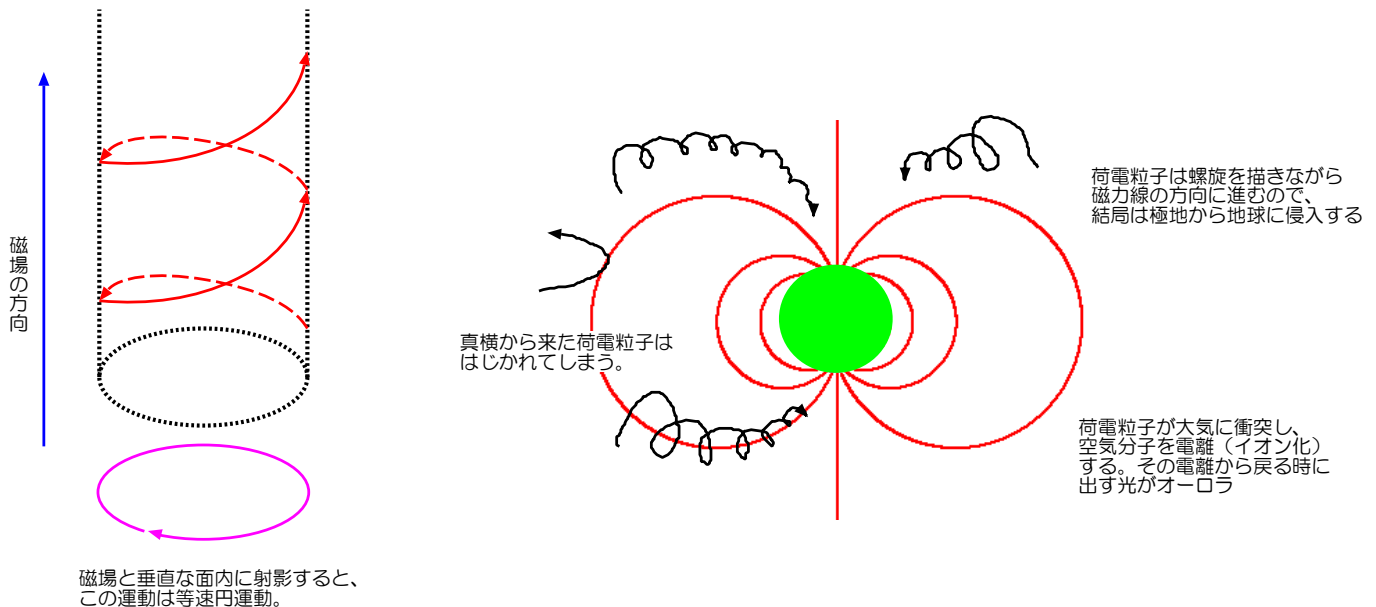
となり、半径 r によらず一定となる。これを「**サイクロトロン周期**」と呼び、その逆数を「**サイクロトロン振動数**」と呼ぶ¹⁰。さらに、この運動は「**サイクロトロン運動**」と呼ばれる。サイクロトロンとは、磁場中で粒子を回転させつつ加速していく実験装置である。円運動している粒子に、サイクロトロン振動数と同じ周期で振動する電場をかける。例えば図のように電極を配置して、荷電粒子がA点に来た時は左の電極の電位が高くなり、B点に来た時には右の電極の電位が高くなるようにしておくのである。この電場によって荷電粒子はどんどん加速されていくことになる。加速されればされるほど円運動の半径が大きくなっていき、最後には装置から飛び出してくる。

こうして、磁場中の荷電粒子は円運動もしくは、磁場と垂直な面内を円運動しつつ、磁場の方向に並進していくような螺旋運動をすることになる。螺旋運動の「円」が見えないほどに遠くから見ると、荷電粒子は磁場の方向にしか動けないように見える。つまり、磁場を使って荷電粒子

の運動を制御することができる。

これは核融合におけるプラズマの閉じこめなどにも使われている。プラズマの荷電粒子を磁場と平行な方向にしか動けないようにすることで外へ逃げないようにするのである。

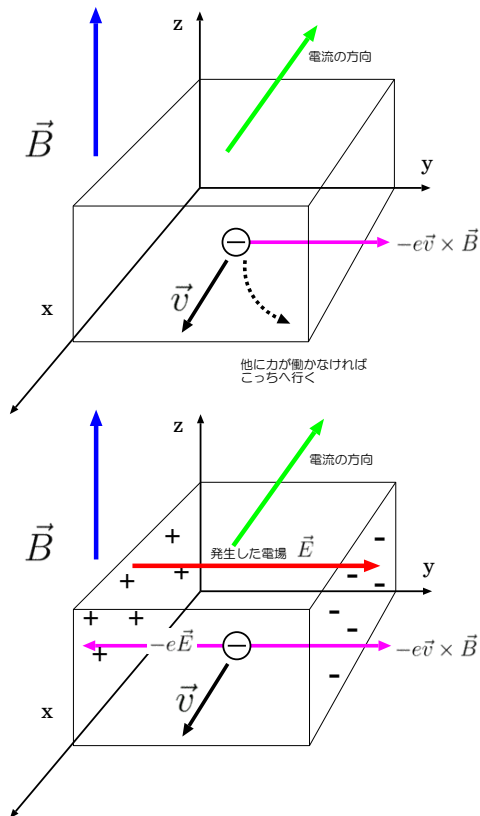
この磁場の面白い性質は、自然現象でも現れる。オーロラが北極と南極でしか見ることができないのはこの磁場の性質のためである。太陽から荷電粒子が地球に降り注いでいるのだが、地球にやってきた荷電粒子は地球磁場によって方向を変えられるため、(大きい目で見ると) 磁場に沿った方向への動きしかできなくなる。ゆえに、地球磁場が上下方向を向く極地でのみ地球にたどり着くことができるのである¹¹。極地上空で大気圏に進入し空気で減速された時に、荷電粒子がそのエネルギーを放出して発する光がオーロラである。



¹⁰なお、サイクロトロン振動数が一定になるのは、粒子の速度が光速に比べて遅い時、つまり相対論的効果が現れない時だけである。

¹¹ただし、磁束密度が大きくなると磁場方向に運動していた粒子が跳ね返されるという現象も起こる。章末演習問題 3-3 を参照。

3.3.3 ホール効果



磁場中の導線内を流れる電子に働く力が導線にどのような結果を及ぼすかを考えよう。簡単のため、電流の流れる方向と磁場を垂直にし、電流の方向を x 軸と逆向き（導体内の電子は x 軸の向きに流れている）、磁場の方向を z 軸にとろう。導線を流れる電子の速度を v とすれば、 evB の力が y 軸方向に働く。これによって電子は y 軸正の側に偏って存在するようになり、この部分がマイナスに帯電する。逆に y 軸負の側はプラスに帯電する。もともと導線内は電氣的に中性だから、マイナスに帯電するところ（つまり電子が過剰となるところ）があれば当然、プラスに帯電するところ（電子が不足するところ）ができるわけである。こうして導線には y 軸方向に電位差 V が生じる。電位差によって、導線内に y 軸の方向を向いた電場 $\frac{V}{d}$ ができる。

この電場は電子を y 軸負の方向に引っ張るので、この二つが釣りあえば電子は本来流そうとした方向すなわち x 軸方向に流れることができる（二つの力が釣りあわなければ電子は曲がってしまう）。よって、

$$evB = e \frac{V}{d} \quad \text{ゆえに、} V = vBd \quad (3.23)$$

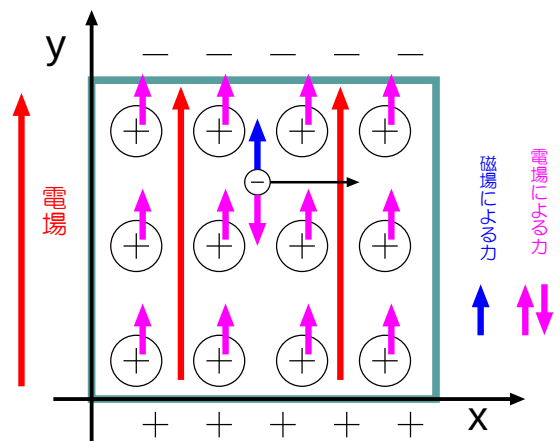
となり、 vBd で表現される電位差がこの導体に発生する。これを「ホール電圧」または「ホール起電力」と呼ぶ¹²。

ホール電圧の面白い（そして有用な）ところは、これがキャリア（導体内で電流を運ぶもののこと。上では電子だとして説明した）の電荷と速度によって変わることである。たとえば導体内を走っているのが電子ではなく正に帯電した粒子だとしよう。この場合この粒子の運動方向は $-x$ 方向になる。つまりこの電圧を測定することで、「導線の中を流れているのは正電荷

なのか、負電荷なのか」を決定することができる¹³。また、これからその電荷の流れる速度 v もわかる。 v と電流 I には、 $I = envS$ という関係があった（ S は導線の断面積、 n は荷電粒子の単位体積当たりの個数）。この関係から、 n すなわち、「この導体内にはどの程度の密度のキャリアが存在するか」を推定することもできる。というわけでホール効果は、導体や半導体の性質を研究するための重要な情報を与えてくれるのである。

電子はこの電場による力と磁場による力の両方を受け、結果として直進する。ところでこの節の最初では、磁場が導線に及ぼす力が荷電粒子一個あたりどれだけかを考えて $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ という式を作った。しかし今考えたように電子に働く力は電場によるものと磁場によるものが相殺している。では「磁場が導線に力を及ぼす」という時、導線が受けている力とは何なのだろうか???

電子だけを考えているとこの問いに答えることはできない。実際には金属であればプラスに帯電した金属イオンの中を電子が走っている。そして、金属イオンの方は運動していないから、磁場からは力を受けず、金属内にだけある電場によってのみ力を受ける。これが「磁場が導線に及ぼす力」の正体なのである。「電子が磁場から受ける力」と「電子が電場から受ける力」は大きさが同じで向きが反対である（つりあいの式）。また「電子が電場から受ける力」と「金属イオンが電場から受ける力」も大きさが同じで向きが反対である（電子の総電荷と金属イオンの総電荷は、同じ大きさで逆符号の筈だから）。よって「電子が磁場から受ける力」と「金属イオンが電場から受ける力」は向きも大きさも等しい。このようにして、ミクロな「電子が磁場から受けた力」がマクロな「導線が磁場から受けた力」へと伝達されるわけである。

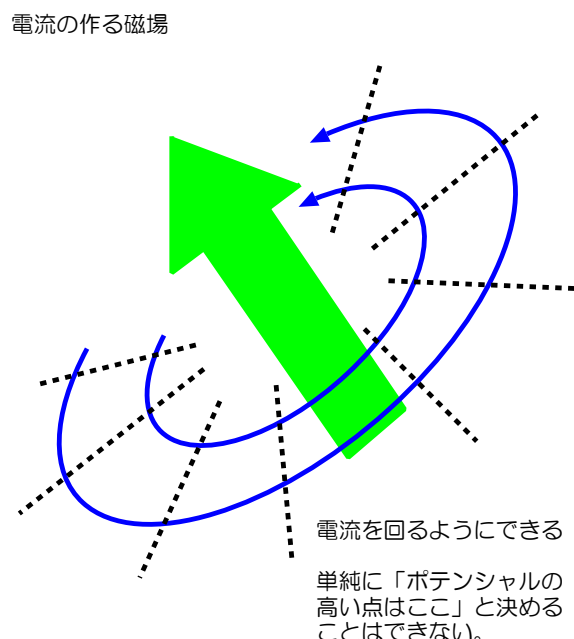
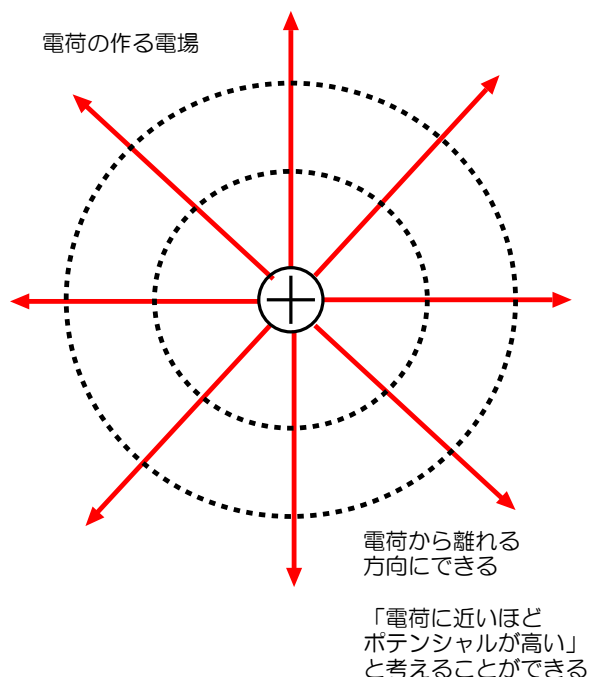


¹² ホールは人名。アメリカの物理学者で、1879年にこの効果を発見した。綴りは Hall であり、穴 (hole) とは関係ない。

¹³ 「キャリアって電子だから負電荷でしょ」と思いこんではいけない。半導体内にできる「正孔」は正電荷だし、陽イオンが移動してできる電流だって有り得る。

3.4 ベクトルポテンシャル

電場の場合、電位 V を定義して、その勾配として電場を表現する ($\vec{E} = -\text{grad } V$) ことができた。同様のことは磁場でもできるだろうか？



磁場に関しても同様に磁位 V_m を定義して $\vec{H} = -\text{grad } V_m$ のようにして磁場を計算することもできるが、 $\text{rot } \vec{H} \neq 0$ であることが災いして、一価関数でなくなるなど、少々使いにくいものになってしまう¹⁴。こうなった理由は明らかで、磁場というのは磁極が作るものではなく電流が作るものなのに、電荷がつくる電場と同じ形式でポテンシャルを書こうとしたことに無理が生じたのである。

この節では「電流のつくるポテンシャル」である「ベクトルポテンシャル」を導入しよう。うまく使えば、磁場に関係する計算を楽にしてくれるものである。ただし、電位との単純なアナロジーで定義できるものではないことに注意しよう。

3.4.1 数学的な定義

電場 $\vec{E}$ に対してポテンシャルを考える時、数学としては以下のように考えた。

まず、 $\text{rot } \vec{E} = 0$ であることに着目する（これは、静電場が仕事をしないという条件であった）。ここで数学的に「**rot が0になるようなベクトル場は、スカラー場の grad で書ける**」という定理があったので、 $\vec{E} = -\text{grad } V$ となるような関数 V を定義することができた。これを「電位」と呼んだわけである。式で書くと $\vec{E} = -\text{grad } V$ であるが、これは「 V という『架空の高さ』を持った山を滑り降りる方向に働く力が $\vec{E}$ である」ということになるが、つまりは「何かの微分という形で電場を表現する」ことに成功したわけである。

では磁場はというと、残念ながら $\text{rot } \vec{H}$ （あるいは今は真空中なので、 $\text{rot } \vec{B}$ でも同じこと）は0ではない。つまり、「 V_m という『架空の高さ』を持った山」を考えると、その山は「高い方へ高い方へと上り続けると一周して元の場所に戻ってしまう」というまことに奇妙な（エッシャーの絵にそういう構図があるが、あれは絵だからできることである）状況が出現してしまう。

しかし幸いなことには、 $\text{div } \vec{B} = 0$ である。そこでこれを手がかりに「磁場に対するポテンシャル」を考えよう。

数学ではもう一つ、「**div が0になるようなベクトル場は、別のベクトル場の rot で書ける**」という定理¹⁵がある。そこで我々は

¹⁴ とはいえ、「一価関数でない」ということのデメリットを承知したうえで使えば、磁位はそれなりに便利な概念である。

¹⁵ ここで出てきた二つの定理を合わせると、一般のベクトル場は適切なベクトル $\vec{A}$ と適切なスカラー V を持ってくれば、 $\text{rot } \vec{A} + \text{grad } V$ という形で必ず書けることになる。これをヘルムホルツの定理と言う。

ベクトルポテンシャルの定義式

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (3.24)$$

として

$\vec{A}$ を定義することができるのである。

とはいえ、こんな数学的定義を持ち出されても「なんだこれは？」としか思えないのが正直なところだろう。いったい上の式で、われわれはどんな物理量を定義したのであろうか??

そこで、そもそもポテンシャルとは何なのか、をもう一度整理しておこう。

3.4.2 物理的意味

電位の定義は「単位電荷あたりの位置エネルギー」であった。別の言い方をすれば、「電位に電荷をかけると電荷の持つ位置エネルギーが計算できる」ということになる。そこで我々としては「単位電流あたりの位置エネルギー」としてベクトルポテンシャルを定義する。あるいは「ベクトルポテンシャルに電流をかけると電流の持つ位置エネルギーになる」という計算をしたいのである。

ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ は、これまで出てきたポテンシャルとは、ずいぶん性質が違ふもののように感じるかもしれない。そもそも、ポテンシャルがベクトルとはどういうことだ?? と不思議に思うだろう。しかし、「ポテンシャルとは何か?」という本質を理解すれば、ポテンシャルがベクトルになることはその本質に沿っていることがわかるだろう。

電場に対するポテンシャルであるところの電位とはそもそも「単位電荷の持つエネルギー」であった。そして、電場の源は電荷であったが、磁場の源は電流である。すると、「単位電流の持つエネルギー」のようなものこそ「磁場に対するポテンシャル」と呼ぶべきであろう。つまり、(電荷) × (電位) で位置エネルギーになったように、(電流) × (ベクトルポテンシャル) で位置エネルギーになってくれるのではないだろうか?

しかし、電流は向きのあるベクトルなので、「電流とかけてエネルギーになるもの」もベクトルでなくてはならない(もちろん、この場合の掛け算は内積である)。

式を先に出そう。電流が持つ位置エネルギーは

$$U = -\vec{j} \cdot \vec{A} \quad (3.25)$$

で計算できる(そうなるように、ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ が定義されたのである!)。

電位の場合にはつかなかった符号がつくが、それは電流とベクトルポテンシャルが同じ方向を向いた時(つまり、 $\vec{j} \cdot \vec{A} > 0$ の時)にエネルギーがマイナスとなり、下がるということを意味している。すぐ後に図でわかるように、このようにエネルギーの符号を取れば正しく物理現象を記述できる。

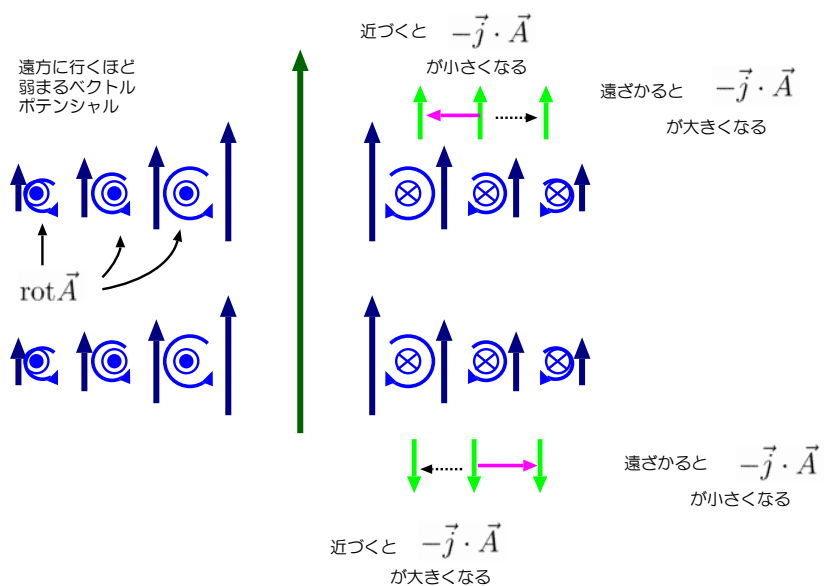
というわけで、「単位電流の持つ位置エネルギー」を作ると、それはベクトル量となったのである。そして、電位(スカラーポテンシャル)が正電荷のあるところで高く、負電荷のあるところで低くなったように、電流に近いところではその方向を向き、大きさが大きくなっていく(遠ざかれば弱くなっていく)という性質を持つ。

まずは絵を描いて、そのような「ベクトルポテンシャル」の rot が磁場を表してくれそうであることを確認しよう。

直線電流の場合を考えよう。図のように z 軸

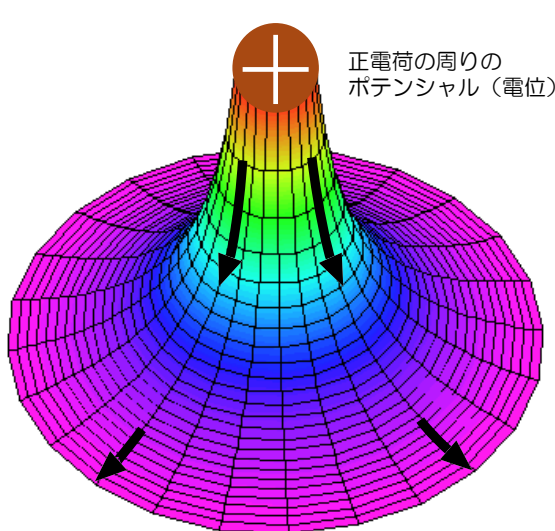
方向を向いた直線電流は z 軸方向を向いたベクトルポテンシャルを作る。そして、そのベクトルの大きさは遠方にいくほど小さくなっていく。このベクトルポテンシャルの rot を考える。 $\vec{A}$ を水流のような流れと見た時、その流れによってそこにある物体がどう回転するか、と考えると $\text{rot } \vec{A}$ のイメージをつかみやすい。rot は図の右側では時計回り、左側では反時計回りとなる。すなわち、右側では紙面表から裏へ向かう向きの磁場が、左側では紙面の裏から表へ向かう磁場ができる。これはまさに直線電流によって右ネジの法則が示す方向に作られた磁場である。

電位は「正電荷のある場所では電位が高くなる(電位を表現するゴム膜が“上”に引っ張

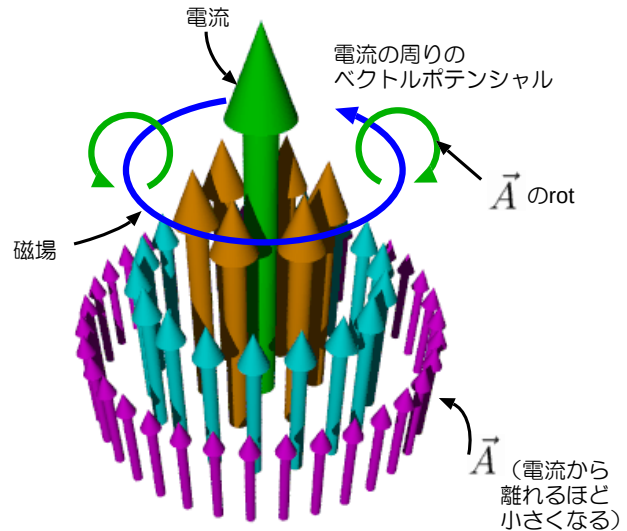


られる)」「負電荷のある場所では電位が低くなる(電位を表現するゴム膜が“下”に引っ張られる)」「電荷がないところでは、ゴム膜は上に凸な部分と下に凸な部分が出てひっぱりあってつりあっている」というイメージで捉えることができた。それと同様にベクトルポテンシャルは「電流があるとその付近にはその電流の方向に向かうベクトルポテンシャルができる」というイメージで捉えることができる。

ちなみに、電場や磁場の「場」は英語では field であり、つまり野原(フィールド)に草が生えているイメージである。場所によって長い草が生えてたり、短い草が生えてたりし、生える方向も場所によって違う。各点各点で違う大きさで違う向きのベクトルがあるというのが「field」のイメージなのである。



電位が下がる方向
(坂を下る方向)に電場が発生

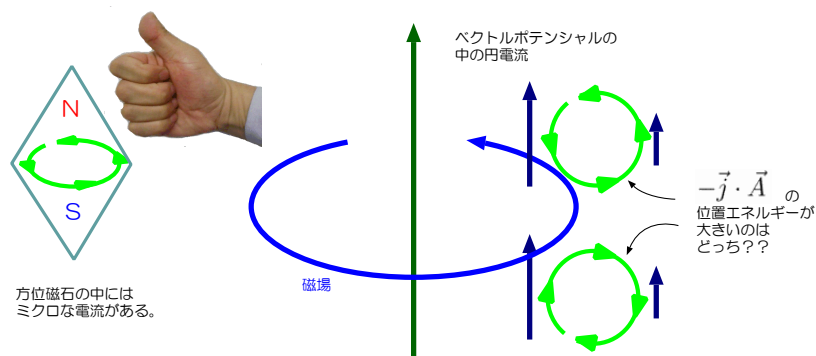


ベクトルポテンシャルが渦を巻く、その渦の軸の方向に磁場が発生

電場と磁場の違い(電位とベクトルポテンシャルの違い)を確認しておこう。

電場は $\vec{E} = -\text{grad } V$ という式で示されるように「電位 V が減る方向」へ向かうベクトルになった。磁場は $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ であるから、 $\vec{A}$ という流れが作る rot (渦) の軸(その向きは、もちろん右ネジの法則で決まる)の方向のベクトルとなる。

このようにベクトルポテンシャルができているところにもう一つの電流(試験電流)を持ってくると、その試験電流は $-\vec{j} \cdot \vec{A}$ のエネルギーを持つ。試験電流が磁場を作っている電流と同じ向きなら、このエネルギーはマイナスであり、 $\vec{A}$ の大きさが大きくなるほど小さくなる。位置エネルギーが低くなる方向へと力が働くと考えれば、これは同じ向きの電流が引き合うことを示している。もし試験電流が磁場を作る電流と逆向きであれば、エネルギーはプラスとなるから、離れた方がエネルギーが小さくなる。すなわち、逆行電流は反発する。



というのはつまり、磁場の方向と方位磁石の方向が一致する方向なのである。

つまり「方位磁石が磁場の方向を向く」という物理現象も、「電流とベクトルポテンシャルによって作られるエネルギーを小さくしようとする」という力学で解釈することが可能になる。

磁石同志の力も同様である。二つの棒磁石があれば N 極と S 極が引き合ってつながって一つの磁石となろうとする(そ

また、そこに方位磁石を持ってきたとする。小さな方位磁石は、小さな円電流と等価である(実際には、方位磁石を構成する原子の中でミクロな電流が流れている)。電流の持つ位置エネルギーは、 $-\int d^3x \vec{j} \cdot \vec{A} = -I \int d\vec{x} \cdot \vec{A}$ であるから、これが小さくなるような位置が安定である。左のように図を書いてみるとわかるように、このエネルギーが小さくなる位置

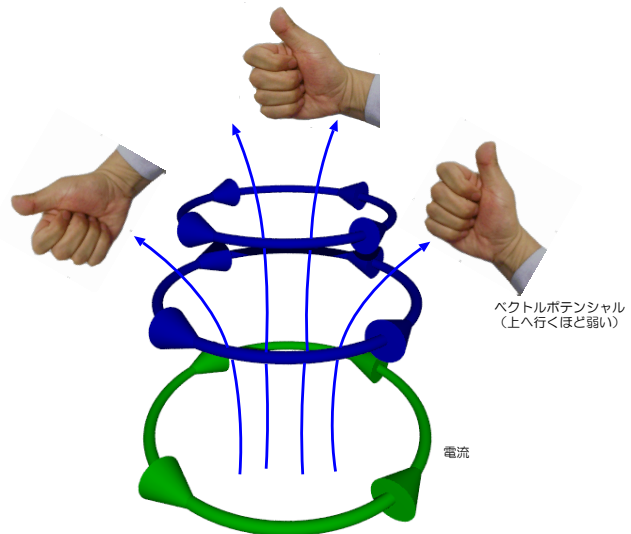
ういう方向に力が働く)。磁石の正体を内部に流れる電流と考えれば、これは電流が平行になろうとする、ということである。電流が平行になると、電流・電流の相互作用による位置エネルギーが小さくなるわけである。一方の作る電流のベクトルポテンシャルと同じ向きに別の電流が入れば、位置エネルギーは小さくなる。

円電流の場合のベクトルポテンシャルを図示すると、図のように、電流と同じ方向に渦をまうようにベクトルポテンシャルが発生するだろう。このベクトルポテンシャルの rot を考えると、円の中心軸で上向きになることはもちろんわかる。さらに「上に行くほど弱まる」ということから、外向きの回転があることもわかる（自分が水の中に浸かっていて、足先の部分で頭の部分より速い水流が流れているとしたら？と考えると理解できるだろう）。つまり、遠方に行くほど磁場が外へ広がって行くこともこの図から理解することができる（図には示していないが、円電流と同じ平面上で、円の外側である場所では、磁場が下を向くことも図を書いてみればわかる！）。

こうしてベクトルポテンシャルを考えることで、磁場の発生や電流間に働く力を、電位と同様にイメージすることができる。

なお、ここで示した $-\vec{j} \cdot \vec{A}$ は、外場の作ったベクトルポテンシャル $\vec{A}$ の中に電流 $\vec{j}$ がやってきた、と考えた時のエネルギーである。電荷の位置エネルギー qV もそうであったが、 $\vec{j}$ 自身もベクトルポテンシャルを作る源であるような場合には、 $\frac{1}{2}$ をかけて $-\frac{1}{2}\vec{j} \cdot \vec{A}$ としなくては行けないことに注意しよう。これはエネルギーが半分になった、ということではない。この $\frac{1}{2}$ なしでエネルギー密度を考えてしまうと、「 $\vec{j}_1$ が作ったベクトルポテンシャル $\vec{A}_1$ により、 $\vec{j}_2$ が持つエネルギー $-\vec{j}_2 \cdot \vec{A}_1$ 」と「 $\vec{j}_2$ が作ったベクトルポテンシャル $\vec{A}_2$ により、 $\vec{j}_1$ が持つエネルギー $-\vec{j}_1 \cdot \vec{A}_2$ 」を両方考慮して足し算してしまうことになるのだが、相互作用のエネルギーであるのでこの二つは同じものを考えていることになる。この「数えすぎ (overcounting)」を防ぐために $\frac{1}{2}$ が必要なのである。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。



3.4.3 ベクトルポテンシャルが一意でないこと

実際にベクトルポテンシャルを計算で使う時に注意しなくてはならないことを一つ指摘しておこう。

電位（「ベクトルポテンシャル」に対比させて「スカラーポテンシャル」と呼ぶこともある）には「定数を加えてもよい」という任意性があった。観測される量である電場が $\vec{E} = -\text{grad } V$ と微分で定義されているために、 $V \rightarrow V + V_0$ (V_0 は定数) と置き換えても電場が変化しないのである。ベクトルポテンシャルの場合、 $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ と定義されているので、 rot を取ると 0 になるベクトル場を $\vec{A}$ に付け加えても、磁束密度 $\vec{B}$ は変化しない。 rot を取ると 0 になるベクトル場としては、 $\text{grad } \Lambda$ のように、任意のスカラー場 Λ の grad がある (grad の rot は常に 0 であることを思い出そう)。よって、

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \text{grad } \Lambda \quad (3.26)$$

という置き換えをしても、物理的内容は変化しない。この置き換えは「ゲージ変換」と呼ばれる。この変換を「ゲージ変換」と呼ぶのは、今となっては歴史的理由しかない¹⁶ののだが、現在も広く使われている。

ここで「エネルギー密度が $-\vec{j} \cdot \vec{A}$ なのだから、 $\vec{A}$ をそんなふう書き換えてはエネルギーが変わってしまっ困るのではないか？」という疑問が湧くかもしれないが、その心配はない。

エネルギー密度は変化してしまうが、その積分である全エネルギーは変化しないからである。エネルギーがどのように変化するか計算してみると、

$$-\int d^3\vec{x} \vec{j} \cdot \vec{A} \rightarrow -\int d^3\vec{x} \vec{j} \cdot \vec{A} - \int d^3\vec{x} \vec{j} \cdot \text{grad } \Lambda = -\int d^3\vec{x} \vec{j} \cdot \vec{A} + \int d^3\vec{x} \text{div } \vec{j} \Lambda + (\text{表面項}) \quad (3.27)$$

¹⁶ ずっと昔は、ほんとうにゲージすなわち物差しの変換だと考える理論があった。つまり電磁場は空間の長さ結びついた量だと考えられていたのである。しかし、現在この理論は否定されている。ただ「ゲージ変換」という概念自体は今も有用である。

となり、電流密度の div が 0 なのでエネルギーの変化分は 0 となる（例によって表面項は 0 になるようにしたとする）。

ベクトルポテンシャルを使って計算している時は、「一見違う値を取っているベクトルポテンシャルでも、物理的内容が同じ場合がある」ことに注意しよう¹⁷。

3.4.4 ベクトルポテンシャルの計算

最後に、ベクトルポテンシャルを計算する方法を示す。 $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ に、 $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ を代入すると、

$$\text{rot } (\text{rot } \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \quad (3.28)$$

となる。ここでベクトル解析の公式

$$\text{rot } (\text{rot } \vec{V}) = \text{grad } (\text{div } \vec{V}) - \Delta \vec{V} \quad (3.29)$$

を使うと、

$$\text{grad } (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.30)$$

という式が出る。ここで、前節で説明したゲージ変換を使って、 $\text{div } \vec{A} = 0$ になるようにする。なぜならどんな $\vec{A}$ が与えられても、適切な Λ を選ぶことで $\text{div } (\vec{A} + \text{grad } \Lambda) = 0$ にすることができるからである。 $\text{div } (\text{grad } \Lambda) = \Delta \Lambda$ なので、これは $\Delta \Lambda = -\text{div } \vec{A}$ となるような Λ を選べということである。この式を静電場におけるポアソン方程式 $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ と比較すれば、電荷密度が $\epsilon_0 \text{div } \vec{A}$ だったとして電位を求めなさい、という問題と等価である。よって、解は常に存在する。

さて以上のようにして簡単化することに成功したとすれば、ベクトルポテンシャルと電流密度の間には、

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (3.31)$$

という式が成立することになる。これは、電位と電荷密度の間の式

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.32)$$

に、非常によく似ている。

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.33)$$

という式で「電荷密度から電位を求める」ことが可能であったことを思い出せば、

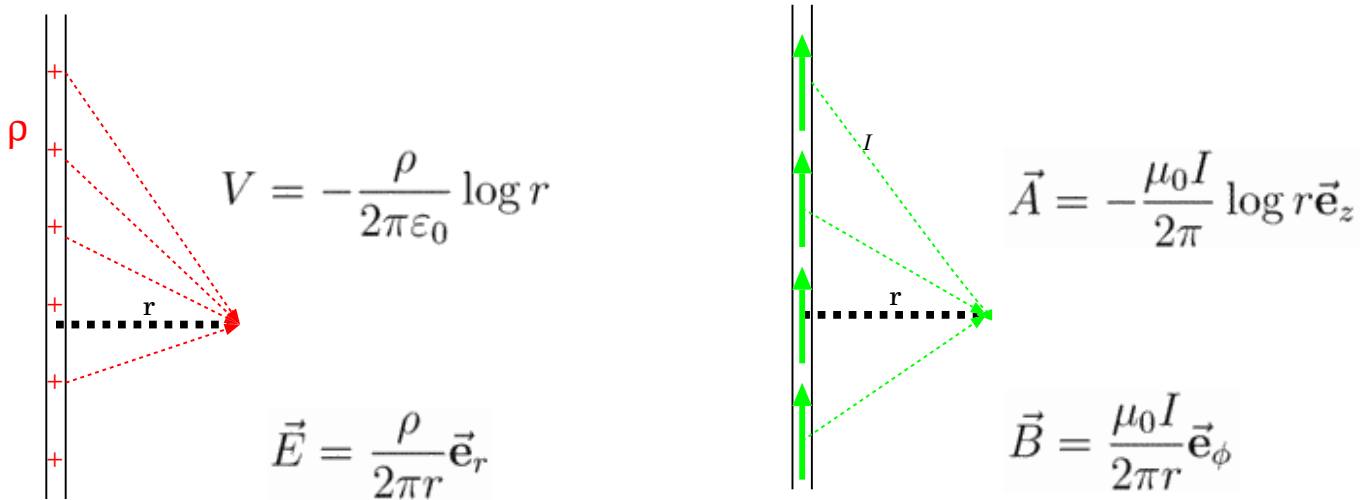
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.34)$$

という計算で「電流密度からベクトルポテンシャルを求める」ことが可能であることがわかる¹⁸。つまり計算自体は（ベクトルであることを除けば）電位と同様に行うことができる。ベクトルポテンシャルを計算できれば位置エネルギーが計算でき、それを使って力を計算したり、粒子の運動方程式を考えたりすることができる¹⁹。

¹⁷これが長い間「ベクトルポテンシャルは数学的なトリックのようなもので、物理的意味はない」と信じられてきた理由であるが、近年、量子力学的な現象（アバロノフ・ボーム効果など）においてはベクトルポテンシャルが存在しないと説明できないことが起こっていることがわかっている。

¹⁸覚えておくと便利な公式である $\Delta \left(-\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ を使えば、(3.33) と (3.32) の関係、および (3.34) と (3.31) の関係がよくわかる。

¹⁹ベクトルポテンシャルを使う計算では「磁場」というものを登場させずに荷電粒子の運動を考えることができるのである。



無限に長い直線電流 I の場合で計算してみよう。無限に長い直線を線電荷密度 ρ 帯電させたのと式の上では同じになる。無限に長い帯電した直線の場合、電位は $V = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \log r$ と書けたので、無限に長い直線電流の場合のベクトルポテンシャルは

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \log r \vec{e}_z \quad (3.35)$$

となる²⁰。

比例定数が変わったことと、スカラーではなく z 方向を向くベクトルとなったことが大きな違いである。今は電流が z 成分しかないので、ベクトルであっても計算はスカラーの場合と同様で済む（電流がいろんな方向を向いている時は、積分はベクトル和を取る形で行う）。

電位 V から電場 $\vec{E}$ を求めるには、

$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} (\log r) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e}_r \quad (3.36)$$

と計算すればよかった。 $\vec{A}$ から $\vec{B}$ を求めるには、

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = -\frac{\mu_0}{2\pi\epsilon_0} \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \right) \times (\log r \vec{e}_z) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} \underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_z}_{=-\vec{e}_\phi} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{e}_\phi \quad (3.37)$$

という計算をすればよい。

【補足終わり】

3.5 章末演習問題

★【演習問題 3-1】 x 軸方向に電場 $\vec{E}$ （強さ E ）が、 y 軸方向に磁束密度 $\vec{B}$ （強さ B ）が一様に存在する場所の原点にそと電荷 q を置いた。この電荷はどのような運動をするかを考えたい。

- (1) x, y, z 方向の速度成分をそれぞれ v_x, v_y, v_z として、運動方程式をたてよ。
- (2) 変数として v_x しか含まない式を作ってみよ（ヒント： $\frac{d^2 v_x}{dt^2}$ がどうなるかをまず考える）。この式の解はどのようなものか？
- (3) 同様に、変数として v_z しか含まない式を作って、解を求めよ（ヒント： $v_z + (\text{ある定数})$ を新しい変数に置き直すと解が求めやすくなる）。
- (4) 全体として、どのような運動になるか？

²⁰ところでこの式ではベクトルポテンシャルが $-z$ 方向を向いていることを不思議に思う人がいるかもしれないが、このマイナス符号がついている「遠方で減少する」という性質を満たしていることに注意。実は計算の途中で正の定数を（定数なので）ポテンシャルに加えても物理的結果には意味がないということで捨てている。そのために負の値を取る。

★【演習問題 3-2】質量 m 、電荷 q を持つ粒子が、 $\vec{F} = -m\omega^2 r \vec{e}_r$ で表現される復元力を受けて原点に束縛されている (r は原点からの距離である)。直交座標系で表現すれば、

$$\vec{F} = -m\omega^2 (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \quad (3.38)$$

であり、運動方程式は

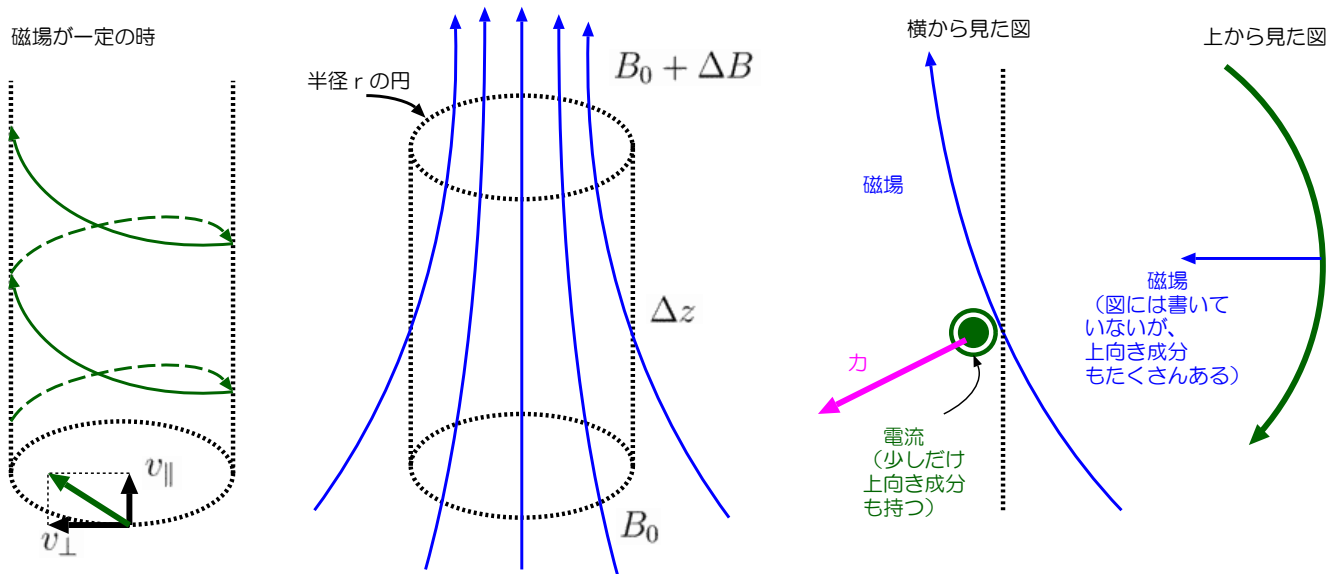
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega^2 x, m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\omega^2 y, m \frac{d^2 z}{dt^2} = -m\omega^2 z \quad (3.39)$$

であるから、各々の方向に角振動数 ω の単振動をする。

ここで z 軸方向に磁束密度 B の磁場をかける ($\vec{B} = B\vec{e}_z$)。すると $q\vec{v} \times \vec{B}$ の力が加わることになる。

- (1) この時の運動方程式を立ててみよ。
- (2) z 方向の運動方程式は磁場が無い時と同じなので、 x, y 方向について考えよう。 $X = x + iy$ という複素変数を使うと x, y 方向の二つの (実数) 方程式を、一つの複素数方程式にまとめることができる。まとめてみよう。
- (3) この方程式を解きたい。 $X = e^{i\Omega t}$ と解の形を仮定して代入し、 Ω を定めよ (2 種類の解が出る)。
- (4) 解として出る二つの運動はどのような運動か、図解せよ。

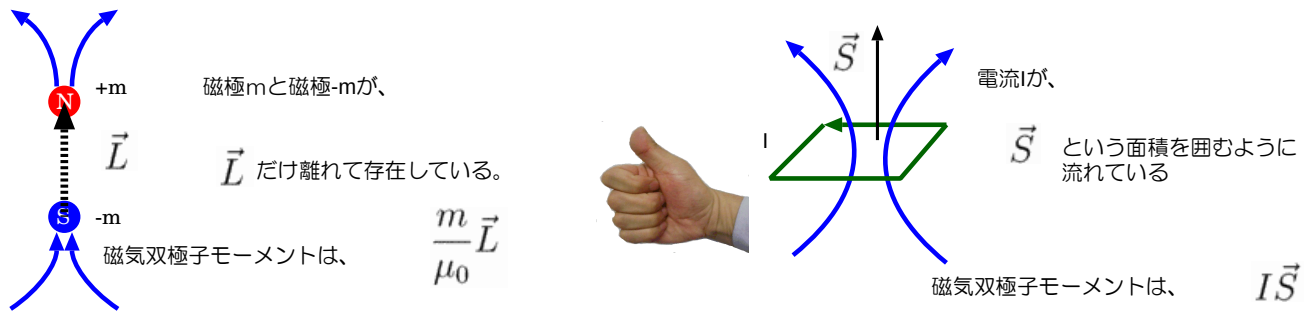
★【演習問題 3-3】 z 方向を向いた一様磁場 (磁束密度 B) がある。この磁場に平行な方向に $v_{\parallel}$ 、磁場と垂直な方向には $v_{\perp}$ という速さをもって、質量 m 、正電荷 q を持った粒子が運動し始めた。もし磁場がずっと一定なら、この粒子は z 軸方向に $v_{\parallel}$ の速度で運動しつつ、 xy 面内で速さ $v_{\perp}$ の等速円運動をする (螺旋運動)。



- (1) 磁束密度が z に依存して少しずつ強くなっていく場合を考える。磁束密度の z 成分 B_z が、ある場所で B_0 であり、そこから z 方向に微小距離 Δz 進んだ点では $B_0 + \Delta B$ だったとしよう。磁力線がつながる ($\text{div } \vec{B} = 0$ になる) ためには、図の円筒に垂直な方向の磁束密度成分 $B_{\perp}$ はどれだけでなくてはいけないか?
- (2) 磁場が円筒面に垂直な成分を持つため、 z 方向にも力が働く。 Δz 進む間に、 $v_{\parallel}$ はどう変わるか?
- (3) $B_{\perp}$ と $v_{\parallel}$ があるおかげで、 xy 面内に働く力もある。この力により、 z 方向に Δz 進む間に $v_{\perp}$ はどう変わるか?
- (4) Δz は微小だとして、この時運動エネルギー $\frac{1}{2} m ((v_{\parallel})^2 + (v_{\perp})^2)$ が変化しないことを示せ (磁場は仕事をしないのだから当然の結果である)。
- (5) このまま磁場が z 方向に進むにつれて大きくなっていくとすると、この荷電粒子はどんな運動をすることになるか、考察せよ。

★【演習問題 3-4】

一様な磁場 $\vec{B}$ 中にある磁気双極子モーメント $\vec{\mu}$ の持つ位置エネルギーは $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ である。これを計算で確かめたい。磁気モーメントは以下の図に示すような二つの定義方法があった。



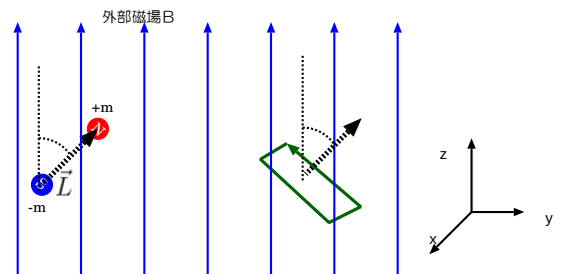
ここで $\vec{S}$ は、その絶対値が今考えている面積で、向きは面積の法線（電流の向きにネジを回した時に進む方を向く）のベクトルである。

以下では磁場が z 方向を向いているとし、磁気モーメントは z 軸に対して角度 θ だけ傾いているとする。

第1の考え方だと、磁位 $V_m = -\frac{1}{\mu_0} Bz$ と考えて、二つの磁極の持つ位置エネルギーが $mV_m(z)$, $-mV_m(z + L \cos \theta)$ で与えられるとすれば計算できる。

第2の考えだと、ベクトルポテンシャル $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ が存在していると考えて、その中で電流の持つ位置エネルギー $-\vec{I} \cdot \vec{A}$ （これは単位長さあたり）を足していけばよい。電流回路は一辺 a の正方形しよう。

この二つの方法で磁気モーメントの持つエネルギーを計算し、一致することを示せ。



第4章 磁性体中の磁場

4.1 磁性

誘電体中の電場を考えた時のように、磁性体内の磁場を考えていこう。磁性体とは、なんらかの形で磁場を発生させる物質で、どのような状況においてどのように磁場が発生するかによっていくつかの種類に分けられる。

誘電体中では、外部からかけられた電場によって物質が分極を起こした¹。その分極によってできる電場によって電場は弱められる。その関係は

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\vec{D} - \vec{P}) \quad (4.1)$$

と表現された。

ここでもし電場と磁場が「電荷がつくる電場」に対し「磁荷がつくる磁場」というふうに対応関係にあったとするならば、話は全く同じになり、

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{P}_m) \quad (4.2)$$

となるだろう ($\vec{P}_m$ は「磁気分極」とでも呼ぶべき量)。

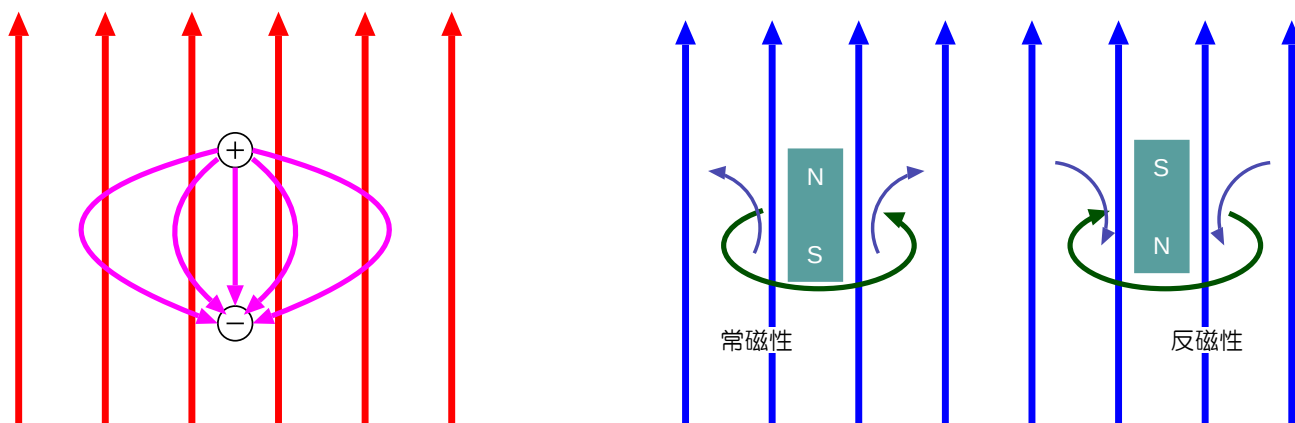
しかし、実際には磁場は磁荷がつくるのではなく、電流または荷電粒子のスピンがつくる。どちらの場合も、電荷の場合の分極に対応する現象（磁荷が二つに分かれるというような現象）は起きない。実際に起こるのは、物質中になんらかの形で電流が発生して、その電流の作る磁場が元からあった磁場に重ねられることになる。この時どのように電流が発生してどのような磁場が重ね合わされるかは物質の種類によって違う²。

このようにして外部磁場などの原因で物質に磁場が発生する事を「磁化する」と言い、物質が磁化する時の性質を「磁性」と呼ぶ。磁性の現れ方は様々であるが、その多くは以下の3つのタイプに分類される。

反磁性 (diamagnetism) 磁場がかけられると、その磁場を打ち消すような磁場を作る³。

常磁性 (paramagnetism) 磁場がかけられると、その磁場を強める⁴。

強磁性 (ferromagnetism) 外部磁場だけではどのような磁場ができるかは決まらない。外部磁場がない時でも、磁場を作っていることもある⁵。



¹強誘電体の場合は外部電場がなくても分極する（自発分極）こともあった。

²もちろん、電場の場合も、誘電体の種類によって分極の起こり方にはいろいろある。

³diamagnetism の dia-は「横切る」という意味。たとえば直径は「diameter」。「反対を向く」という意味が含まれる。

⁴「常磁性」という言葉は「常に磁性を持っている」というふうにイメージされるかもしれないが、それは誤解である。paramagnetism の para は「parallel」の「para」。つまり磁場と平行な磁化を意味する。

⁵ferro-は「鉄」を意味する。鉄は代表的な強磁性物質である。

では、以下で各々の場合にどのような物理現象がそこに起こっているのか、を考えていく。その前に、外部からの磁場に対する物質の反応を記述するための量をいくつか定義しよう。

まず、「磁化」と呼ばれるベクトル量がある。これは物質中に存在する磁気モーメントの体積密度で表現される。磁気モーメントの大きさは電流 I が面積 S を囲むように流れているならば IS となるし、 $+m$ の磁極と $-m$ の磁極が距離 ℓ 離れて存在していたならば、 $\frac{m\ell}{\mu_0}$ という大きさで求めることができた。 IS で考えるとわかるように、磁気モーメントの単位は $[\text{Am}^2]$ であり、単位体積あたりの磁気モーメントである磁化の単位は $[\text{A/m}]$ である。磁化と磁場と同じ単位となる。

後で出てくる反磁性も常磁性も、磁性によって現れる磁気モーメントは、外部からかける磁場に（ほぼ）比例する（強磁性体は違う）。そこで、磁化を $\vec{M}$ とすると、

$$\vec{M} = \chi \vec{H} = \frac{\chi}{\mu_0} \vec{B} \quad (4.3)$$

のように書くことができる。 χ は無次元量⁶で「磁気感受率（magnetic susceptibility）」と呼ばれる（「磁化率」という呼び方もある）。この磁気感受率が物質の種類によって違って来るわけである。強磁性体の場合は、磁化の中に外部の磁場と関係しない「自発磁化」がある点が大きく違う。

4.2 反磁性

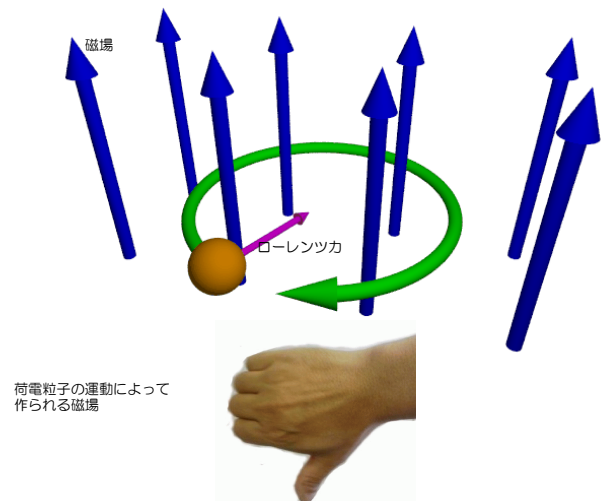
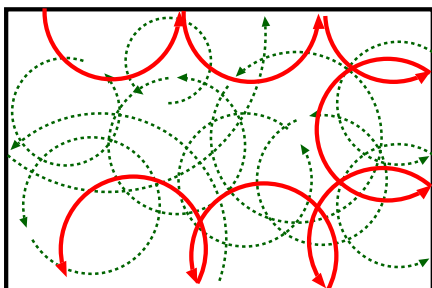
反磁性とは名前の通り、磁場をかけられた物質が逆向きの磁場を発生させることである。物質を構成する分子が一個の磁石と考えた時、これは奇妙に思えるかもしれない。しかし、以下のように考えると反磁性の出現は（多少）納得できるものになるかもしれない。

反磁性を示す物質の一例としては、自由に動き回る荷電粒子を内部に含む物質（金属など）がある。前の章で考えたように、磁場中では荷電粒子は円運動する。荷電粒子の円運動は一種の円電流と考えることができ、この時作られる磁場は外部からかけられた磁場と逆を向くのである（図を参照）。

このようにしてできる円電流の磁気モーメントを求めておこう。電流の作る双極子モーメントは（電流） $\times$ （電流の作る面積）で計算できる。今の場合、面積はもちろん円の面積 πr^2 である。この電荷 q が速さ v で等速円運動しているとすると、単位時間の間に、円上の一点を $\frac{v}{2\pi r}$ 回通過するので、電流（単位時間あたりに流れてくる電気量）は $\frac{qv}{2\pi r}$ であり、磁気モーメントは

$$p_m = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{qvr}{2} \quad (4.4)$$

である。円運動の角運動量は $L = mvr$ であるから、角運動量と磁気モーメントの間には、 $p_m = \frac{q}{2m} L$ という関係がある⁷。



ただし、以上のナイーブ⁸な考え方は実は正しくなく、厳密に古典力学的計算をするとこの効果は消えてしまい、反磁性が現れないことがわかっている。上で考えたように一個の荷電粒子の運動を考えれば磁場ができるように思われるが、金属内には多数の荷電粒子があり、それぞれがいろいろな半径でいろいろな点を中心に円運動することを考えると、話は変わってくる。いっけん、図では反時計回りの電流ばかりが書かれているので、紙面表から裏へ向かう磁場が

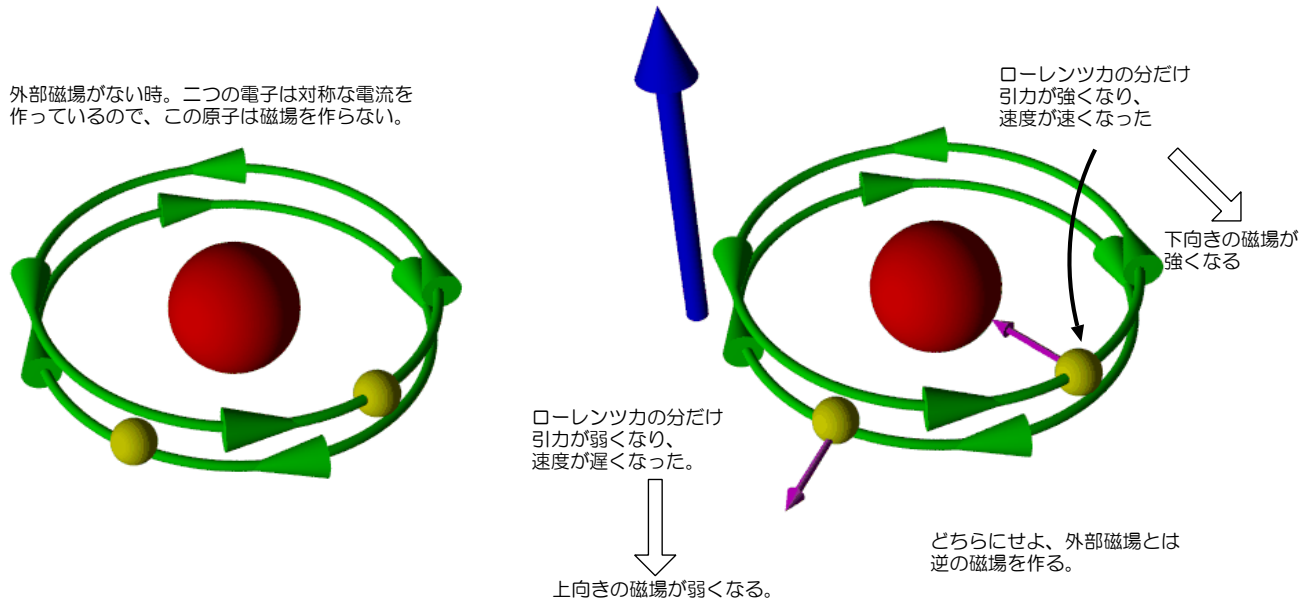
⁶「無次元量」とは長さ、時間などの「次元」を持たない量。別の言い方で言うとメートル、キログラムなどの「単位を持たない量」である。このような量はどんな単位系で計算するかに関係なく、一定の値を取る。

⁷角運動量と磁気モーメントが比例する、というのは今後もよく出てくる大事な関係である。係数は $\frac{q}{2m}$ とは限らない。

⁸物理の本で「ナイーブ」と出てきたら、「純情」という意味ではなく「物を知らないマヌケ」という意味だと捉えた方がよい。

あるように思えるかもしれない。しかし、(図に実線で書いたような) 壁に衝突しながら回る粒子の作る電流 (時計回り) を考慮すると、磁場の和は 0 になる⁹。

後に、量子力学を使って考えると荷電粒子の運動は完全に自由で乱雑なものとはならないので、結果として反磁性が発生することになることがわかった¹⁰。というわけで実は反磁性が出現するには量子力学の効果が必要なのであるが、ここでは量子力学の話にはこれ以上立ち入らないことにしよう。



自由電子は反磁性の原因となるが、自由でない電子 (原子に束縛された電子) も反磁性を生じさせる。原子核の周りを電子が円運動している、という古典的な原子模型でこの反磁性という性質を説明することを試みる。ただし、以下の計算はあくまでも概念だけであって、現実になんかというわけではない (上の場合と同様に、実は量子力学なしに反磁性は説明できない)。ここでは概念だけをつかんでおくように。

簡単のため、原子核の周りを二つの電子が、互いに逆向きに回っているという状況を考える。電子の運動も一種の電流だが、二つの逆向きの電流の作る磁場が消し合った形になり、磁場はできない¹¹。電子が円運動しているのと垂直な方向に磁場をかけてみる。すると電子の運動方程式は

$$m r \omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \pm e r \omega B \quad (4.5)$$

となる。複号 $\pm$ は磁場に対して電子が上の図で見て反時計回りに回っている場合に $+$ 、時計回りに回っている場合に $-$ となる。ローレンツ力の向きを確認してみよう。

角速度 ω を求めるとすれば、

$$\begin{aligned} m r \left(\omega^2 \mp \frac{e}{m} \omega B \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} &= 0 \\ m r \left(\omega \mp \frac{eB}{2m} \right)^2 + r \frac{e^2 B^2}{4m} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} &= 0 \\ \left(\omega \mp \frac{eB}{2m} \right)^2 &= -\frac{e^2 B^2}{4m^2 r} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^3} \omega \end{aligned} \quad (4.6)$$

のような計算をしていくことになるが、ここまでの計算で ω の最終的な値には $\pm \frac{eB}{2m}$ がつき、複号が $+$ の場合と $-$ の場合で、 $\frac{eB}{m}$ の差が現れることがわかる (これはもちろん、 r が同じである場合のことである)。複号の上の段 (最後の式

⁹ このことを示したのはボーアの博士論文 (1911 年) である。その論文では磁性が古典力学ではどうしても出現しないことが証明されている。ボーアはその後に原子の中では古典力学が成立していないという、いわゆるボーアの原子模型 (1913 年) を提出し、量子力学を大きく発展させた。ボーアが量子力学を考えた理由はここにもあったに違いない。

¹⁰ 導体に生まれる反磁性は、ランダウによって量子力学的に説明された。

¹¹ まったくの余談であるが、しばらく前にテレビで騒がれていた宗教団体は、こういう逆向き電流が流れていると磁場ができない代わりに「スカラー波」ができるのだ (しかもそのスカラー波は何かよからぬことをしですか?) と言っていた。もちろん事実無根。その宗教団体に言わせると、「磁場ができない代わりにエネルギーがスカラー波になって流れ出す (!?)」のだそうだが、実際は磁場を作らないなら作らない分だけ電流を流すためのエネルギーが少なくて済むだけのことである。

が一になる方)は図で反時計回りに回っている方であり、この場合は角速度が速くなる。一方複号の下の方は角速度が遅くなる。二つの角速度の差が $\frac{eB}{m}$ だということになる。

複号のどちらの場合でも、その効果は下向きの磁場を増やす(言い方を変えれば「上向きの磁場を減少させる」)。つまり、これも反磁性の出現である。

反磁性を持った物体は、磁石を近づけると反発することになる。ただし、反磁性は非常に弱いので、強力な磁石でない現象を目で見ることは難しい。

反磁性を持っている物質としては、希ガスの原子、イオン化することで希ガスと電子配列が同じになっているイオン、水など共有結合で結びついた分子などがある。このような原子・分子は電子や原子核の持つ磁気モーメントがうまく消し合っていて、外部磁場がなければこの物体から磁場が作られることはない。原子サイズのスケールで見ればもちろん、複雑な磁場がそこにあるだろうが、巨視的に見ると(平均化すると)磁場はないと言ってよい。

反磁性体の場合、磁気感受率 χ は定義により負の値を取る(外部磁場とは逆向きに磁場ができる)が、その値は非常に小さく、 -10^{-6} 程度である。

なお、一部の物質は極低温で「超伝導」と言われる状態になり、抵抗無しに電流が流れるようになる(これまた量子力学的現象である!)。この時、内部に現れた電流によって磁場は全て打ち消されるので、この場合を「完全反磁性」と言う^a。この時、 $\chi = -1$ になっているということになる。

物質	磁気感受率
銀	-2.6×10^{-5}
銅	-9.4×10^{-6}
ビスマス	-1.7×10^{-4}
アルゴン	-9.5×10^{-9}
水晶	-1.5×10^{-5}
水	-8.8×10^{-6}

^aなお、超伝導になると完全反磁性を示すが、超伝導は完全反磁性だけではなく、他にもいろいろ不思議な性質を持っている。それらを理解するには量子力学が必要である。

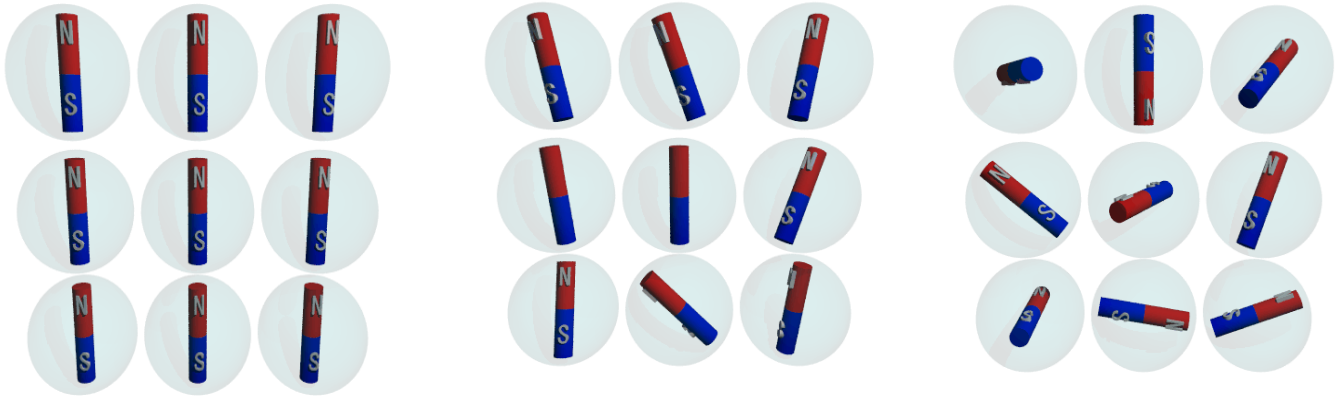
4.3 常磁性体

反磁性はもともと磁気モーメントを持っていない電荷が、磁場中を運動することによって円電流と化し、磁気モーメントを持つことから生まれた。それに対して常磁性は、最初から磁気モーメントのある原子・分子が磁場中に置かれた時に起こる。原子・分子が磁気モーメントを持つ理由は、原子核や電子など、一個一個の構成粒子が磁気モーメントを持っていることの他に、電子の軌道運動などがある。原子・分子一個一個が磁石となる(磁気モーメントを持つ)原因は電子のスピンという性質によることが多い¹²。なお、電子自体も一個の磁石なので、自由電子が原因となって起こる常磁性ももちろんある。反磁性を示す物質の場合は、これらがうまく消し合って、原子・分子一個の状態では磁性を示さない。そうではない物質の多くは常磁性体となる。

常磁性体を構成する原子・分子は一個だけで0でない磁気モーメントを持つ。いわば「ミニ磁石」である。では常磁性体は磁場を発するかというと、やはり外部磁場が0ならば磁場を発しない。原子・分子の「ミニ磁石」が互いにでたらめな方向を向いているので、トータルの磁場は0になってしまう。

外部磁場がかかると、少し状況が違ふ。方位磁石がそうであるように、原子・分子の「ミニ磁石」は磁場の方向を向きたがる。といっても、いきなり磁場の方向を向いてしまうというわけにはいかない。原子・分子はそれぞれが乱雑な運動をしている(そして、その運動は温度が高いほど激しい)ので、個々を見るとでたらめだが、全体で平均を取ると磁気モーメントが磁場の方向を向く、という形になる。

¹²スピンとは、古典力学的には自転の角運動量に対応する物理量であるが、その本質は(またしても!)量子力学的にしか理解できない。



←エネルギー低い
←乱雑性低い
(エントロピー低い)

エネルギー高い→
乱雑性高い→
(エントロピー高い)

「低きに流れる」(物理的に表現すれば「エネルギーを下げる方向に状態が遷移する」というのが自然界における一つの傾向である。これだけならば、ミニ磁石は全部磁場方向を向いてしまうように思われる。しかし実は自然界にはもう一つ「乱雑を好む」という傾向がある¹³。これは物理的に表現すれば「エントロピーが高くなる方向に状態が遷移する」ということになる(エントロピーについての詳しいことは3年の熱力学と統計力学で勉強しよう)。実際に起こる物理現象は、この二つの傾向の「平衡点」である。「低きに流れる」からといって全てが最低エネルギーに落ち込むということはないし、「乱雑を好む」からといって外部磁場にまったく反応しないということもない。

多くの常磁性体では、磁気感受率は 10^{-5} から 10^{-3} の程度である(反磁性よりは強く出現するが、後でやる強磁性に比べると、その効果は小さい)。磁気感受率はおおむね絶対温度に反比例する(おおざっぱに考えるならば、「高温になると分子運動が激しくなって磁化を消してしまう」と思えばよい)。

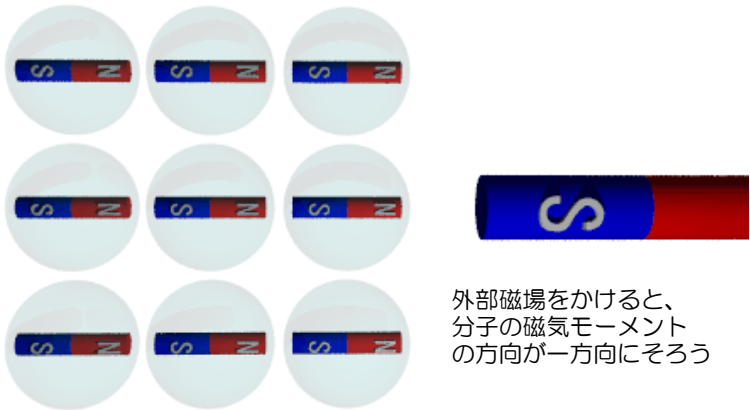
こうして磁化すると、常磁性体は磁石にくっつく。常磁性体となる物質は数多いが、意外なところでは、酸素が常磁性体である(液体酸素は磁石につく)。

物質	磁気感受率
アルミニウム	2.1×10^{-4}
白金	2.9×10^{-4}
空気	3.7×10^{-7}
液体酸素	3.5×10^{-3}

4.4 強磁性体

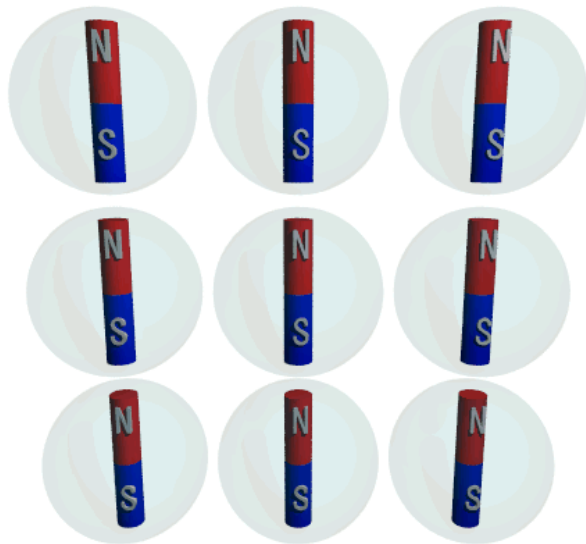
強磁性体とは、いわゆる「磁石」になる物質である。鉄、コバルト、ニッケルなどが該当する¹⁴。外部から磁場をかけられたりしなくても勝手に(自発的に)磁化しているような物質である。誘電体の場合の「強誘電体」に対応するものであることは言うまでもない。

常磁性体も強磁性体も、「ミニ磁石」の集まりであって外部磁場をかけると同じ方向に磁場が作られる点は同じである。違うのは磁場を弱くしていった時の振る舞いで、常磁性体の場合、外部からの磁場を0にすると磁化も消えてしまう。強磁性体の場合は磁化は一般には消えない。



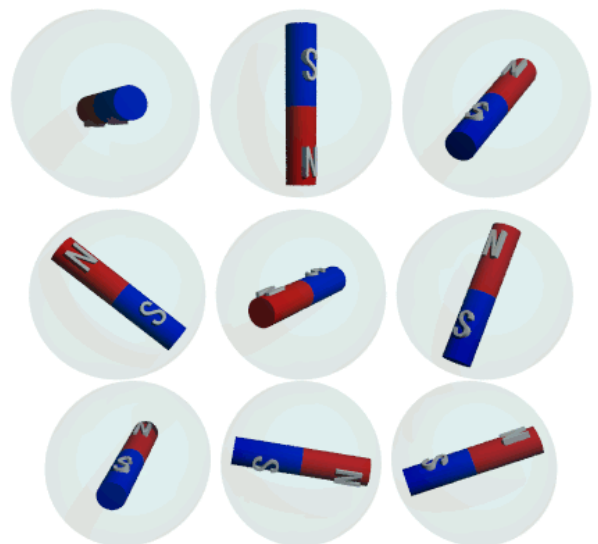
¹³一見逆向きの作用に思えるこの二つは、実は同じ内容から導けるとも言える。統計力学を勉強してからこの問題を考えてみるとよい。その答はカノニカル分布という式の中に現れる $e^{-\frac{E}{kT}}$ という因子に隠れている。
¹⁴最近作られた最強磁石と言われるネオジム磁石はネオジム、鉄、硼素の化合物。

強磁性体



ミニ磁石が整列している

外部磁場がかかっていない時の常磁性体



ミニ磁石が乱雑な方向を向いている

なぜ物質が強磁性を持つのかは現在でも未確認な部分を含む、非常に難しい問題であるのでここでは考えない。実際の強磁性体がどのように磁化を起こしているのかについてのみ述べよう。例えば鉄は強磁性体であり、外部から磁場をかけなくても磁化している状態にある。しかし、では一個の鉄の塊は常に磁石になっているのかということそんなことはない。それは、(磁石になっていない) 鉄の内部は「磁区」と呼ばれる区域に分かれていて、各磁区内では磁化の方向がそろっているが、各々の磁区の磁化の方向は乱雑となっているからである。つまり、平均をとると磁化が0になっている。常磁性体も平均をとると磁化が0であるという点では同じだが、磁化がそろっている部分のサイズスケールが違う。常磁性体は「原子・分子」スケールでは磁化している。強磁性は「磁区」のスケールで磁化している。

外部から磁場をかけることによって磁区が整列し、大きなサイズの磁区となると、強力な磁石になる。コイルに鉄芯を入れることで電磁石が強くなるのはこの応用である。

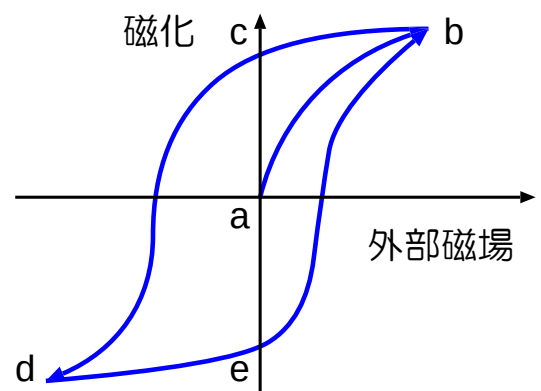
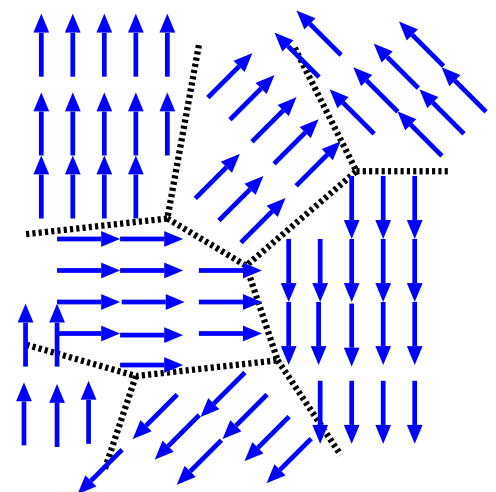
強磁性体の場合は外部磁場と磁化は比例関係にはない(後で示すグラフを参照せよ)。

磁石を高いところから落としたりすると磁力が弱まるが、これは磁区の整列が壊れるためである。また強磁性体は熱することによって強磁性を失い、常磁性になる。この強磁性→常磁性の転移が起こる温度をキュリー温度と言う。それは(非常に単純化して言えば)温度が高いと分子運動が激しくなり、磁区をたもっていられなくなるからである。

最初外部磁場が0で、磁化もしていない強磁性体(図のaの状態)を考える。この強磁性体に磁場をかけていく(図のa→b)と、磁化がどんどん大きくなっていく。ただし、磁区が整列しきってしまうともう磁化が増えないので、ある程度で磁化は増えなくなる(飽和する)。

その状態から外部磁場を弱くしていく(図のb→c)と、外部磁場が0になってもまだ磁化は残っている(この磁化を「残留磁化」と呼ぶ)。さらに逆向きの外部磁場をかけていってから戻すと、今度は図のdを経てeに戻る。最初から述べているように、強磁性体の場合は外部磁場が0であっても磁化の値はいろいろな値が有り得るのである。

これはいったん整列された磁区の状態は外部磁場が消えても残る(記憶される)ということを示している。これをヒステリシスと言い、この記憶効果はカセットテープやハードディスクなどの磁気記憶装置の原理となっている。



ここまでで、原因から磁性の種類をまとめると、

- (1) (内部で電流が流れる物質) → (反磁性を示す)
- (2) (原子や分子が磁気モーメントを持っている物質) → (常磁性を示す)
- (3) (その中でも特に、磁気モーメントが整列したがる物質) → (強磁性を示す)

と考えればよい。ほとんどの物質は内部に電流があるので、反磁性はほぼ全物質に共通と思ってよい。ただし、反磁性は小さいので、常磁性または強磁性を持っている物質の場合、他の性質に隠されてしまって見えないことが多い。つまり「反磁性を持つ物質」はたくさんあるが「反磁性体として観測される物質」は少ない(希ガスの他、銀、銅など)。

常磁性・強磁性を持つ物質は、原子(分子)が「ミニ磁石」として振る舞うような物質である。これは電子の配置などに不釣り合いな場所があり、全体としての磁気モーメントが消し合っていないような物質である。原子のミニ磁石が整列したがる性質を持たないものは常磁性体に、持つものは強磁性体となる。常磁性体には白金、アルミなどがあり、強磁性体には鉄、コバルト、ニッケルなどの小数の金属などがある。

なお、物質がどのような磁性を持つかは温度や圧力などの諸条件で変化することがあり、それを調べることで原子・分子の構造についての情報が得られることがある。磁性には他の種類もあるが、ここでは省略する。

4.5 磁場の表現—磁束密度 $\vec{B}$ と磁場 $\vec{H}$

物質中の電場を表現するには、「電場」 $\vec{E}$ と「電束密度」 $\vec{D}$ を使った。これと同様に、物質中の磁場を表現するには「磁束密度」 $\vec{B}$ と「磁場」 $\vec{H}$ がある。まず静電場の場合どうであったかを振り返ろう。

4.5.1 誘電体中の $\vec{E}$ と $\vec{D}$

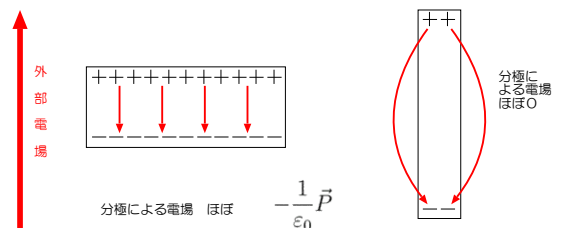
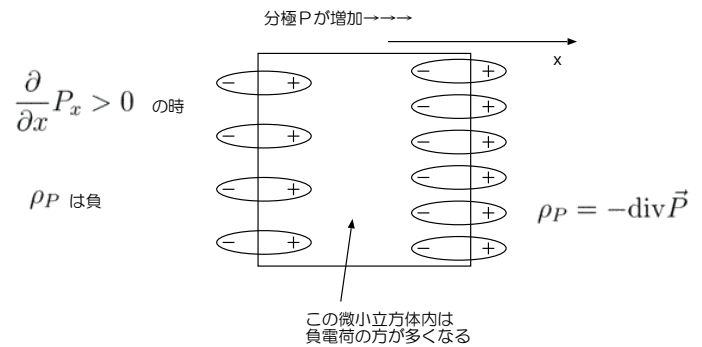
$\vec{E}$ と $\vec{D}$ の違いを考える時に重要となるのは、「電荷には真電荷と分極電荷の2種類がある」とする考え方である。分極電荷は分極が起こることによって生じる電荷である。原子レベルで起こっている分極によるものだから、この分極電荷の存在は目に見えにくい(というより、ファラデーやマクスウェルが電磁気学を作っていたころは、分子や原子という物の存在すら疑問視されていた)。よって、見えやすい真電荷の部分だけを使った式を作ってみよう。

全ての物質が均等に分極していれば、全体として電荷がないのと同じになる。しかし、分極の大きさに不均一性があると、その分だけそこに電荷があることになる。詳しい計算は前期のテキストを見てもらうことにして、分極による電荷の電荷密度は $-\text{div } \vec{P}$ と書くことができる(単純に考えれば、分極に湧き出しがあるということはそのあたりから電荷が抜け出した、ということだから、電荷密度がマイナスになるのはもっともである)。真電荷密度を $\rho_{\text{真}}$ 、分極電荷密度を $\rho_P = -\text{div } \vec{P}$ とし、この二つの和が実際にそこにある電荷だと考えると $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{真}} - \text{div } \vec{P})$ という式から、

$$\text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{真}} \quad (4.7)$$

という式が作られる。よって $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$ とおくことで $\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{真}}$ という式に達する。

このように、実際にそこにある電場から、「分極によって作られると思われる電場」 $-\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$ を引き、さらに比例定数 ϵ_0 をかけたものが $\vec{D}$ である。「作られると思われる」であって「作られる」ではないのは、実はどれだけの電場が現れるかは誘電体の形状に依存するからである。たとえば広い平板が板に垂直に一樣に分極しているような場合は、確かに $-\frac{1}{\epsilon_0} \text{div } \vec{P}$ の電場が分極によって作られるが、長い棒が軸に沿って分極しているような時は、逆向きの電場はほとんどできない。



$\vec{P}$ は $\vec{E}$ と同じ方向を向くことが多い（そしてその場合、 $\vec{D}$ も同じ方向になる）ので、その場合はまとめて $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ と書くこともできる。

まとめるとこんなふうに考えられる。

—— 電場と電束密度（おおざっぱな理解） ——

電場 $\vec{E}$ 実際にその場所に巨視的試験電荷を置いたとするとどんな力が生じるかで定義される量。周りに物質があるとその物質の影響を受けて弱まることもある。

電束密度 $\vec{D}$ $\vec{E}$ から、物質の影響によって現れると思われる $-\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$ という電場を差し引いたもの。ただし、 $\vec{E}$ とは単位が ϵ_0 倍違う。

ただし、誘電体がどんな形をしているか、どんな電場の中に誘電体が置かれたか、などの状況によって $\vec{E}$ と $\vec{D}$ がどうできるかも変化するので、上の考え方はあくまで概観に過ぎない。実際には分極は一様に存在しているわけではなく、原子や分子に付随して局在しているので、現実の微視的な電場、分極、電束密度は皆、ずっとずっと複雑である。上で「巨視的試験電荷」とことわったのは、原子レベルよりずっと大きい試験電荷を置けば、そういう原子レベルの揺らぎは平均化されて消えるからである。

このように解釈すると、 $\vec{D}$ はある意味人工的に作った場と言えるかもしれない¹⁵である。とはいえ $\vec{D}$ をつかえば誘電体がある場合でもガウスの法則が使えるなどのメリットがある。

4.5.2 $\vec{B}$ と $\vec{H}$

では磁場 $\vec{H}$ と磁束密度 $\vec{B}$ はどんな関係だろうか？—上と同様のまとめを先に書いておくと、

—— 磁束密度と磁場（おおざっぱな理解） ——

磁束密度 $\vec{B}$ 実際にその場所に巨視的試験電流を置いたとするとどんな力が生じるかで定義される量。周りに物質があるとその物質の影響を受けて強まることも弱まることもある。

磁場 $\vec{H}$ $\vec{B}$ から、物質の影響によって現れると思われる磁束密度を差し引いたもの。ただし、 $\vec{B}$ とは単位が $\frac{1}{\mu_0}$ 倍違う。

である。

もちろん厳密な定義は後で出す式であり、ここで述べたのは概観に過ぎない。真空中ならこの二つは比例定数 μ_0 を除いて等しく、 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ である。磁性体中では、電流の作る磁場に加えて、磁場によって作られた（あるいは、整列させられた）分子電流による磁場が加えられ、「外部の電流が作るもの」以上に磁場が強くなったり弱くなったりする（物体が常磁性体・強磁性体か、反磁性体かによって変わる）。そこで、電束密度を定義する時にしたように、電流密度 $\vec{j}$ を

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{j}_{\text{真}} + \vec{j}_M \quad (4.8)$$

のように「真電流 $\vec{j}_{\text{真}}$ 」と「磁化による電流 $\vec{j}_M$ 」¹⁶に分けよう¹⁷。

では、上で分極電荷密度 ρ_P を $\vec{P}$ を使って表したように、 $\vec{j}_M$ を $\vec{M}$ で表すことができないか、ということを考えよう。もし磁化 $\vec{M}$ が一様なら、その場所には電流は流れていない。というのは図 4.1 を見てもわかるように、全体に同じ強さで円電流が流れていたなら、隣同士で消し合ってしまうからである。図の右のように、 $\vec{M}$ がだんだん増加していると、隣との磁化の強さの差の分だけ、電流が残る。図 4.1 の右側の図で言えば、紙面裏から表へ向かう磁化が右へいくほど増加していると、上向きの電流が流れていることになる。

紙面の裏から表へ向かう向きを x 軸として、紙面右を y 軸、紙面上を z 軸とすると、 $\vec{M}$ の x 成分 M_x が増加していると、 $-z$ 方向の電流が生まれる ($j_z \propto -\frac{\partial}{\partial y} M_x$)。単に比例ではなく、この場合厳密に $j_z = -\partial_y M_x$ が成立することは、下の図を使って確認しよう。

¹⁵（巨視的な）電場も平均化しているという意味では人工的である。

¹⁶なお、考えるべき電流としてはもう一つ「分極電流」というのがある。これは電気分極 $\vec{P}$ が時間変化することによって流れる電流であり、 $\frac{\partial}{\partial t} \vec{P}$ と書ける。今は定常状態のみを考えているので省略する。

¹⁷これまでは真空中を考えていたので $\vec{H}$ と書いても $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ と書いても同じ意味であったが、上の式は $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ を使って書かなくてはいけない。磁性体中では、 $\vec{H}$ が今から定義する量に変わるからである。

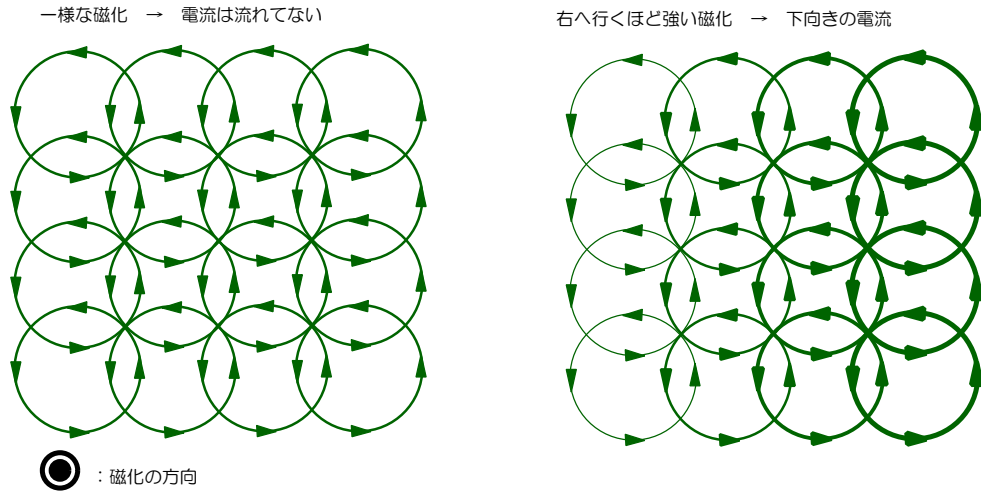
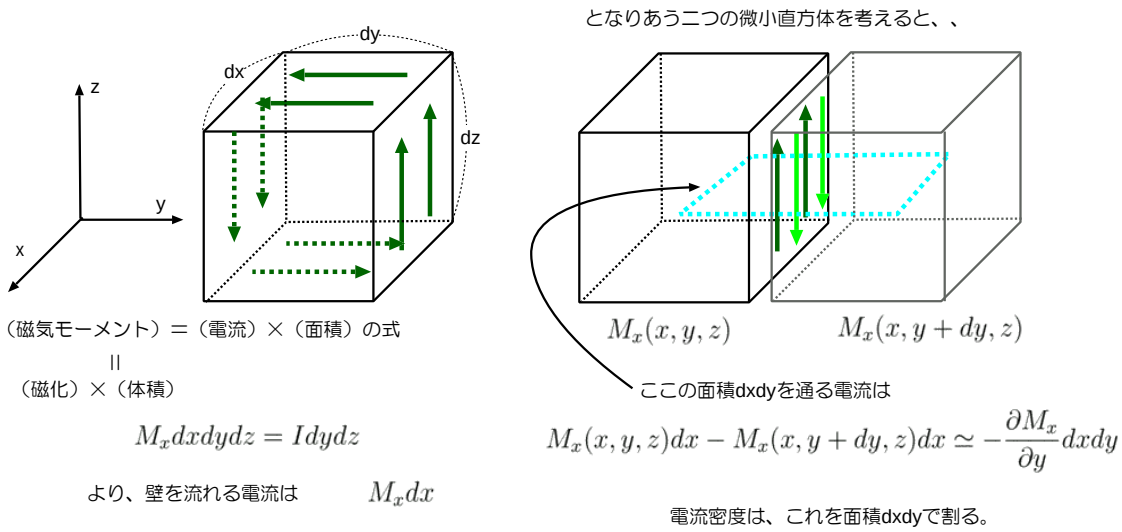


図 4.1: 磁化と電流の関係



さて、以上では M_x が y の変化に伴って変化する時に j_z がある、ということを説明したが、次の図のように考えると、 M_y が x の変化に伴って変化する時も j_z がある。しかも、その方向は今度は正の向きになる。

こうして、 z 軸方向の分子電流は、 M_x が y に依存して変化する影響と、 M_y が x に依存して変化する影響と、二つの原因で出現する。よって、

$$\partial_x M_y - \partial_y M_x = j_z \quad (4.9)$$

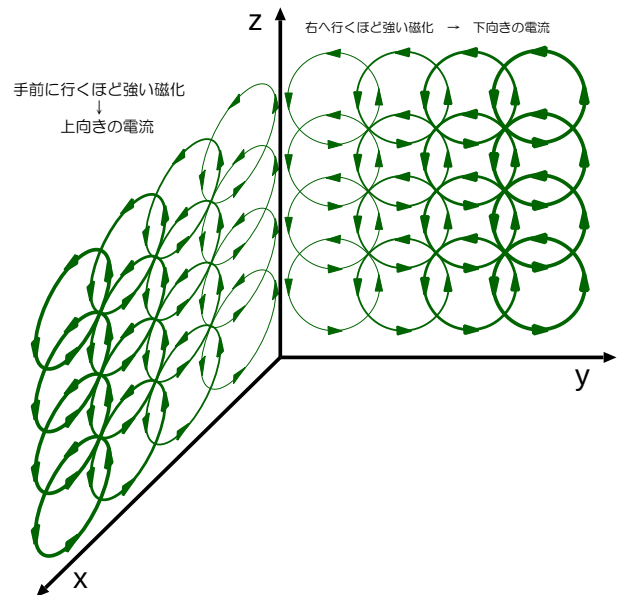
が成立する。 j_x, j_y についても同様の(サイクリック置換¹⁸した)式が成立するから、3成分まとめて考えれば

$$\text{rot } \vec{M} = \vec{j}_M \quad (4.10)$$

という式が出る。これを使うと

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) &= \vec{j}_{\text{真}} + \underbrace{\vec{j}_M}_{=\text{rot } \vec{M}} \\ \text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) &= \vec{j}_{\text{真}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

ということになる。ここで、



¹⁸ 「サイクリック置換」とは $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$ のように、 xyz を回転させるように置換すること。

物質中の磁場 $\vec{H}$ の定義

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (4.12)$$

と置

くことで、方程式 $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{真}}$ が成立する。

以上をまとめると、静磁場の基本方程式は、 $\vec{B}$ を使って書くならば、

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{j}_{\text{真}} + \vec{j}_M, \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (4.13)$$

$\vec{H}$ を使って書くならば、

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{真}}, \quad \text{div } \vec{H} = \rho_M (\text{ただし、} \rho_M = -\text{div } \vec{M}) \quad (4.14)$$

である。 ρ_M は静電場の場合の分極電荷密度 $\rho_P = -\text{div } \vec{P}$ に対応する量である。

通常は

静電場の基本方程式

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}, \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (4.15)$$

をもっ

て基本法則とする ($\vec{j}_{\text{真}}$ の「真」は省くことが多い)。この二つの式を使うと、分子内に発生している磁極や電流が (式の上では) 見えなくなるというのが一つの利点である。真電荷や真電流は測定もできるし実験者が設定することもできるが、分極や分子電流は、直接測定したり操作したりすることはできない。そのような量を (見た目だけでも) 式から追い出せるというのが新しい場を定義する理由である。

実在する電場・磁場に近いものが「電場 $\vec{E}$ 」と「磁束密度 $\vec{B}$ 」、物質の影響を人為的に取り除いたものが「電束密度 $\vec{D}$ 」と「磁場 $\vec{H}$ 」となっていて、名前と内容が整合してないように感じるかもしれない。英語では $\vec{E}$ (Electric Field) と $\vec{B}$ (Magnetic Induction) に対して $\vec{D}$ (Electric Displacement) と $\vec{H}$ (Magnetic Field) なので、もっと不整合である¹⁹。しかしこれは磁場が電流によって作られているのか磁極によって作られているのかがわからなかった時代からの名残なのである²⁰。そのため、最近では $\vec{B}$ を「磁場」と呼ぶ本もあるようである。そういう本では $\vec{H}$ は登場しても「補助場」として扱われている。

電磁気は歴史が長いせいもあっていろいろと用語に混乱がある (さまざまな単位系が混在していることがこれに拍車をかけている) が、本を読む時には混乱しないように気をつけよう。

4.5.3 透磁率

$\vec{M} = \chi \vec{H}$ が成立している場合ならば、

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H} \\ (1 + \chi) \mu_0 \vec{H} &= \vec{B} \end{aligned} \quad (4.16)$$

となる。 $(1 + \chi) \mu_0$ をまとめて μ と書いて「透磁率」と呼ぶ。透磁率は物質によって違う (χ が物質によって違うから)。透磁率 μ と真空の透磁率 μ_0 の比 $1 + \chi$ を μ_r と書いて「比透磁率」と呼ぶ。これらを使えば、

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad (4.17)$$

とも書ける。

反磁性体や常磁性体の場合、 χ が 1 よりかなり小さいので、比透磁率はほぼ 1 である。強磁性体の場合は $\vec{H}$ と $\vec{M}$ が正比例関係にないことが多い (特に $\vec{H} = 0$ でも $\vec{M} \neq 0$ であることもある) ので、上の式を使うのは無理がある。単純に $\frac{|\vec{B}|}{|\vec{H}|}$ を透磁率と定義した場合、この量は $\vec{B}$ に依存して変化する量になる。外部磁場が小さい時はだいたい $\vec{B}$ と $\vec{H}$ は比例し、軟鉄の場合で比透磁率にして 300 程度の値となるが、その後増加し、2000~3000 ぐらい (鉄の状態によって変わる)

¹⁹英語でも、 $\vec{B}$ を Magnetic Flux Density、 $\vec{D}$ を Electric Flux Density と書く場合もある。

²⁰特に Electric Displacement (電気変位) や Magnetic Induction (磁気誘導) などという用語は、電磁場が“空間に分布する物質のようなもの”と思われていた時代の名残りであって全く現代的ではない。

まで大きくなる（数万の比透磁率を持つ物質もある）。しかしある程度より磁場が強くなると、磁化が飽和する（分子磁石が完全に整列してしまうと、それよりも磁化が大きくなることはあり得ない）影響で比透磁率はむしろ下がっていく。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでおいてください。

なお、一般の場合、 $\vec{M}$ の向きと $\vec{H}$ の向きが一致しないこともある（たとえば特定の方向に磁化しやすい性質を持つような結晶があれば、当然その方向の磁化が強くなり、方向がずれる）。そのような場合、透磁率は

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

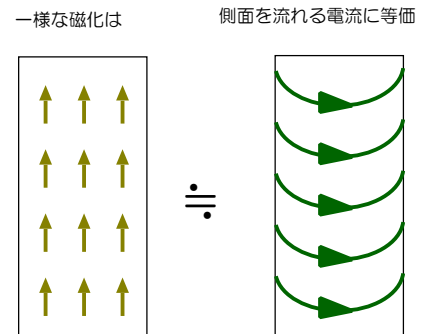
のように行列で表現されることになる。なお、後でやるように磁性体の境界付近でも $\vec{H}$ と $\vec{B}$ の方向はずれる。

【補足終わり】

4.6 例題：一様に磁化した円筒形強磁性体

上の説明の途中で「磁化が一定なら分子電流は打ち消す」ということを書いたが、有限の大きさの磁性体がある場合、全領域において打ち消すということではない。たとえば円筒形の強磁性体とその軸方向に一様に磁化した場合を考えよう（外部磁場はないとする）。

円筒の内側では磁化が存在するが外には存在しないわけなので、そこで磁化の大きな変化がある。そこでだけ $\text{rot } \vec{M}$ は 0 でない（ rot は微分的一种なので、 $\vec{M}$ が変化するところでは 0 ではない）。つまり分子電流は円筒の側面に集中して流れていることになる（もちろんこれは平均化して見ればそうなるという話である）。したがって、磁化した円筒の作る磁束密度は、有限な長さのソレノイドコイルの作る磁束密度と同じと考えることができる。



磁性体の作る磁場を、「表面に流れる円電流が作る」と考えて図に示したものが

下左の図である。これは電流が作る磁束密度を表現したものであるから、磁束密度を表す線（磁束線）は始まりもなくループする（ $\text{div } \vec{B} = 0$ ）。有限長さのソレノイドなので、無限に長い場合とは違って、磁場は外にも漏れていることに注意しよう。しつこいようだがもう一度注意しておくと、実際にはこの二つのどちらでもない状態が出現している。分子電流はきれいに重なり合うわけではないから表面以外でも多少は残るだろうし、磁極と考えた場合も、天井と底面以外にも多少は残る（平均化して考えると表面や天井・底面にだけ分布するように考えてよくなる）。

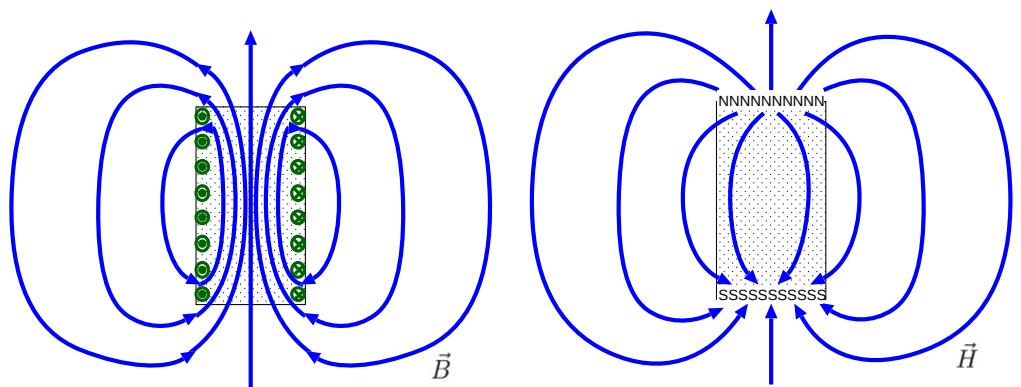
一方、磁性体の作る磁場を

「天井と底に現れる磁極が作る」と考えて図に示すと右の図となる。これは静電場の場合のコンデンサなどの作る電場と相似である。ここには電流はないので、 $\vec{H}$ を表す磁力線はループすることがない（ $\text{rot } \vec{H} = 0$ ）。

磁性体の外（真空）では $\vec{B}$ と $\vec{H}$ は本質的に同じである（比例定数 μ_0 で比例して

いるだけ）。磁性体内では図の上向きに磁化 $\vec{M}$ が存在している。 $\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{H} = \vec{M}$ であるから、上向きの $\vec{B}$ の $\frac{1}{\mu_0}$ 倍から下向きの $\vec{H}$ を引いたものが $\vec{M}$ になっている。

以上からわかるように、分子電流の影響を「磁極の集まり」と見なして、その影響を天井と底面に集約して、「磁極によって作られる場」を考えるのが $\vec{H}$ で、分子電流を側面に集約して、「表面電流によって作られる場」が $\vec{B}$ なのである。実際には分子電流が完全に均等に分布していない限り側面に集約することなどできない。実際にそこにある磁場は $\vec{H}$ でも $\vec{B}$ でも表現しきれない、複雑なものであるということを覚えておこう。



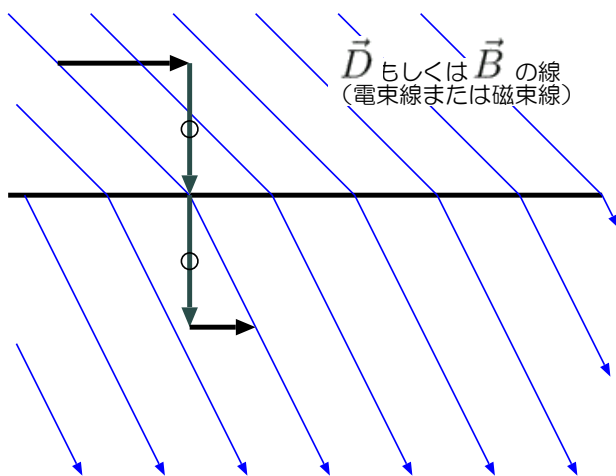
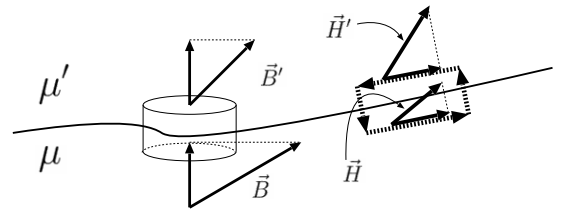
4.7 媒質が変わる場合の境界条件

途中で物質分布が変化する時、その両サイドでの電場・磁場の接続条件はどのようになるだろうか。ここまでで求められた静電場・静磁場に対する物理法則は $\text{div } \vec{D} = \rho$, $\text{rot } \vec{E} = 0$, $\text{div } \vec{B} = 0$, $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ である。ただしこの $\rho, \vec{j}$ はどちらも分極電荷や分子電流を含まない。とりあえず真電荷、真電流もない場合を考えると、「 $\vec{D}, \vec{B}$ は div が0」「 $\vec{E}, \vec{H}$ は rot が0」ということになる。

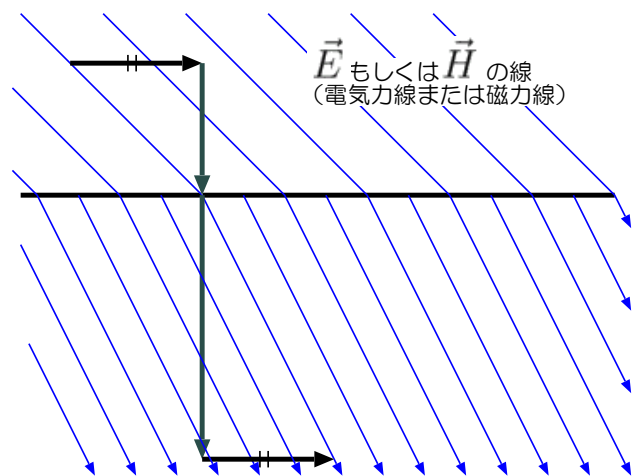
div が0になるようなベクトル場を考える。「 div が0」ということは「任意の閉曲面で出入りが0」ということなので、境界面をサンドイッチするように閉曲面をとれば、境界面を抜ける成分（法線成分）が接続される。よって、 $\vec{B}$ の法線成分が接続される。

rot が0になるベクトル場のばあいには、「任意の閉曲線での線積分が0」であるから、やはり境界面をはさむような閉曲面をとれば、境界と平行な成分（接線成分）が接続されることがわかる。よって、 $\vec{H}$ の接線成分が接続される。

つまり、 $\vec{D}, \vec{B}$ の法線成分と、 $\vec{E}, \vec{H}$ の接線成分が接続される（ただし、表面に真電荷や真電流がある場合はこの限りではない）。



div が0なので、この線は必ずつながる。
法線成分が同じになる。



rot が0なので、接線成分が同じになる。
境界面で線が増える。

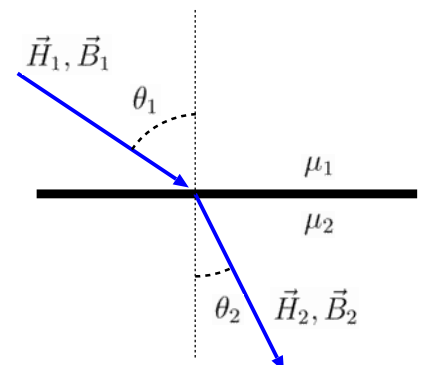
4.8 章末演習問題

★【演習問題 4-1】透磁率 μ で無限に長い磁性体円柱の周りに単位長さあたり n 巻きでコイルを巻き電流 I を流すと、磁性体内部にできる磁場と磁束密度はそれぞれどうなるか？

また、この時磁性体の磁化を、「磁性体の側面を流れている電流による」と解釈すると、この磁性体の側面を流れている電流（コイルを流れている電流は計算しない）はどれだけか。

★【演習問題 4-2】透磁率 μ_1 の磁性体と透磁率 μ_2 の磁性体が接触している。どちらの磁性体でも磁場と磁束密度は同じ方向を向いている。境界面には真電流は流れていない。

- (1) 境界面でつながっていくのは「磁力線 ($\vec{H}$ の線)」か「磁束線 ($\vec{B}$ の線)」か？
- (2) 磁力線の屈折の法則を作れ。
- (3) 磁束は、透磁率の大きい方に集まりたがるか、小さい方に集まりたがるか？
- (4) 光の屈折の場合、ある条件では「全反射」が起こった。磁力線の場合はどうか、考察せよ。



★【演習問題 4-3】無限に広がる透磁率 μ の磁性体に一様磁場 $\vec{H}$ （磁束密度 $\vec{B}$ ）をかけている。この磁性体に、幅 d の間隙（真空部分）を作った。間隙の境界の法線ベクトルは磁場と角度 θ をなす。間隙部分にできる磁束密度の強さと向きを求めよ。特に $\theta = 0$ の時と $\theta = \frac{\pi}{2}$ の時には磁束密度はどうなるか？

第5章 動的な電磁場——電磁誘導

ここまでは静電場、静磁場、つまり時間的に変動しない電磁場だけを相手にして考えてきた。以下では電場や磁場が時間的に変動すると何が起こるかを考えていく。一般に物理において静的な場合と動的な場合というのは全く違う様相を呈す。静的な場合には電場・磁場互いの関連は少なかったが、動的な場合ではこの二つが切っても切れぬ関係で結ばれていることがわかる。

ここまでの話（静電場・静磁場の話）をまとめると、以下の表のようになるだろう。

	源	方程式	力の式	ポテンシャル	ポテンシャルの式	関係
電場	電荷	$\text{div } \vec{D} = \rho$	$\vec{F} = Q\vec{E}$	V	$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$	$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$
磁場	電流	$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$	$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$ または $= \vec{I}\ell \times \vec{B}$	$\vec{A}$	$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

この表を見て、「磁場」が電流という「電荷の移動」によって生み出されていることからしても、変動する電場と変動する磁場が互いに影響し合うであろうことは想像できる¹。歴史的には、電流が磁場を作ることが発見されてから10年近くが経過した1831年、磁場の時間的変化が電場を発生させること確認されている。それが以下で述べるファラデーによる電磁誘導の研究である²。

5.1 ファラデーの電磁誘導の法則

ファラデーは「電流が磁場を作る。ではこの逆、磁場が電流を作ることはないのか？」という発想から数々の実験を行った。その結果ファラデーは「磁場があるだけでは電流を作らないが、磁場が時間的に変化すれば電流が流れる」ということを発見する。この現象を「電磁誘導」と呼び、この時流れる電流を「誘導電流」と呼ぶ。

ファラデーの実験によって得た結果はノイマンの手によって電磁誘導の法則としてまとめられている。電磁誘導の法則を説明する前に、「磁束」という量を定義しよう。これは磁束密度に対応する flux である³。

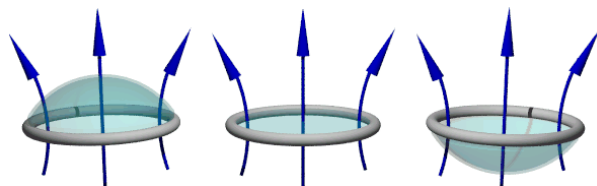
—— 磁束 Φ の定義 ——

磁束密度 $\vec{B}$ に、それに直交する面積ベクトルをかけて積分したもの、すなわち、

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (5.1)$$

を磁束と定義する。

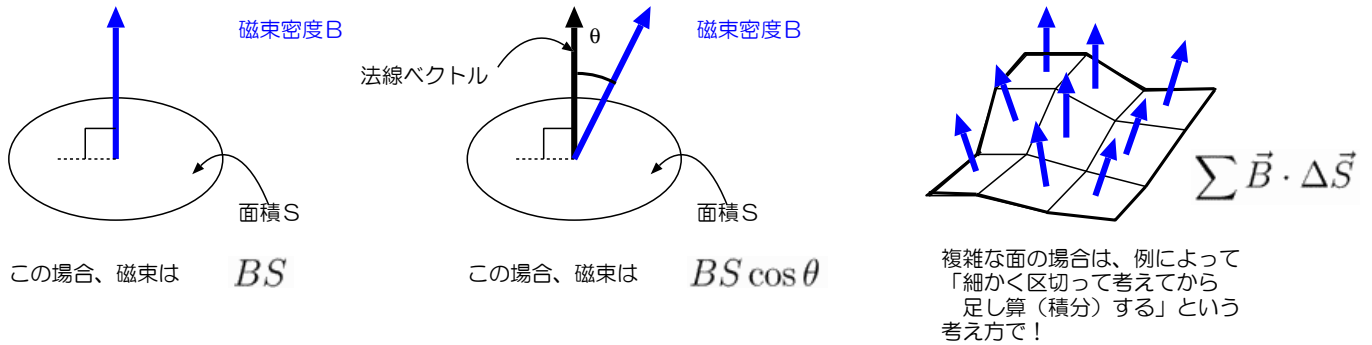
ある回路を考えた時、その回路が端となっているような面積を考えて、その面積上で磁束を計算する。これを「回路を貫く磁束」と表現する。同じ回路に対して面積 S の取り方はいろいろあるが、 $\text{div } \vec{B} = 0$ であるために端（回路）さえ固定しておけば同じ値を与える。



¹というのはもちろん「後知恵」なのであって、変動する電場と磁場が互いに影響し合うということのほんとうの意味がちゃんと理解され、体系立ててまとめられるのは、1820年に電流が磁場を作ることが発見されてから、1905年の特殊相対論の完成までかかった。

²実際にはその1年前にヘンリーも電磁誘導現象を確認している。

³言葉の意味から考えると、先に磁束を定義してから磁束密度が定義されるのが正しい。



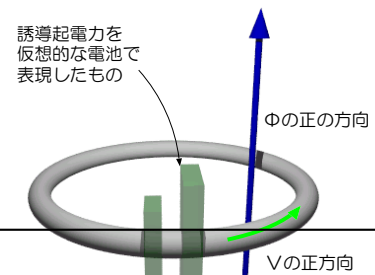
電磁誘導の法則は「回路を貫く磁束」を使って、以下のように表現される。

電磁誘導の法則

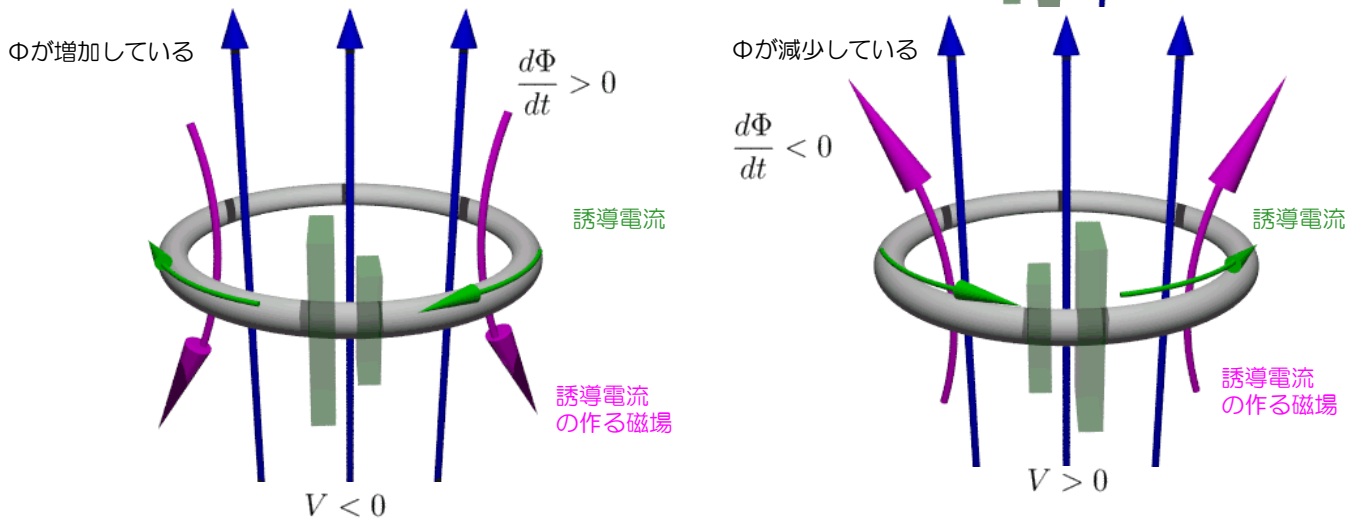
回路を貫く磁束が時間的に変化すると、磁束の時間微分と同じだけの起電力が発生する。

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.2)$$

この式の V の符号は、 Φ の正の方向に対して右ネジの方向に電流を流そうとする時正と定義する。よって、 Φ が増加している場合には Φ に対して左ネジの方向に電流を流そうとする方向に発生することになる。



この電位差を「誘導起電力」と呼ぶ⁴。

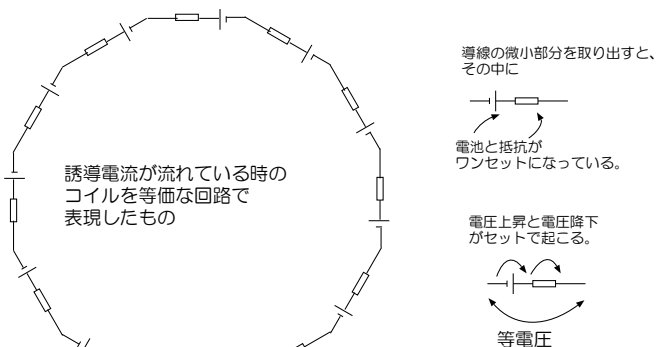


上の図に示したように、 Φ が増加すれば Φ の正の方向とは逆向きの磁場が発生し、逆に Φ が減少すれば Φ の正方向と同じ方向の磁場が発生する。こうして、誘導電流による磁場が足されることで、 Φ の変化が妨げられることになる。

なお、図の上では回路の一カ所に電池が存在しているかのごとく書いたが、実際には回路全体で一つの電池であるとみなさなくてはならない。あるいは、回路を構成する導線の微小部分一個一個が微小な電池なのである。

この回路を作る導線が一樣であり、全体の抵抗値が R ならば、この時（右ネジ方向を正として） $-\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$ の電流が流れることになる。ところがこの回路の各部分には抵抗であると同時に電池なのである。

このように円電流が流れている時「電位はどうなっているのだろうか？」と疑問に思う人がいるかもしれないが、右の図でわかるように、この回路ではどの部分



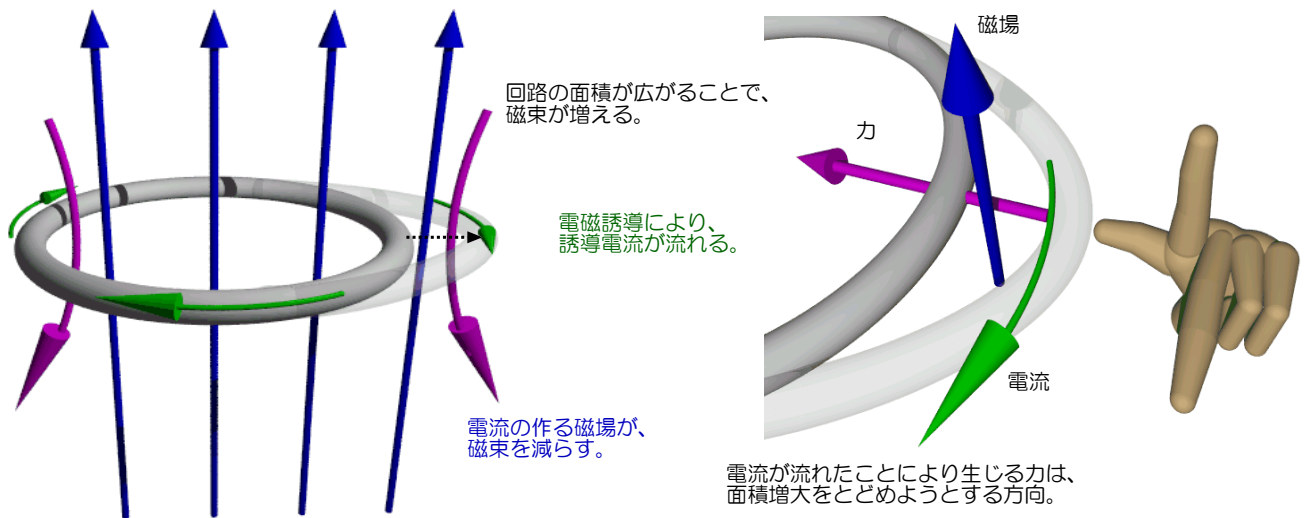
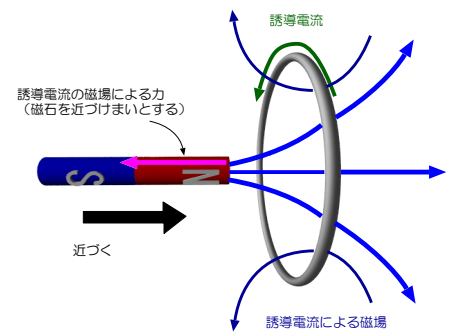
⁴ 「起電力」が力ではなかったのと同様、「誘導起電力」も力ではない。電位差である。

を取り出しても電磁誘導の起電力による電位の上昇と抵抗による電位の下降が同じだけ起こっていて、どこでも電位差はなくなっている。つまり回路上は等電位であると考えてよい（これは状況の対称性を考えてももっともな話である）⁵。

多くの場合誘導電流による磁場は元の磁場の変化を打ち消すには足りず、磁場は変化する（例外は超伝導状態になった物質で回路が作られている時。この場合は磁束の変化がちょうど打ち消され、回路内の磁束は変化できない）。

なお、この「変化を妨げる向きに電流が流れる」というのは磁束密度変化のみならず、他の状況についても言える。例えばコイルに磁石が近づいてくると、磁石のつくる磁場と逆向きの磁場を作るような誘導電流が流れる。この磁場による力は磁石を遠ざけようとする力（近づくことを妨げようとする力）を作り出す。逆に磁石を離す時は、離すまいとする引力が発生するのである。

また、回路が変形する場合も同様のことが言える。変形する回路に誘導電流が流れた時に回路に働く力は、変形を押しとどめようとする力になるのである。



以上の現象をまとめて、

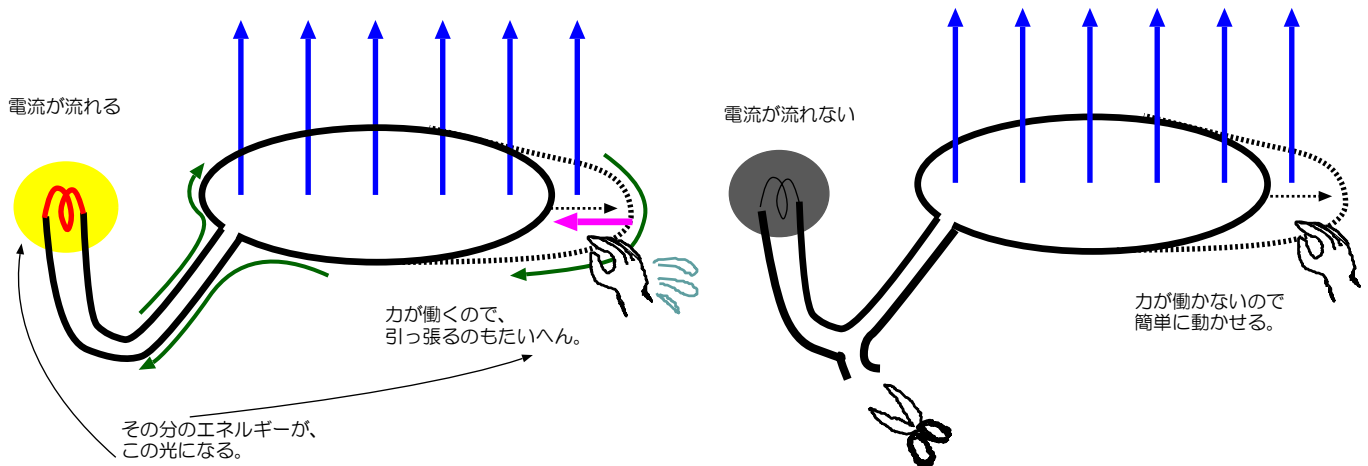
—— レンズの法則 ——

電磁誘導による起電力は、状態の変化を妨げる向きの電流を流そうとする。

と表現

する。「状態の変化を妨げる」の中には「磁束変化を打ち消す」はもちろん、「磁石が近づくのを妨げる」「回路の面積が増大するのを妨げる」などが含まれる。

この法則が成立することは、エネルギー保存の観点から納得することもできるだろう。誘導電流が流れない場合と流れる場合を比較した時、電流が流れる場合は誰か（何か）が電流を流すために必要なエネルギーを（仕事として）供給しなくては行けない。つまりそれだけ、「余計な仕事を増やす」方向に電流が流れるはずなのである。



⁵等電位であることが納得できればきたで、今度は「等電位なのに電流が流れるとは」という疑問が発生するかもしれない。それについてはこの後で述べよう。

一つ注意しておいて欲しいことは、この「起電力が発生する」という現象は、そこに導線による回路があるかないかとは無関係に起こる、ということである。そこに導線があるならば（つまり動くことができる電荷があるならば）、その起電力が電流という現象を起こす。だが、電流が流れない場合でも起電力すなわち電位差はあるのである（導線がつながれていない電池にも起電力はあるのと同じ）。

電磁誘導の法則は二つの物理現象を同時に表現していることに注意しなくてはならない。というのは「回路を貫く磁束が変化する時」には、二種類あるのである。磁束 Φ は $\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ であるから、磁束は「磁束密度 $\vec{B}$ が変化する」と「回路の形（面積）が変化する」の2通りの理由で変化することができる（もちろんこの二つが同時に起こることだってある）。

この二つは違う現象なのに、同じ法則で表現されているということは非常に面白い。こうなるのは、この二つの現象に共通の原理がその後ろに隠れているからである。その原理を追求していくとアインシュタインの特殊相対論へとたどり着く。この詳細については三年前期の「相対論」で勉強して欲しい。

以下で、この2種の現象それぞれについて分けて考察していこう。

5.2 導線が動く時の電磁誘導のローレンツ力による解釈

この節ではまず「導線が動く」場合の電磁誘導現象が、実は前章で考えたローレンツ力で生み出されていることを確認しよう。

電流が磁場から受ける力を導線内の電子の受けるローレンツ力と解釈することができたように、電磁誘導による起電力も、電子の受けるローレンツ力で解釈することができる。本質的な意味で電荷の受ける力は広義のローレンツ力 $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ で尽きている。電磁気現象で現れる力はすべてこれで解釈できるのである。

磁場中で導線（ただし、回路の一部ではなく、ただ導線があるだけの状況を考える）を動かすという思考実験を試みる。導線の中には電流のキャリア（金属の場合なら自由電子）がある。以下は金属の場合で考えよう。導線を動かすと、導線内の金属イオンも自由電子も動く。動いている電荷には磁場からの力が働く。しかし金属イオンの方は導線全体と同じ動きしかできない（でないと金属が破壊される）。電子の方は金属内部では動くことができるので、金属の中で一方向に偏ることになる（図参照）。

図による説明では磁場の方向、導線の方向、導線の運動方向という3つの方向が互いに垂直である場合について考えたが、そうでない場合では

$$V = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell} \quad (5.3)$$

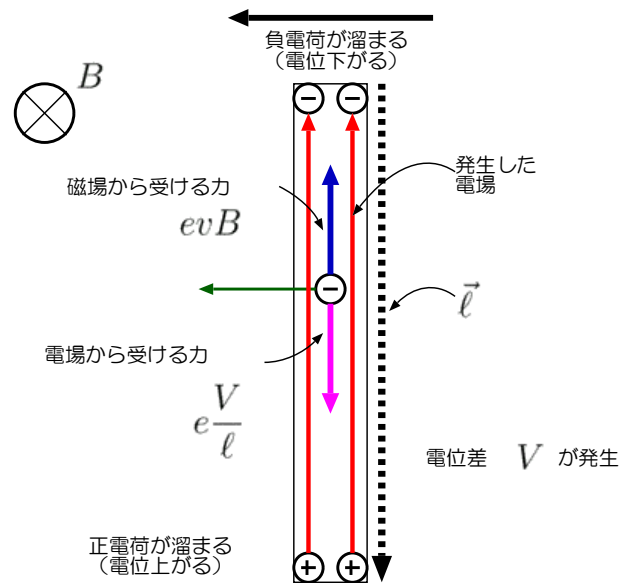
となる（運動速度 $\vec{v}$ と磁束密度 $\vec{B}$ の外積をとって、それと棒の長さ（向き）を示す $\vec{\ell}$ との内積をとる）。ただし、 $\vec{\ell}$ の向きは、電位が低い方から高い方へ向かうと定義した。この式は以下のようにして導出する。

まず、電子に働くローレンツ力は $-e\vec{v} \times \vec{B}$ である。この力にと、導体内にできた電場による力 $-e\vec{E}$ がつりあうので電子が動かないと考える（この時、 $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$ ）。一様な電場だと考えればこの電場に棒の端から端までを表す変位ベクトル $\vec{\ell}$ をかけると棒の両端の電位差が出る。すなわち、

$$V = -\vec{E} \cdot \vec{\ell} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell} \quad (5.4)$$

となる⁶。

こうして考えてみると、動いている導線に発生する誘導起電力というのは、ホール効果による起電力と本質的には違いがない（ホール効果の場合は伝導電流がきっかけであったが、電磁誘導の場合は導線の運動がきっかけなのである）。



⁶ $V = -\vec{E} \cdot \vec{\ell}$ にマイナス符号がある理由は、電場 $\vec{E}$ が電位の高い方から低い方へと向かうベクトルである一方、 $\vec{\ell}$ を電位の低い方から高い方へと向かうベクトルと定義したからである。二つのベクトルは逆向きなので、マイナス符号がつくことで V は正となる。

上では長さ ℓ の棒を動かす場合を考えた。次に、 $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ の式との関連を考えるために、回路の一部を変形する場合を考えてみよう。例によって回路を微小部分に分割する。素片 $d\vec{\ell}$ で表される素片が $\vec{v}$ の速度で動いたとすれば、その部分に発生する微小な起電力は

$$dV = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \quad (5.5)$$

である。ベクトル解析の公式 $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$ により⁷、

$$dV = (d\vec{\ell} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} \quad (5.6)$$

と書き直すことができる。

$d\vec{\ell} \times \vec{v}$ はまさに、 $d\vec{\ell}$ と $\vec{v}$ によって作られた微小面積を表すベクトル（大きさは面積を表現し、向きは面積の法線ベクトルを表現する）である。つまり、単位時間当たりの面積増加を表している。

右の図の場合、 $d\vec{\ell} \times \vec{v}$ は図の下向きを向く。磁束密度 $\vec{B}$ と内積を取ると負の値が出るが、それは上から見た時に時計回りの電流を流すということで、レンツの法則を満たしている。

この微小な起電力 dV を積分していくことで回路全体の起電力が計算できて、それは $\int d\vec{\ell} \cdot \vec{B}$ の単位時間当たりの増加と等しくなるというわけである。このようにして変形部分に $\vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt}$ という電位差が発生することがわかった。

誘導起電力が起こる例として、交流発電機を考えよう。簡単のため、一辺 a の正方形回路を考えて、この回路を磁場中で図のように回転させる。

この時、回路を貫く磁束は

$$\Phi = Ba^2 \cos \omega t \quad (5.7)$$

と書くことができる（ $\cos \omega t < 0$ の時は、回路の表から裏に向かう向きに磁束が貫いている）。

この回路に発生する起電力は

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = Ba^2 \omega \sin \omega t \quad (5.8)$$

となる。これがまさに交流電源による電圧である。発電所ではこの原理で交流電圧を作っている。

図のように回路に抵抗 R が接続されているとすれば、回路に流れる電流は

$$I = \frac{V}{R} = \frac{Ba^2 \omega}{R} \sin \omega t \quad (5.9)$$

である。抵抗で消費される電力は

$$IV = \frac{B^2 a^4 \omega^2}{R} \sin^2 \omega t \quad (5.10)$$

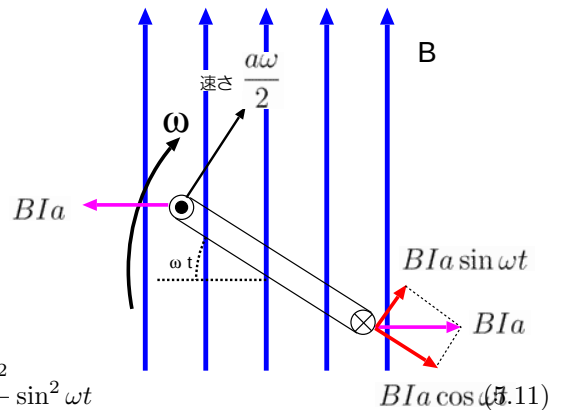
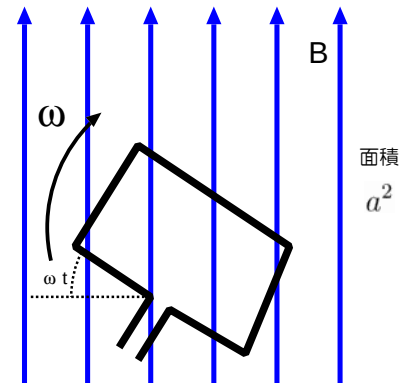
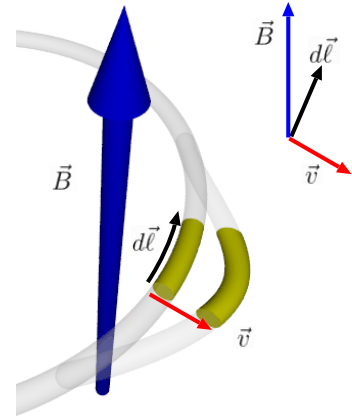
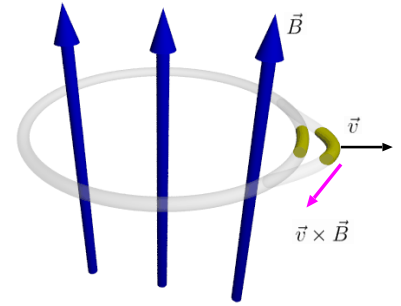
となる。

回路を一定角速度で回転させるために必要な仕事を考えよう。導線には $B I a$ の力が働くが、そのうち回転を妨げる方向の成分は $B I a \sin \omega t$ である。この力に抗する分だけの力を与えないと一定角速度の回転は続かない。

導線に対して行わなくてはならない単位時間当たりの仕事は（この力の働いている導線が2本あるから2倍することを忘れずに）、

$$B I a \sin \omega t \times \frac{a\omega}{2} \times 2 = \frac{B^2 a^4 \omega^2}{R} \sin^2 \omega t \quad (5.11)$$

となる⁸。これは電力とぴったり一致する（エネルギー保存則がちゃんと成立している）。



⁷ 3つのベクトル $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ の作る平行六面体の体積であると考えるとこの公式は納得できる。

⁸ 実際には力は導線に加えるのではなく、軸受けの部分に加えられるだろう。てこの原理により、加えるべき力は $B I a \cos(\omega t + \alpha)$ より大きくなる。しかし力学における仕事の原理により、仕事は等しい（力が大きい分、移動距離が小さくなっている）

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでください。

5.2.1 仕事をするのはいったい誰か？

ここで、ローレンツ力について説明した時に「ローレンツ力は仕事をしない」と述べたことを思い出し、「あれ、おかしいぞ」と疑問を持つ人がいるかもしれない。この導体棒に抵抗をつなぐと抵抗でジュール熱が発生するし、モーターをつないでおけば、それを通じて仕事をさせることができる⁹。誘導起電力の大本であるところのローレンツ力は仕事をしないはずであるのに、ローレンツ力の集合によって作られる誘導起電力による電流が仕事をできるとは、いったいいかなる理由なのであろうか？—という疑問が湧いてももっともなことである。

ここで、5.2節では導体棒に何かをつなぐということを考えておらず、それゆえに電流が流れていなかったことを思い起こそう。もし、適当な抵抗が接続されていて、電流が流れていたとしたらどう違いが現れるであろうか？

この場合、電子の運動は導体棒が動くことによる運動の他に、電流としての運動が加わる。導体棒の運動方向は棒と垂直なので、この方向の速度を $v_{\perp}$ と書き、電流としての電子の運動の速度を $v_{\parallel}$ と書くことにする。

電流が流れていない時の磁場からの力は $ev_{\perp}B$ で導線に平行な方向だが、電流が流れていると、これに加えて $ev_{\parallel}B$ の大きさに導線に垂直で運動を妨げる向きの力が加わる。電子は導線内は自由に動けるが、導線から外に出ることはできないので、導線の端で止まってしまう。こうしてホール効果の時と同様の現象が起き、導体棒の端が帯電し、その電場による力がちょうど磁場の力の導線に垂直な成分 $ev_{\parallel}B$ を打ち消すようになった時に導線内の電子は導線に沿って運動するようになる。

電子に仕事をしているのはこの電場による力の方である（やっぱり、磁場は仕事をしなかった！）。

この電場は、導体中にある正電荷（金属の場合であれば陽イオン）に、電子とは逆（つまり、運動方向と逆向き）の力を及ぼす。導体棒が（5.2節での仮定のように）等速直線運動するとしたら、誰か（何か）が棒に力を加え続けねばならない。電流によってなされる仕事の大本を作り出している（エネルギーを供給している）のは、この「誰か（何か）」なのである。

巨視的に見るならば、磁束密度 B の磁場中の長さ ℓ の導線に電流 I が流れていれば（ B, I は互いに直角とする）、その導線には磁場から $BI\ell$ の力が働く。その力を打ち消すだけの力を加えないと、棒は等速直線運動しない。棒が速さ v で磁場 B とも I とも垂直な方向に動いているとすれば、外部から単位時間あたり $BI\ell v$ の仕事を加えられているのである。

この仕事が電力を供給する（運動する導線は電池として働くことに注意せよ）とすれば、

$$BI\ell v = IV \quad (5.12)$$

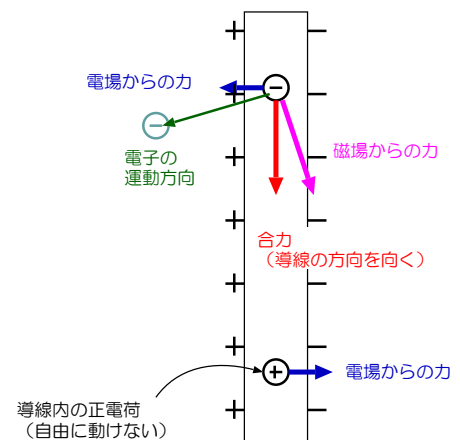
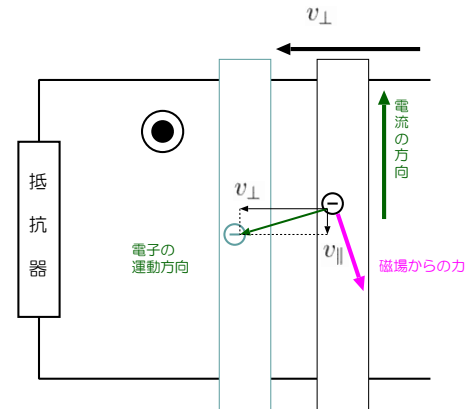
となって、よってエネルギーの収支の観点からも、起電力が $V = B\ell v$ となることを導けるのである。

【補足終わり】

5.3 磁束密度の時間変化と電場

電磁誘導の法則は二つの物理現象をまとめて表現しているが、ここまではその一方である「回路が変化する場合」についてのみ考えてきた。ここからは磁束密度が変化する場合を考える。その時でも、回路内を通る磁束が変化すると起電力が発生する。この時には、運動していない電荷にも力が働いているので、ローレンツ力の式 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ と照らし合わせて考えれば、そこに電場が発生していると考えなくてははいけない。つまり、磁束の変化と電場を関係づける物理法則が存在しているのである。これはここまではまだ導入していない、新しい物理法則である。

⁹話はずっと大がかりではあるが、我々が日常使っている「電気」はまさにこうして得られたものだ。発電所で誘導起電力を使って作られた電力を、各家庭で使っている。



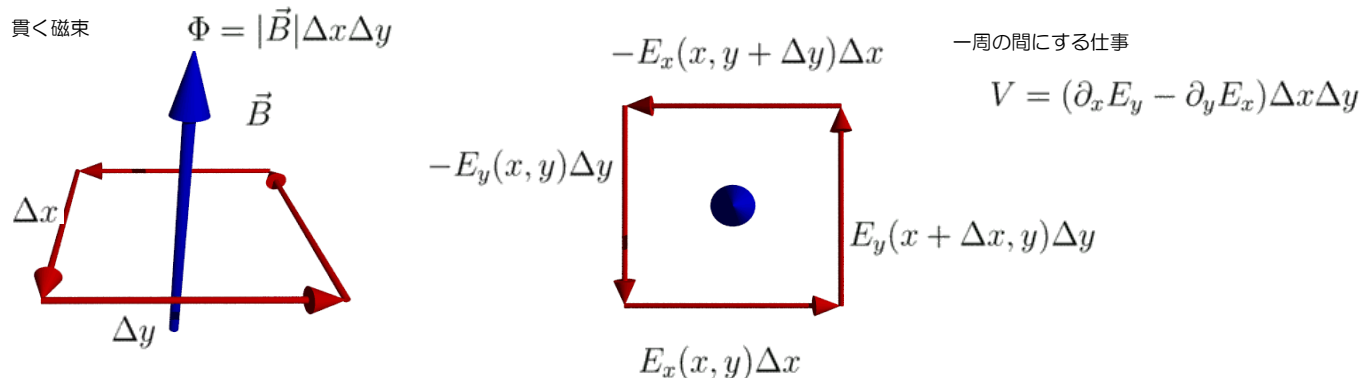
実験結果である $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ を前提として、その新しい物理法則はどのような式で表現されるのかを求めよう。

回路が静止している場合を考えている（つまりローレンツ力のような力は働いていない）。この場合には起電力 V は回路を一周する電場 $\vec{E}$ の線積分で定義できるだろう。一方、磁束の方は $\Phi = \int d\vec{S} \cdot \vec{B}$ のように面積積分で表される。ゆえに

$$-\int_S d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{x} \quad (5.13)$$

という計算が成立するのである¹⁰。 S が回路の内側の面積、 ∂S はその境界部分で、回路のある場所である。

この式を微小面積 dS に対して適用することで微分形の法則を出すことができる（これはアンペールの法則の積分形から微分形を出した時と全く同じ計算である。下の図参照）。



あるいはストークスの定理

$$\oint_{\partial S} d\vec{x} \cdot \vec{A} = \int_S d\vec{S} \cdot (\text{rot } \vec{A}) \quad (5.14)$$

を使って

$$-\int_S d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \int_S d\vec{S} \cdot (\text{rot } \vec{E}) \quad (5.15)$$

とした上で積分 $\int_S d\vec{S}$ をとっばらってもいい¹¹。どちらにせよ、

電磁誘導の法則の微分形

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.16)$$

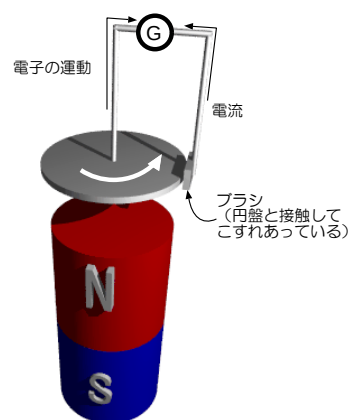
という

法則が作られる。こうして時間的に変動する磁場がある場合の物理法則が得られた。この法則は磁束密度の時間変化がない場合は $\text{rot } \vec{E} = 0$ という静電場でおなじみの法則に帰着する。

ここまでで、 $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ という法則の中にローレンツ力 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ と、新しい物理法則 $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ が含まれていることを見た。ではこの二つは $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ と等価なのかというと、そうではない。というのは電磁誘導の中には $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ では表すことができない現象があるのである。そういう意味で $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ は厳密にいつでも成立する物理法則ではないことに注意しよう。

$V = -\frac{d\Phi}{dt}$ が成立しない一つの例が単極誘導である。単極誘導はファラデーが作った世界最初の発電機でも使われている。

右図がその装置の概念図である。磁石の極のそばで円盤を回転させることで起電力を得る。円盤には中心から導線が出て、導線は導電性のブラシにつながり、円盤の外周に接触し、こすれあいながら円盤が回転する。回転の角速度を ω としよう。



¹⁰ Φ に対する時間微分が常微分 $\frac{d}{dt}$ だったのに、 $\vec{B}$ に対する微分が偏微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ になっていることを不思議に思う人がいるかもしれない。 $\vec{B}$ は場所と時間の関数 $\vec{B}(\vec{x}, t)$ であるのに対し、 Φ は面積積分の結果として定義されているので場所 $\vec{x}$ の関数ではない ($\Phi(t)$)。よって Φ に対する微分は偏微分で書く必要はない。

¹¹ 積分をとっばらってもいいのは、この法則が任意の面積 S に対して正しいことが確認されているからである。そうでないならば「積分して 0」と「積分する前から 0」は等価ではない。

5.4 自己誘導・相互誘導

コイルに電流を流すとその内部に磁場ができる。この磁場が変化すればコイルには起電力が発生する。つまり、自分に流れた電流の時間変化によってコイルの両端の電位差は変化する。この現象を「自分で自分に起電力を発生させる」という意味で「**自己誘導**」と呼ぶ。一方、複数のコイルが存在している時、あるコイルに流れる電流が変化すると別のコイルに誘導起電力が発生する。これを「**相互誘導**」と言う。

5.4.1 自己インダクタンスと相互インダクタンス

あるコイルの作る磁場の磁束密度は、どの場所でもコイルを流れる電流に比例する。よって、その磁場が別のコイルを通る磁束の大きさも電流に比例するだろう。磁束に対しても重ね合わせの原理が成立するので、一個めのコイルを通る磁束を Φ_1 と書くと、

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2 + M_{13} I_3 + \cdots \quad (5.20)$$

のように書ける。係数 $L_1, M_{12}, M_{13}, \dots$ はコイルの形から決まり、 L_1 すなわち「コイル1に流れる電流が自分自身を貫くように作る磁束を電流の強さで割ったもの」を「**自己インダクタンス**」と呼ぶ。 M_{12} は「コイル2に流れる電流がコイル1を貫くように作る磁束をコイル2を流れる電流の強さで割ったもの」であり、「**相互インダクタンス**」と呼ぶ（ M_{13} 以降の量も同様に定義する）。インダクタンスは磁束（単位 [Wb]）を電流（単位 [A]）で割ったものなので、その単位は [Wb/A] と表現されるが、特別に [H]（ヘンリー）¹² という単位を使う。

以上のように考えていくと、

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_1 I_1 + M_{12} I_2 + M_{13} I_3 + \cdots \\ \Phi_2 &= L_2 I_2 + M_{21} I_1 + M_{23} I_3 + \cdots \\ \Phi_3 &= L_3 I_3 + M_{31} I_1 + M_{32} I_2 + \cdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.21)$$

とコイルの数だけ式ができる。 i 番目のコイルに発生する起電力は

$$V_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -L_i \frac{dI_i}{dt} - M_{i1} \frac{dI_1}{dt} - M_{i2} \frac{dI_2}{dt} - M_{i3} \frac{dI_3}{dt} + \cdots \quad (5.22)$$

となる。 $M_{ii} = L_i$ という記号を使うことにすれば、 $V_i = -\sum_j M_{ij} \frac{dI_j}{dt}$ とまとめることもできる。

具体的に相互インダクタンスを計算してみよう。

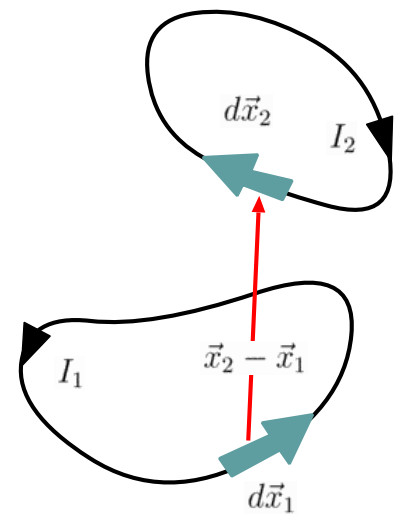
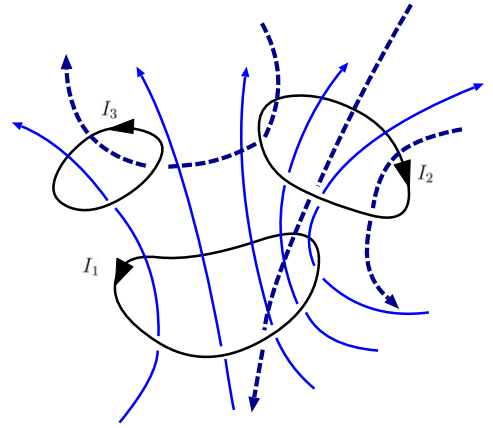
電流 I_1 が場所 $\vec{x}$ につくる磁束密度を $\vec{B}_1(\vec{x})$ としよう。電流 I_2 が流れる回路の内部を通る磁束を $\int_{I_2 \text{ 回路}} d\vec{S} \cdot \vec{B}_1$ と書くと、

$$M_{21} I_1 = \int_{I_2 \text{ 回路}} d\vec{S} \cdot \vec{B}_1 \quad (5.23)$$

である。これを計算するには、 $\vec{B}_1$ を求めなくては行けないが、その方法としてビオ・サバールの法則を使う方法と、ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を使う方法がある。ここでは両方で説明しよう。

まずビオ・サバールの法則を使うとすると、電流 I_1 によって作られる磁束密度 $\vec{B}_1$ に $\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \vec{x}' \frac{\vec{j}_1(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$ を代入すればよい。ただし、 $\vec{j}_1(\vec{x}')$ は電流 I_1 の電流密度である。さらに、前にも使った

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \quad (5.24)$$



¹²ヘンリーはファラデーとほぼ同時に電磁誘導を発見した物理学者。特に自己誘導現象はヘンリーの発見である。

という公式を使う¹³。以上より、

$$\begin{aligned} M_{21}I_1 &= \int_{I_2\text{回路}} d\vec{S} \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \vec{j}_1(\vec{x}') \times \left(-\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right) \right) \\ &= \int_{I_2\text{回路}} d\vec{S} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \int d^3\vec{x}' \frac{\mu_0 \vec{j}_1(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

となる。2行目では、 $\vec{\nabla}$ が $\vec{x}$ による微分なので $\vec{j}(\vec{x}')$ と順番を変えてもいいことと、外積の反対称性 ($\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$) を使った。この式を見ると、ベクトル場 $\int d^3\vec{x}' \frac{\mu_0 \vec{j}_1(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}$ の rot を取るという計算を行っている。実はこのベクトル場は電流密度 $\vec{j}_1(\vec{x}')$ によって作られるベクトルポテンシャルそのものである。これを $\vec{A}$ と書くことにすれば、この式は

$$\int_{I_2\text{回路}} d\vec{S} \cdot (\text{rot } \vec{A}(\vec{x})) \quad (5.26)$$

とまとめられる (もし「ベクトルポテンシャルを使って計算しよう」と思ったのであれば、この式から出発することになる)。続いてストークスの定理を使って $\int_{I_2\text{回路}} d\vec{S} \cdot (\text{rot } \vec{A})$ という面積分を、 $\int_{I_2} d\vec{x} \cdot \vec{A}(\vec{x})$ のような I_2 回路の線積分に直すと、

$$M_{21}I_1 = \int_{I_2} d\vec{x} \cdot \underbrace{\int_{I_1} d\vec{x}' \frac{\mu_0 \vec{j}_1(\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}_2 - \vec{x}'|}}_{=\vec{A}(\vec{x})} \quad (5.27)$$

となるが、 $\vec{x}'$ 積分は電流 I_1 のあるところ (すなわち、 $\vec{j}(\vec{x}')$ が 0 でない場所) でのみ意味があり、その点では $\int d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \rightarrow I_1 \int_{I_1} d\vec{x}_1$ と置き直すことができるので、

$$M_{21}I_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{I_2} \int_{I_1} d\vec{x}_2 \cdot d\vec{x}_1 \frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \quad (5.28)$$

となる。両辺を I_1 で割って

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{I_2} \int_{I_1} d\vec{x}_2 \cdot d\vec{x}_1 \frac{1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \quad (5.29)$$

となる。面白いことにこの式を見ると、 $M_{12} = M_{21}$ であることがわかる。つまり、「電流 I_1 が 1A の時にコイル 2 に作る磁束」と「電流 I_2 が 1A の時にコイル 1 に作る磁束」は等しいのである (これを「インダクタンスの相反定理」と呼ぶ)。

なお、自己インダクタンスについては、上で 1,2 としていた部分を同じ添字として

$$L_1 = M_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{I_1} \int_{I_1} d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}'_1 \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}'_1|} \quad (5.30)$$

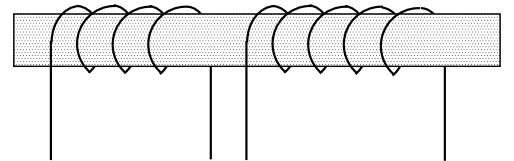
と積分すればよいのだが、この計算だと $\vec{x}_1 = \vec{x}'_1$ のところで発散してしまう。自己インダクタンスを発散なしに計算するには導線に太さを与えて、電流がある程度の広がりの中に存在するようにしてその電流密度 $\vec{j}_1(\vec{x})$ を考えて、

$$L_1(I_1)^2 = M_{11}(I_1)^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}_1 \int d^3\vec{x}'_1 \frac{\vec{j}_1(\vec{x}_1) \cdot \vec{j}_1(\vec{x}'_1)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}'_1|} \quad (5.31)$$

のように計算しなくてはいけない (自己インダクタンスの計算例は次の節)。現実的な電流は当然ながら「太さ」があるものだから、その太さを無視してしまった計算が発散することについては心配する必要がない (むしろそれを心配なくてよかった相互インダクタンスの場合は幸運であった)。

相互誘導を利用して、交流の電圧を変化させることができる。1本の鉄芯などに2本の導線を巻き付けてコイルを作る。このようにすると二つのコイルの両方とも、一巻き分を通過する磁束はほぼ一定となる。この一巻き分の磁束¹⁴を Φ_1 として、二つのコイルがそれぞれ N_1, N_2 回巻かれているとすると、コイルの両端の電位差はそれぞれ $-N_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$, $-N_2 \frac{d\Phi_1}{dt}$ となる。つまり、コイル1の電圧とコイル2の電圧は巻き数に比例する。これを使っ

て交流の電圧を変化させることができるのである。このような仕組みをトランス (変圧器) と言う。



¹³ この公式は、点電荷の作る電場と電位が $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ を満たすことを思い出せば、すぐに成立することが納得できる。

¹⁴ 実際には磁束に漏れがあるので、二つのコイルを通る磁束が完全に一致はしないだろうが、ここでは一致すると近似しておく。

.....

【FAQ】「電圧が上がるとことはエネルギーは保存しないのですか??」

もちろん、保存する。電流によって単位時間に送られるエネルギーは電力＝（電流）×（電圧）である。一次側に供給する電力が一定だとすると、二次側の電圧をあげる（具体的には二次側の巻数を大きくする）と電流が反比例して下がってしまうのです。こうして、トランスに一次側から供給される電力と二次側から取り出せる電力はエネルギー保存則を保つ。

.....

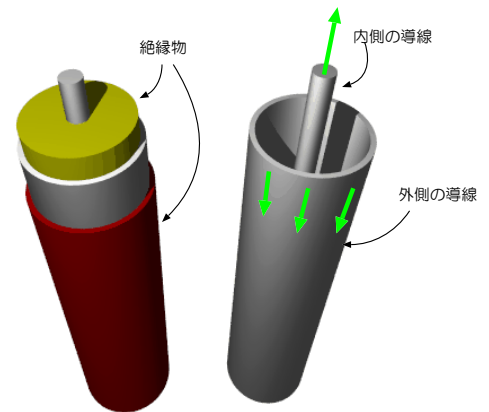
このようにして交流の電圧を変えることができることは、送電中の電気エネルギーの損失を小さくすることに役立っている。送電中は高電圧で送り電柱の上にある変圧器で電圧を落としてから家庭に電力を供給する。途中を高電圧にする理由は、同じ電力 IV を送るのであれば、 V を大きくして I を小さくした方が、送電線の抵抗によるジュール熱 $J = I^2 R$ （この R は途中の送電線の抵抗）を小さくできるからである。

5.4.2 同軸ケーブルの自己インダクタンス

円柱状の導線と、円筒状の導線を中心軸を合わせて組み合わせたものを同軸ケーブルと言う（通常、芯の部分と外側の部分の間には絶縁物を入れる）。この導線のそれぞれに逆向きに電流を流す。

内部の導線の半径を a 、外部の導線の内径を b 、外径を c としよう。電流 I を流すすると、電流密度は内部の導線では $\frac{I}{\pi a^2}$ 、外部の導線では $\frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}$ である。対称性から磁力線は軸を中心とした円の形になる。また、磁場の強さは軸中心からの距離 r のみの関数になるだろう。

以下でアンペールの法則を使って計算する。軸を中心に半径 r の位置での磁場の強さを $H(r)$ とすれば、この位置を一周した時の磁場の積分の値は $2\pi r H(r)$ となる。この値は内部に流れる電流に等しいが、その電流の値は



$$r < a \text{ の時 } \text{内部を流れる電流が } \frac{I}{\pi a^2} \times \pi r^2 = \frac{I r^2}{a^2}$$

$a < r < b$ の時 内部を流れる電流は I

$$b < r < c \text{ の時 } \text{内部を流れる電流は } I - \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \times \pi(r^2 - b^2) = I \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

$c < r$ の時 内部を流れる電流は 0

である。以下では、導線が非常に細いとして、 $a < r < b$ の部分だけが自己インダクタンスに関係するとして計算することにする。この範囲では磁場の強さは $H(r) = \frac{I}{2\pi r}$ であり、磁束密度は $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ である。

磁束密度から磁束を計算する。この場合、磁束密度は一定でないで、単に面積をかけるのではなく、積分が必要となる。長さ ℓ の部分を取り出して考えれば、

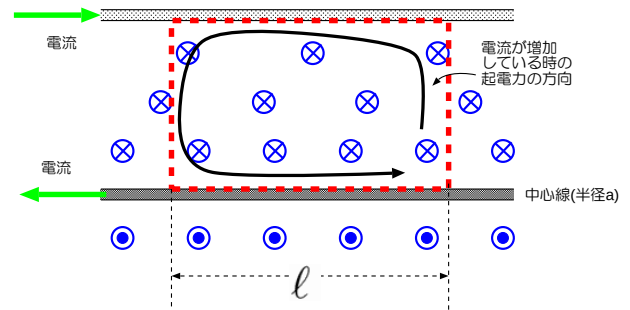
$$\Phi = \int_0^\ell dx \int_a^b dr B(r) = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} (\log b - \log a) \quad (5.32)$$

となるから、自己インダクタンスはこれを I で割って、

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \log \left(\frac{b}{a} \right) \quad (5.33)$$

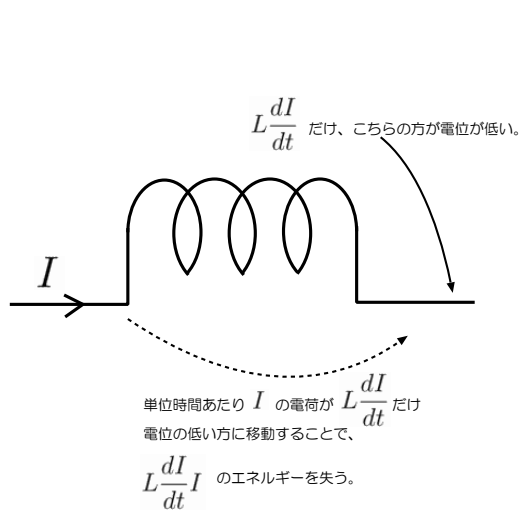
となる（ただしこの量は長さ ℓ あたりである）。

この自己インダクタンスにより、同軸ケーブルに流す電流を増加させようとする、それを妨げる起電力が発生することになる。たとえ導線に抵抗がなかったとしても、電流を流すにはエネルギーが必要なのである。こうなる理由の一つは、同軸ケーブル内部に発生する磁場のエネルギー（これがどのような式で書けるかは後述する）を供給してあげなくてはならないからである。ケーブルを同軸にすると、ケーブルの外での磁場が 0 になるので余計な磁場を作らなくてよい分、効率がよい¹⁵。



¹⁵外部に磁場が漏れないということは、ノイズを遮断できるという効果もある。

5.5 コイルの蓄えるエネルギー



自己インダクタンス L を持つコイルの両端の電位差は $L \frac{dI}{dt}$ となる。

ここに電流 I が流れれば、(電流) × (電位差) で $LI \frac{dI}{dt}$ の電力が消費されることになる。電力とはすなわち単位時間あたりに消費される電気的エネルギーであるから、これを時間で積分すればコイルが蓄えているエネルギーが計算できることになる。積分は簡単に実行できて、

$$\int LI \frac{dI}{dt} dt = \frac{1}{2} LI^2 + C \quad (5.34)$$

積分定数 C は(電流が流れていない時のエネルギーを 0 と考えて)通常 0 と取る。

相互インダクタンスに関係しても同じような計算ができる。相互インダクタンスが M である二つのコイルにそれぞれ I_1, I_2 が流れているとすれば、この二つにそれぞれ $M \frac{dI_2}{dt}, M \frac{dI_1}{dt}$ の電位差が発生するので、必要な電力は $MI_1 \frac{dI_2}{dt} + MI_2 \frac{dI_1}{dt}$ であり、これを積分すれば、

$$\int \left(MI_1 \frac{dI_2}{dt} + MI_2 \frac{dI_1}{dt} \right) dt = MI_1 I_2 \quad (5.35)$$

というエネルギーを持つことになる(積分定数は 0 とした)。

まとめると、

$$\frac{1}{2} \sum_i L_i (I_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij} I_i I_j \quad (5.36)$$

となる(第2項に $\frac{1}{2}$ がついてるのは、和を取ると $M_{12} I_1 I_2$ と $M_{21} I_2 I_1$ というふうに、同じものが2回現れるからである)。

前節で説明したトランス(変圧器)の場合、電流は周期的に変動するから、このエネルギーも振動することになるが、その平均は一定を保つ。つまりトランスを出入りするエネルギーは長期的に見れば保存することになる。

このエネルギーの書き方は「エネルギーはコイルを流れる電流が持っている」という考え方だが、「エネルギーは磁場が持っている」という考え方をすることもできる¹⁶。(5.36)を、

$$\frac{1}{2} \sum_i \left(L_i (I_i)^2 + \sum_{j \neq i} M_{ij} I_j \right) = \frac{1}{2} \sum_i I_i \left(L_i I_i + \sum_{j \neq i} M_{ij} I_j \right) = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i \quad (5.37)$$

と書き直す。ここで、

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \int_{\text{回路 } i \text{ に囲まれた面}} d\vec{S} \cdot \vec{B} \quad \left. \vphantom{\int} \right\} (\vec{B} = \text{rot } \vec{A}) \\ &= \int_{\text{回路 } i \text{ に囲まれた面}} d\vec{S} \cdot (\text{rot } \vec{A}) \quad \left. \vphantom{\int} \right\} (\text{Stokes の定理}) \\ &= \int_{\text{回路 } i} d\vec{x} \cdot \vec{A} \end{aligned} \quad (5.38)$$

という変形を行う。これで、 $\frac{1}{2} I_i \Phi_i = \frac{1}{2} I_i \int_{\text{回路 } i} d\vec{x} \cdot \vec{A}$ となるわけだが、この線積分 $I d\vec{x}$ は $\vec{j} d^3 \vec{x}$ に置き換えることができる。こうして、コイルの持つエネルギーは

$$\frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} \vec{j} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} (\text{rot } \vec{H}) \cdot \vec{A} \quad (5.39)$$

となる。ここで $\vec{j} = \text{rot } \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$ を使った。さらにベクトル解析の公式

$$\text{div} (\vec{V} \times \vec{W}) = \vec{V} \cdot (\text{rot } \vec{W}) - (\text{rot } \vec{V}) \cdot \vec{W} \quad (5.40)$$

¹⁶数式の表現上で、エネルギーが何に分布しているかは選択の余地がある。エネルギーはもともと「仕事によって増減する量」と決められているから、仕事とエネルギーの出入りの関係がちゃんとあっていれば、何がそのエネルギーを持っていたとしても定義には反しない。

を使うと、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int d^3\vec{x} (\text{rot } \vec{H}) \cdot \vec{A} &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \vec{H} \cdot (\text{rot } \vec{A}) - \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \text{div} (\vec{H} \times \vec{A}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \vec{H} \cdot \vec{B} + (\text{表面項})\end{aligned}\quad (5.41)$$

を得る¹⁷。表面項を無視すれば、 $\frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \vec{H} \cdot \vec{B}$ が磁場の持つエネルギー密度の式である。この式は電場のエネルギーの式 $\frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \vec{D} \cdot \vec{E}$ に非常に良く似ている。

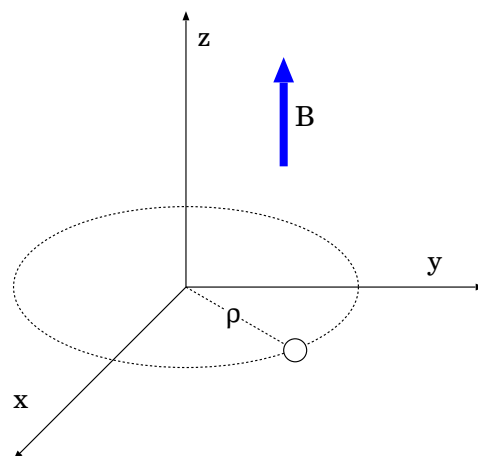
電気力線と磁力線には「短くなろうとする」「混雑を嫌う」という共通の力学的性質があった。その共通の性質は、エネルギー密度の式の共通性につながっていることは言うまでもない¹⁸。

このエネルギー密度が $\frac{1}{2} \vec{j} \cdot \vec{A}$ という形をしていて、前に出てきたベクトルポテンシャル内の電流の持つ位置エネルギー密度 $-\frac{1}{2} \vec{j} \cdot \vec{A}$ と違うことを不思議に思う人がいるかもしれない。この違いはどこから来るかというと、 $-\frac{1}{2} \vec{j} \cdot \vec{A}$ の方はすでに存在している電流を外部から持ち込む時のエネルギー（同行電流は引き合うので、このエネルギーはマイナスになる）なのに対し、 $\frac{1}{2} \vec{j} \cdot \vec{A}$ の方は電流を作るのに必要なエネルギーも含んでいるのである。

従って、上のような「電流を流す時に注ぎ込まなくてはいけないエネルギーはいくらか」という問題には $\frac{1}{2} \vec{j} \cdot \vec{A}$ を使わなくてはならないが、「(既に存在している) 電流と電流の間にどんな力が働くか」という問題の時は $-\frac{1}{2} \vec{j} \cdot \vec{A}$ を使わなくてはならない。混乱しやすいところなので間違えないこと。

5.6 章末演習問題

★【演習問題 5-1】 z 軸方向を向いた磁場中で電荷 q を持った荷電粒子が運動している。円筒座標で考えて、粒子は $z = 0$ を中心にして半径 ρ の等速円運動をしているものとする。磁束密度の大きさ $B(\rho, t)$ は時間 t と z 軸からの距離 ρ の関数となっているとする。時刻 $t = 0$ になるまで、 $\vec{B}$ は一定であった。



- (1) $t = 0$ における粒子の円運動の速度はいくらか。
- (2) 荷電粒子が回っている半径 ρ の円を「回路」と見なすと、この回路を通る磁束 $\Phi(t)$ はどれだけか。 $B(\rho, t)$ を使って表せ。
- (3) 磁束密度 $B(\rho, t)$ が時間的に増加したとする。この時荷電粒子にはどのような力がどれだけかかるか。
- (4) 粒子の速度が増加するに従って、その場所の磁束密度 $B(\rho, t)$ も増加する。粒子が半径 ρ の円運動を続けるためには、 $\Phi(t)$ と $B(\rho, t)$ がどんな関係を満たせばよいか？

(このようにして一定半径の円運動をさせながら粒子を加速する器械を「ペータロン」と言う。 $\Phi(t) = \pi \rho^2 B(\rho, t)$ ではないことに注意せよ)

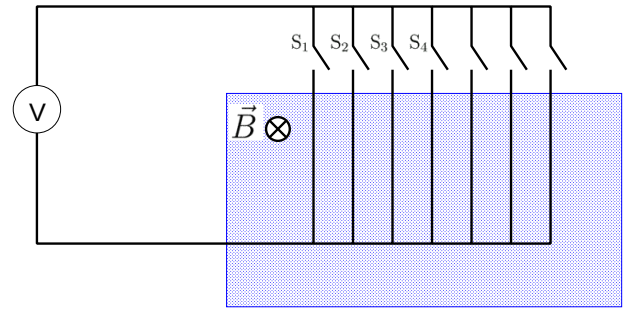
★【演習問題 5-2】 導体は静電場を遮蔽するので、銅の板を使って電場を遮ることはできる。これに対して、静磁場は銅の板では全く遮ることはできない。しかし、静磁場ではなく、素早く時間変化する磁場であれば、銅の板で（完全に遮ることはできないが）変化を弱めることはできる。なぜかを説明せよ。

¹⁷ 「表面項」とは $\int d^3\vec{x} \text{div} (\text{なんとか})$ の形の項のこと。ガウスの定理により、これは積分範囲の表面での積分に直せる。よって積分の端（無限遠とする事が多い）で（なんとか）が 0 になるならばこの項は無視できる。

¹⁸ これら二つの式が真空中では $\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2, \frac{\mu_0}{2} |\vec{H}|^2$ と、バネのエネルギー $\frac{k}{2} x^2$ と似た形になっているのも、もちろん偶然ではない。電気力線や磁力線のゴム紐のような性質からくる。

★【演習問題 5-3】

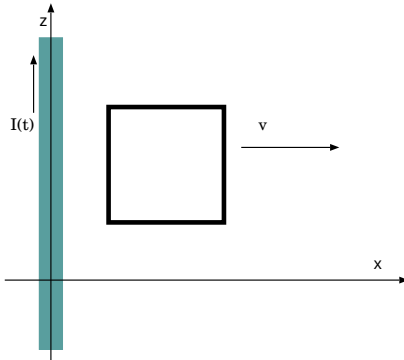
図のように一様な磁場に対して垂直な面上に回路が作られている。まず、この回路のスイッチの S_1 を閉じる。続いて S_1 を開いてすぐ S_2 を閉じ、さらに S_2 を開くとすぐに S_3 を閉じる。このようにすると回路内の磁束はどんどん増加していく。この時、この回路には起電力が発生するか???—発生するとしたらどのように発生するのか、発生しないとしたら磁束が増加しているのに起電力が発生しないのはなぜか、説明せよ。



★【演習問題 5-4】

z 軸上に張られた無限に長い直線導線に電流 $I(t)$ が流れている。一辺 a の正方形一巻きコイルを zx 平面上に置き、 x 軸方向に速さ v で運動させた。コイルの左側の導線の x 座標を r とした時、このコイルにはどのような起電力が発生するか?—実際には電流が時間的に変化した時、磁場 H の強さの変化は少し遅れることになるが、ここではそれを無視して $H = \frac{I(t)}{2\pi r}$ の式が成立するものとして計算せよ。

(註：磁場が伝わる速度を c とすると、ほんとうは $H = \frac{I(t - r/c)}{2\pi r}$ とするのが正しいが、ここでは r/c を小さいとして無視して計算することにする。この時回路に発生する起電力には、二つの原因があることに注意)



第6章 変位電流とマックスウェル方程式

ここまで作った電磁気学の基本方程式を考えてきたが、実は最後にもう一つの修正を行う必要がある。それによって「マックスウェル方程式」が完成する。

6.1 変位電流

6.1.1 マックスウェルによる導入

電磁誘導の法則は

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.1)$$

と書け、アンペールの法則は

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad (6.2)$$

と書ける。文章では

電磁誘導の法則「単位電荷を磁束の周りに（磁束に対して左ネジの向きに）一周させると、その時電場が電荷にする仕事は磁束の時間変化と等しい」

アンペールの法則「単位磁極を電流の周りに（電流に対して右ネジの向きに）一周させると、その時磁場が磁極にする仕事は電流と等しい」

と表現される¹。

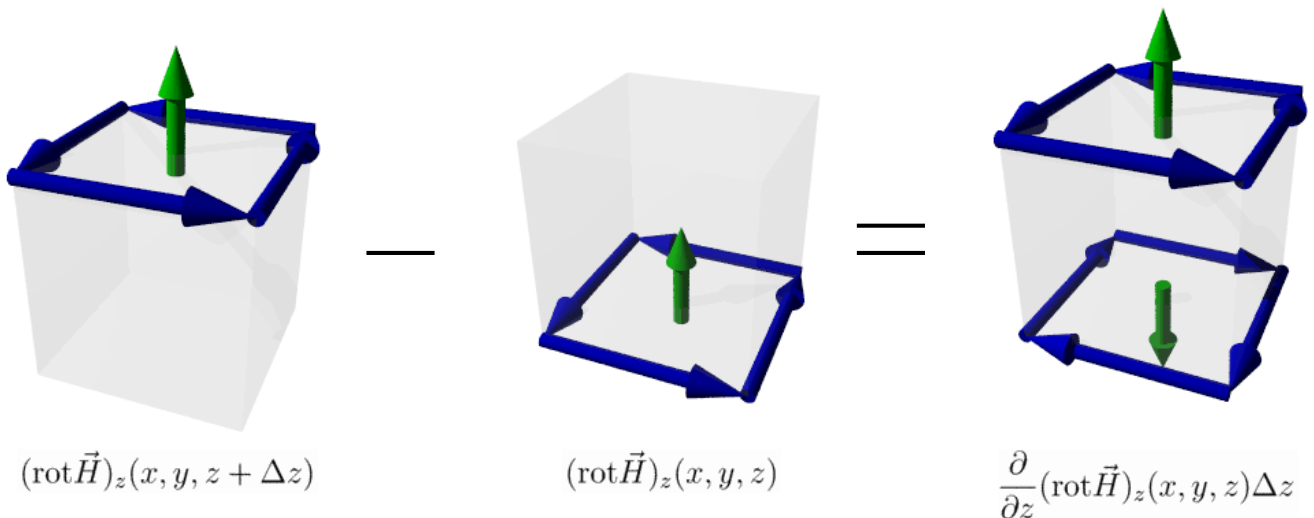
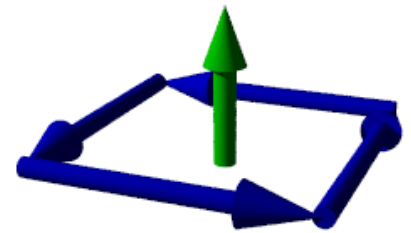
また、電場と磁場に対するガウスの法則は

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (6.3)$$

であった。1865年、マックスウェルは上の方程式が矛盾を含むことに気づく²。

マックスウェルが問題としたのは $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ である。この式を図で表現したものが右上の図である。微小面積をまわりながらの $\vec{H}$ の積分が、その微小面積を通る電流に等しい。

この両辺の div を取る。特に z 微分の項 $\left(\frac{\partial(\text{rot } H)_z}{\partial z}\right)$ を図示すると以下ようになる。



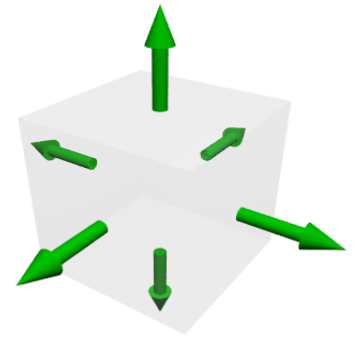
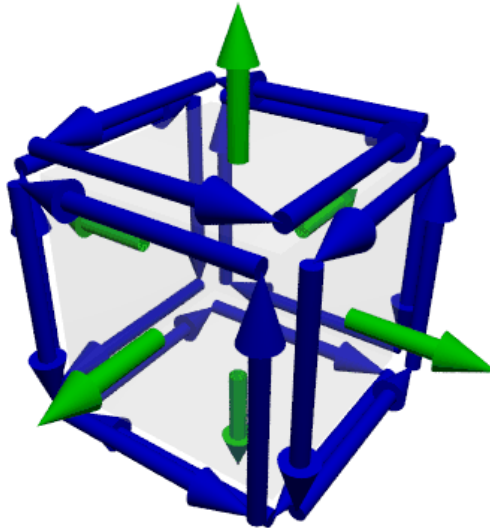
¹軸となるベクトル量に対して右ネジの向きの回転を正と取るのが物理における一般的約束であるので、左ネジ方向で定義されている電磁誘導の法則の数式表現にはマイナス符号がつく。

²正確に言うと、マックスウェルの使っていた式は上の式より少々ややこしい。現在使われているいわゆる「マックスウェル方程式」は後にヘヴィサイドたちが整備したものである。

div は x, y, z の3方向の微分の和であるが、そのうち z 方向の微分を表現したのが上の図である（引き算をベクトルを逆向きにして足すことで表現した）。3方向全部を足すと次の図のようになり、 $\text{div}(\text{rot } \vec{H}) = 0$ が結論できる。

$$\begin{aligned} & \text{div}(\text{rot } \vec{H}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\text{rot } \vec{H})_x \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}(\text{rot } \vec{H})_y \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(\text{rot } \vec{H})_z \end{aligned}$$

Hの線積分が互いに
消し合って0になる→



では、 $\text{div } \vec{j} = 0$ なのか??

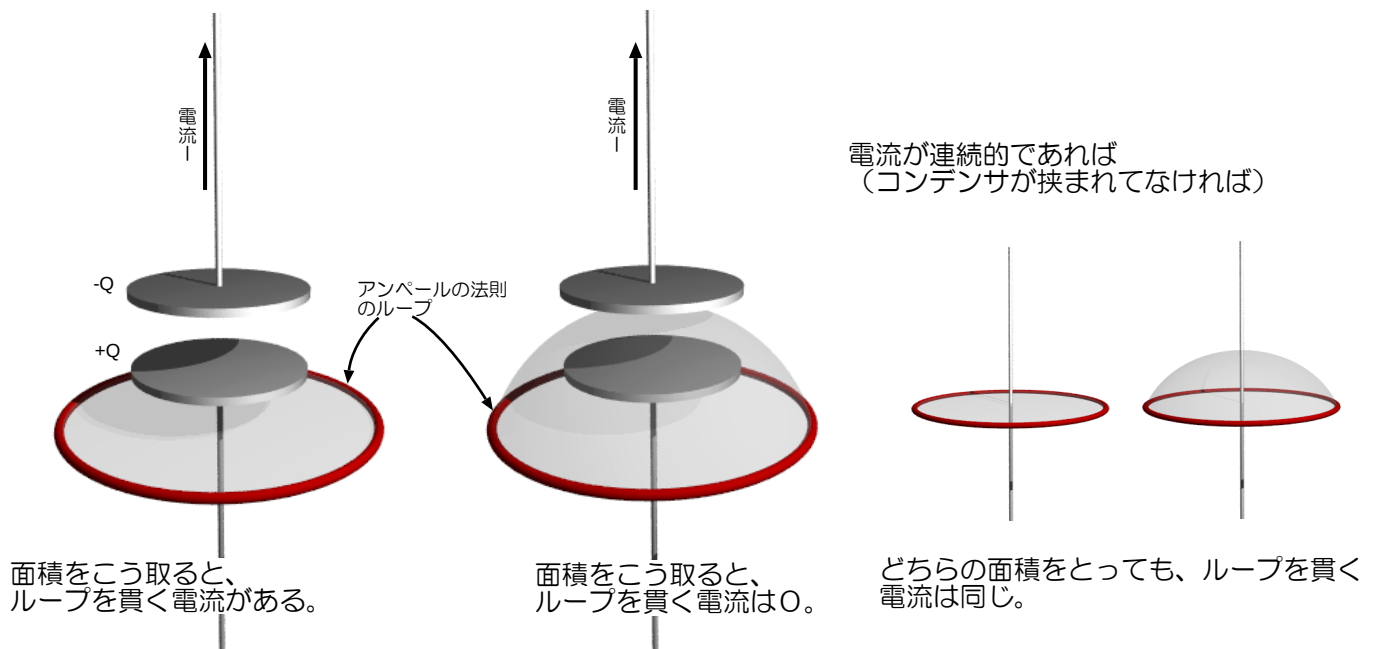
rot の div は0であるから $\text{div}(\text{rot } \vec{H}) = 0$ であるのだが $\text{div } \vec{j}$ は0ではない。今考えている「箱」の中にある電荷が変化しないのであれば $\text{div } \vec{j} = 0$ なのだが、例えば箱内の電荷が減っているのであれば、その分だけ外に出て行ってもいいことになる。

つまり、電流密度の div をとると、

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (6.4)$$

でなくてはいけない。この式の左辺は「考えている微小体積からどれぐらい電荷が外へ流れ出していくか」を表している。当然、電荷が流れ出せば、その中の電荷密度は減少する。その減少が右辺である（マイナス符号がついているので、 ρ が減少している時に正になる）。この式は「連続の式」と呼ばれ、電荷の保存則を表現している³。

この数式上の矛盾点は、以下のような物理現象の考察にも現れる。



長い直線電流の一カ所をカットして、そこにコンデンサをはさむ。コンデンサの極板間の電場は外に漏れないものとしよう。

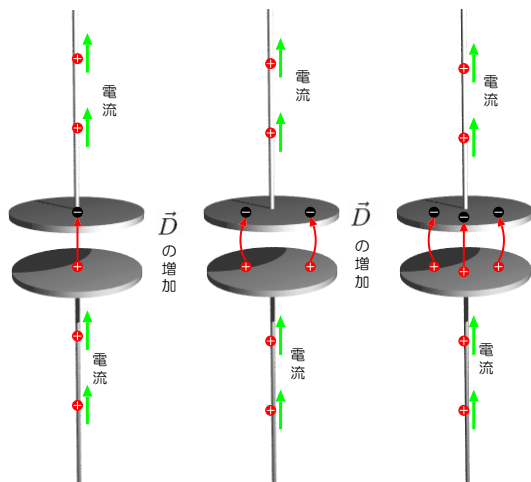
アンペールの法則は積分形で表現すると、「磁場 $\vec{H}$ の線積分はその線を境界とする面積を貫く電流に等しい」という

³ $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ に関して同様の計算をすると、左辺はやはり消える。右辺は $\frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \vec{B})$ となるが $\text{div } \vec{B} = 0$ なので0となり、こちらの式は問題ない。

ことになるが、このコンデンサの極板の間には電流は流れていない。

そのため、同じループでも面積の取り方を変えると答が変わるという困った結果を生む（これでは安心してアンペールの法則を使えない）。

そこでこの法則を修正して、この状況でも適用できるようにしたい。



極板間には確かに電流は流れていないが、そこにある電場（あるいは電束密度）が時間的に変動していることにマクスウェルは気づいた。しかも、コンデンサの極板間にある電束⁴はコンデンサにたまっている電荷に等しいから、電束の時間微分は（コンデンサ外部への漏れはないものとすれば）電流に等しくなる。

つまり、実際には極板間に電荷が動いているわけではないが、その代わりに「 $\vec{D}$ が増加している」ということを電流の代わりとみなす。

そこでマクスウェルはアンペールの法則 $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ を修正した。よく考えてみると、アンペールの法則が実験的に確認されているのは静磁場の場合である。だから、電場や磁場が時間変動している時に正しい式である保証は元々ない。そこでこの部分を修正する必要があるのである。

マクスウェルは、 $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ の右辺に div をとった時に $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ になる項を付け加えることで矛盾を解消した。 $\text{div } \vec{D} = \rho$ であるから、付

け加えるべき式は $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ である。

すなわちマクスウェルはアンペールの法則からくる方程式を

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} \\ &\downarrow \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.5)$$

と修正したのである。この付加項 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ は「**変位電流** (displacement current)」と呼ばれる⁵（「電束電流」と書いている本もある）。この式がなければ実験を正しく説明できない。それどころか、電磁気学が矛盾した体系になってしまう。

真空中の場合を考えて変位電流を導入しない場合の電磁気の法則の数式を並べて見てみると、

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= 0 & \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 & \text{rot } \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

となって、明らかに対称性が悪い。電場の rot に磁場の時間変化が現れるなら、磁場の rot には電場の時間変化が現れてもよさそうである。上記物理的考察から $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ が追加されたことで、電磁気の方程式は対称性を保ったきれいな形にまとまったことになる⁶。

電磁場の基本法則は以上で完結し、

—— マクスウェル方程式 ——

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= \rho & \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.7)$$

が電磁気学の基本法則となる⁷。

これに、物質中での関係式である $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$ を加えれば、電磁気学で必要な量は全て計算できる⁸。

⁴磁束同様、電束密度 $\vec{D}$ を面積積分することで定義される。

⁵電流ではないが、電束密度の変化が電流と同じ役目をする、ということを表現した名前である。実際にはもちろん、電荷が移動しているわけではないので誤解しないように！

⁶ほんとに対称だというなら、磁極や磁流も入れるべきだ、という考え方もあるが、単磁極（モノポール）はまだ見つかっていない。

⁷既に述べたように、これらの式はヘヴィサイドらが整理したものである。

⁸電流の保存則 $\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ は、すでにマクスウェル方程式の中に含まれている。これに付け加えるとしたらローレンツ力の式 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ だろう。

本質的な電磁場は $\vec{E}, \vec{B}$ であり、 $\vec{D}, \vec{H}$ は媒質の $\vec{P}, \vec{M}$ の影響を繰り込んだものである、と考えることにして、基本的な場は $\vec{E}, \vec{B}, \vec{P}, \vec{M}$ であるとするならば、マクスウェル方程式は、

— $\vec{E}, \vec{B}, \vec{P}, \vec{M}$ で書いたマクスウェル方程式 —

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} &= \rho - \operatorname{div} \vec{P} & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} &= \vec{j} + \operatorname{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.8)$$

と書け

る。 $\rho - \operatorname{div} \vec{P}$ は分極によって生じた電荷を含めた電荷密度であるし、 $\vec{j} + \operatorname{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ は磁化と分極の時間変化によって生じる電流も含めた電流密度である⁹。分極の時間微分が電流に対応することは、分極は正電荷と負電荷の移動によって起こることを考えればわかる。

【補足】 この部分は授業では話さない可能性もあるが、その場合は読んでください。

6.1.2 変位電流は磁場を作るか？

変位電流はアンペールの法則がどのような状況でも満足されるように、という要求から導入される（と考えるとよい）ことをすでに述べた。ここで、磁場を求める方法としてはもう一つ、「ビオ・サバールの法則」があったことを思い出そう。こちらの方はどうだろう？—ビオサバールの法則にも電流が現れているが、これはやはり「電流+変位電流」に置き換えておくべきなのであろうか？

ここで一つ注意しておかなくてはいけないことは、ビオ・サバールの法則は本来「定常電流による定常磁場」を求めるための法則だということである。だから、電流が時間的に変化している場合に適用してはいけない¹⁰。したがって、変位電流が時間変化している場合にビオ・サバールを使ってはいけないことは当然である。

電束密度 $\vec{D}$ は変化してもよい。しかし、その時間微分であるところの $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ は変化してはいけない（平たく言えば、 $\frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0$ ということだ）。以下ではそのような場合だけを扱うことにする。

結論を言うと、ビオ・サバールの法則の中に変位電流の項を付け加える必要はない。一つの実例でそれを示そう。

$z = -\infty$ から $z = 0$ まで、 z 軸上を正の方向に電流 I が流れていくとする。原点で電流が止まる。ということは、原点にある電荷が単位時間あたりに I ずつ増えていくということである。 $t = 0$ で電荷がたまっていなかったとして、原点に $Q = It$ の電荷があると考えよう。それによって作られる電束密度は、

$$\vec{D} = \frac{It}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad (6.9)$$

である。

ここで、厳密には時刻 t において電荷が It だからと言って、距離 r 離れた場所に作られる電場は上の式の通りではないことを注意しておこう。というのは、電荷の変化に応じて電束密度が変化するにも時間がかかると考えられるからである¹¹。ここではその影響を無視して考える。よって、変位電流

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{I}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad (6.10)$$

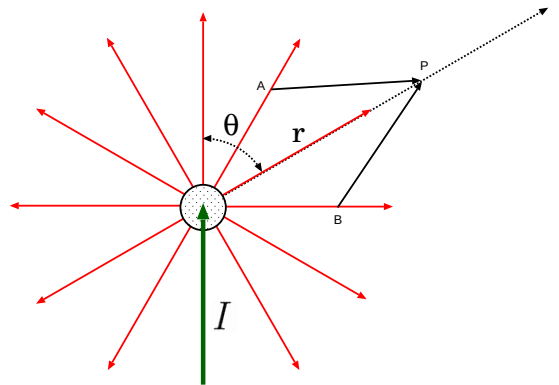
が空間に分布していると考え。もし、ビオ・サバールの法則に変位電流を入れるとすると、

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \vec{x}' \frac{\left(\vec{j}(\vec{x}') + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}(\vec{x}') \right) \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (6.11)$$

⁹ $\vec{D}$ を「電気変位 (electric displacement)」とも呼ぶ。昔は真空も一種の誘電体で、分極を起こすようなものだと考えられていた。「物質の分極+真空の分極」が $\vec{D}$ だったのである。「電気変位」も「変位電流」も、真空が誘電体だと考えられていたことの名残である。

¹⁰ 適用すると何が困るという、電流の変化が全く遅延なく離れた場所の磁場の変化を生むことになる。これは超光速現象であり、相対論的に考えると因果律が危ない。本当はこういう場合には遅延ポテンシャルという方法を使って解く必要がある。

¹¹ 後で示すが、電束密度の変化は真空中ならば光の速度で伝わる。日常的に考えれば速いが、有限の速度である。



という形になるだろう。しかし、この変位電流の項は常に0になるのである。図の点Pに変位電流が磁場を作ると考えてみよう。電荷からPまで延ばした線（図の点線）に関して対称な点AとBを考える。この2カ所にある変位電流の大きさは対称性から等しく向きが違う。外積をとることで $\frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')$ がちょうど逆符号となる。つまり点Aの変位電流による磁場と点Bの変位電流による磁場は消し合ってしまう。他の全ての点において同じことが言える¹²ので、全空間で $\vec{x}'$ 積分を行うと、変位電流の項はきれいさっぱりなくなってしまう。

以上はビオ・サバルの法則を使った計算であり、この計算には変位電流の出番はなかった。ビオ・サバルの法則に従って考えるかぎり、変位電流は磁場を作らないということになる。

では、アンペールの法則で考えるとどうなるか。たとえば z 軸から角度 θ 離れて、距離 r の方向での磁場を考えよう。電流の作る磁場は（対称性ももちろん考慮に入れて） z 軸を右ネジの向きにまわるようにできる。この磁場の強さを $H(r, \theta)$ とすると、アンペールの法則を使えば、

$$H(r, \theta) \times 2\pi r \sin \theta = \int_{\text{ループ内}} d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.12)$$

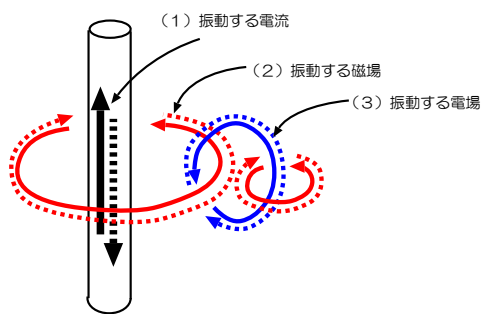
という計算になる（今考えているループ内には真電流はない）。この積分の結果は I よりは少なくなる（ $z=0$ を完全に覆うように積分すれば、ちょうど I に等しい）。無限に長い導線の場合と比較して、アンペールの法則を使う場合は「電束の一部しかループを通らない」という理由で磁場が弱くなり、ビオ・サバルの法則を使う場合は「電流が途中で終わっている」という理由で磁場が弱くなる。

詳しい計算は章末演習問題とするが、こうやって計算した磁場の値と、 $z=0$ より下にある電流のみを考えてビオ・サバルの法則を使って計算した磁場の値は、ちゃんと一致する。アンペールの法則においては変位電流がちゃんと寄与する。

【補足終わり】

6.2 電磁波

マクスウェル方程式で表される物理現象を組み合わせると、以下のようなしくみで電磁波が発生することがわかる。



(1) ある場所に振動する電流または電束密度が発生する（たとえば電波のアンテナなら周期的に変動する電流を流している）。

(2) 「電流」もしくは「電束密度の時間変化」は、周囲に渦をまくような磁場を伴う ($\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$)。

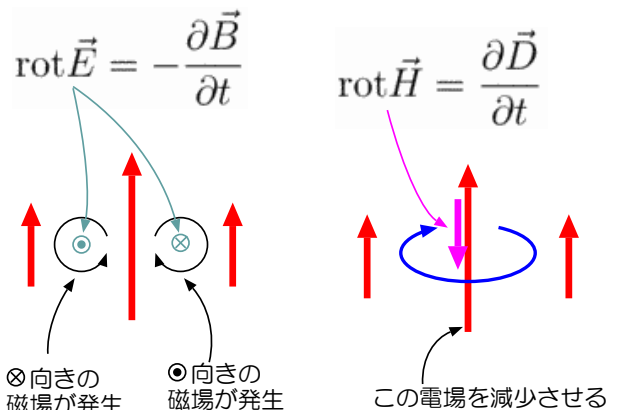
(3) 周囲の空間の磁場の時間変動には、さらにその周囲に渦をまくような電場を伴う ($\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$)。

以上がくりかえされることにより、空間の中を電場と磁場の振動が広がっていく。振動現象が出現するためには、その系に復元力と慣性が必要である。

電場と磁場にもこの二つがある。レンツの法則に代表されるように、外部から加えられた変化を妨げ、平衡状態に戻そうとする作用が電磁気の法則には含まれている。これはいわば「慣性」である。

電磁場の復元力もちゃんと電磁気の法則に含まれている。もし、空間に一部に強い電場、周りに弱い電場があるような状態があったとしよう（右図の左側）この空間では $\text{rot } \vec{E}$ が0ではないから、必然的に $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ にしたがって磁場が発生する。発生する磁場は $\text{rot } \vec{E}$ と逆を向くから、図にあるように、強い電場の周りに渦を巻くような磁場ができる。すると今度は $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ にしたがって¹³電場が発生するが、この電場は元々あった電場を弱める方向を向いている。

つまり、マクスウェル方程式の中には、一部分だけ電場が強い領域があったら、そこの電場を弱めようとするような性質が



¹²唯一対称点がないのは図の点線の上だが、この部分は外積が0になるからやはり奇手しない

¹³ここでは電流が存在しない場合を考えたので、 $\vec{j}$ の項はなし。

隠れている。マクスウェル方程式は空間的変動 ($\text{rot } \vec{E}$ など)

と時間的変動 ($-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ など) を結びつける式になっており、しかもその組み合わせによって空間的な変動を解消しようとする方向へ物理現象が進む (言わば「復元力が発生する」) のである。

電場と磁場が波となる可能性に気づいたのはファラデーであり、1846年にそのことを発表し「この波こそ光ではないのか」と述べている。しかし、その波が実際にどのような速度でどのように伝わるかを計算することはできなかった。マクスウェルは彼の方程式を使ってこの問題を解いたのである。

6.2.1 電磁波の方程式

電磁波の方程式を出す。目標は、真空中のマクスウェル方程式から、電場 $\vec{E}$ のみまたは磁束密度 $\vec{B}$ のみの式を作ることである。真空中で電荷・電流がない場合のマクスウェル方程式を書こう。

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.13)$$

真空中であるから、 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ と $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ を使って $\vec{D}$ と $\vec{H}$ は消去済みである。

ここで、 $\vec{E}$ のみ、もしくは $\vec{B}$ のみの式を作ろう。rot $\vec{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ という式が代入できるように、まず rot $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ の両辺の rot を取る。

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(\text{rot } \vec{E} \right) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot } \vec{B} \right) \\ &= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \text{grad} \left(\underbrace{\text{div } \vec{E}}_{=0} \right) - \Delta \vec{E} &= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ -\Delta \vec{E} &= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6.14)$$

という式が出る (rot (rot $\vec{A}$) = grad (div $\vec{A}$) - $\Delta \vec{A}$ という公式を使った)。

この式は $\left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = 0$ と書き直すことができ、これは3次元の波動方程式 $\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = 0$ で $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ と置いたものに等しい。つまり、電場は速さ $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ の波となって真空中を伝わる。磁束密度の方についても、

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(\text{rot } \vec{B} \right) &= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot } \vec{E} \right) \\ &= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \text{grad} \left(\underbrace{\text{div } \vec{B}}_{=0} \right) - \Delta \vec{B} &= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\ -\Delta \vec{B} &= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6.15)$$

となって、同じ速さで伝播する波となる。

この速さを計算してみると、

$$\frac{1}{\sqrt{8.854187817 \cdots \times 10^{-12} \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (6.16)$$

である¹⁴。これは光速である。つまり、マクスウェルは「電場と磁場が波になるだろうか？」と計算してみた結果、光が電場と磁場の波であることを見つけてしまったのである。

なお、ここではあくまで「波」としての電磁波を求めたが、波動になっていないような電磁場であっても、その変化が伝わるのは光速であること、つまり有限の速度でしか電磁場の変化は伝わらないことに注意しよう。

ここで、いわゆる平面波解を求めてみよう。簡単のため、 z 方向に進行する波を考える。光速度を c として、求めるべき電場と磁場はみな $z - ct$ の任意の関数 $f(z - ct)$ になっているとする。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) f(z - ct) &= \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(z - ct) \\ &= \frac{1}{c^2} \times c^2 f''(z - ct) - f''(z - ct) = 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

¹⁴ この光速度の数値 299792458 m/s というのは「定義値」であり、ここより先の桁はない (つまり整数である)。ちなみにこの数字は「肉 (29)、喰うな (97)。急に (92) 仕事や (458)」という語呂合わせで覚えられ。

となって、これは解である。よって、まず $\vec{E}(z-ct), \vec{B}(z-ct)$ という形の解であることがわかる。マックスウェル方程式にこの形を代入してみる。 $\text{div } \vec{E} = 0$ から

$$\text{div } \vec{E}(z-ct) = \frac{\partial}{\partial z} E_z(z-ct) = E'_z(z-ct) = 0 \quad (6.18)$$

であるから、この場合、電場の z 成分は定数でなくてはいけない。同様に、磁束密度の z 成分も定数である（この定数はいわば外部から一様な電場・磁場がかかっていることを意味する）。よって、「電磁波」として振動する部分は x, y 方向しかない。電磁波を構成する電場と磁場は進行方向に垂直な方向を向く（つまり、光が横波だということ）。

簡単のため、電場はみな x 方向を向いているとしよう ($E_y = 0$)。 $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$ に代入してみると、

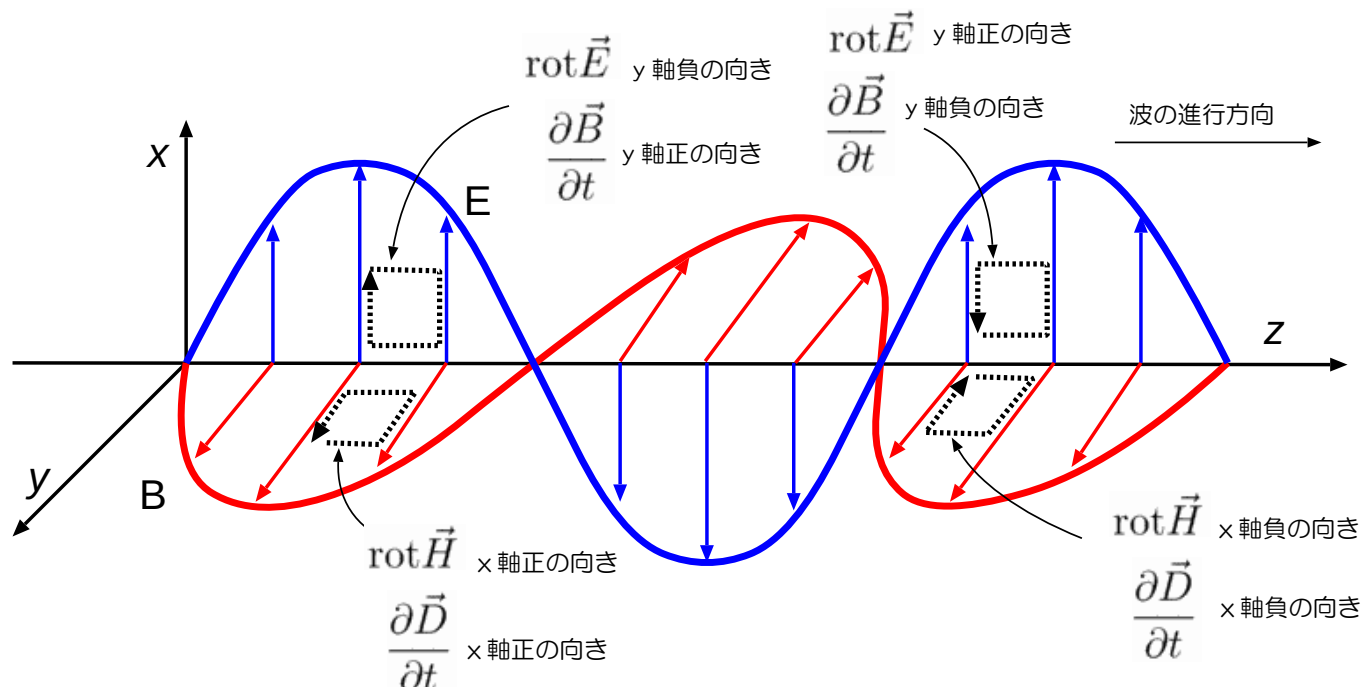
$$\begin{aligned} x \text{ 成分} \quad & \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y = -\frac{\partial}{\partial t} B_x \\ & 0 = -\frac{\partial}{\partial t} B_x \\ y \text{ 成分} \quad & \frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z = -\frac{\partial}{\partial t} B_y \\ & E'_x(z-ct) = -\frac{\partial}{\partial t} B_y \\ z \text{ 成分} \quad & \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x = -\frac{\partial}{\partial t} B_z \\ & 0 = -\frac{\partial}{\partial t} B_z \end{aligned} \quad (6.19)$$

となって、 B_x, B_z は定数でなくてはいけない。ここでは電磁波に興味があるので、その定数を 0 としよう。 $B_y(z-ct)$ とすると、 $E'_x(z-ct) = cB_y(z-ct)$ となる。つまり、磁束密度は進行方向 (z 方向) とともに、電場の方向 (x 方向) と垂直な方向 (y 方向) を向き、大きさは電場の $\frac{1}{c}$ である。まとめると、

$$\vec{E} = (E_x(z-ct), 0, 0), \quad \vec{B} = (0, \frac{1}{c}E_x(z-ct), 0) \quad (6.20)$$

となる。この解は $\text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$ も満たしている。

以上から、電磁波を構成する電場・磁場は進行方向と垂直で、かつ電場と磁場も互いに垂直であることがわかった。



電磁波の進行の様子は上の図の通りである。各場所各場所でマックスウェル方程式が成立するように電磁場の時間変化が起こっていることに注目しよう。

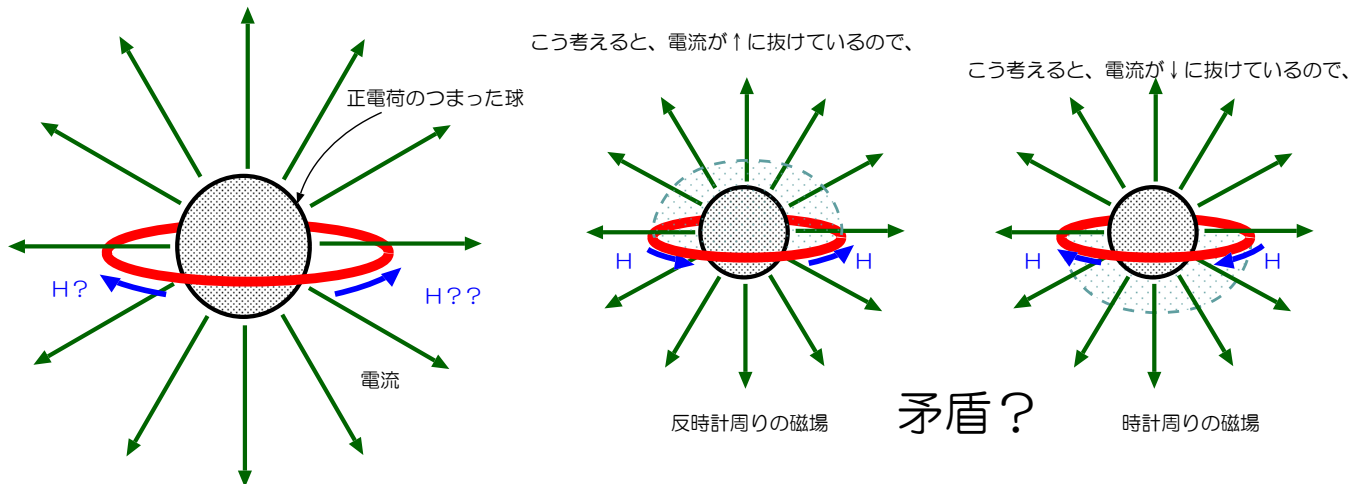
なお、ファラデーが電磁波を予言したのは 1846 年（この時、光が電磁波である可能性も述べている）、マックスウェル方程式が完成したのは 1865 年、ヘルツが電磁波を発見するのはそれから 23 年たった 1888 年である。1901 年にはマルコーニが無線通信に成功する。現代においても、ラジオ、テレビ、携帯電話と、電磁波は有効に活用されているが、着想から定式化、実験的発見、実用化までに半世紀以上がかかったことになる。

6.3 章末演習問題

★【演習問題 6-1】 6.1.1 節で考えた、 $z = -\infty$ から $z = 0$ までの直線電流の作る磁場を、ビオ・サバールの法則を使って求め、変位電流を取り入れたアンペールの法則を使って求めたものと比較せよ。

★【演習問題 6-2】 図のように、原点にから放射状に四方八方に球対称に電流が流れ出しているという状況を考えよう（原点には巨大な正電荷の塊があり、そこからあらゆる方向に電荷が放出されていると考えればよい）。

全部で I の電流が流れているものとする、原点から距離 r の場所の電流密度は $\frac{I}{4\pi r^2}$ である。この時赤道にあたる経路で積分してアンペールの法則を適用すると、電流のうち半分が北半球を抜けていくので、赤道を東向きに一周すると、 $2\pi r H = \frac{I}{2}$ という式が成立することになる。



ところが、全く同じことを南極側に抜ける電流に関して考えると、電流の向きが逆を向いているのだから、逆向きの磁場（西向き）ができていくことになる。

どちらが正しいかというと、どちらも正しくない。正しい答は $H = 0$ である。今状況は球対称なのだから、東向きの磁場ができて、西向きの磁場ができてもおかしいことになるので、 $H = 0$ は実にもっともな解である。しかしアンペールの法則を使うと 0 にはならない。ではなぜ実際には 0 になるのだろうか??—以上の話はどこを間違えているのだろうか??

★【演習問題 6-3】 電磁波によって荷電粒子が跳ね飛ばされるという現象がある（量子力学的な現象になることもあるが、ここでは量子力学は考えないことにしよう）。A 君は以下のように考えた。

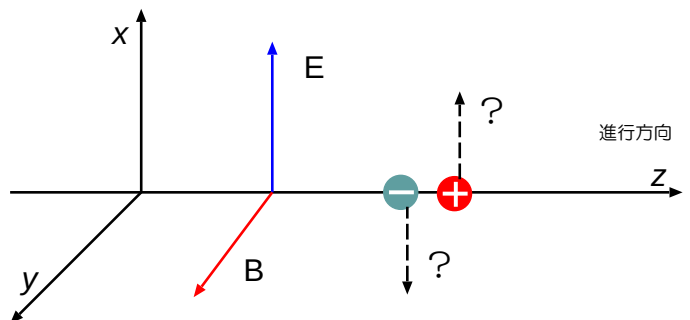
「電子は電磁波によって跳ね飛ばされるらしい。電子はマイナスの電荷を持っている。ということはプラスの電荷を持っている粒子は、電磁波がくるとむしろ電磁波のやって来た方向に近づくのだろうか?」

疑問を持った A 君は電磁波が進行して正電荷や負電荷に当たるところの図を書いてみた。そしてさらに疑問を持った。

「電子が静止していると考え、働く力は電場によるものはず。だが電場は進行方向と垂直だ。ということは電子が跳ね飛ばされる方向は、進行方向と垂直なのだろうか?」

実際には、正電荷であろうが負電荷であろうが、飛ばされる方向は電磁波の進行方向である。そのことを図解して示せ。

なお、このことは電磁波が進行方向向きの運動量を持っていることを示している。



索引

E-B 対応, 6

E-H 対応, 6

アンペールの法則, 11

オーロラ, 33

強磁性体, 43

ゲージ変換（ベクトルポテンシャルの）, 38

サイクロトロン, 32

磁界 → 磁場, 2

磁性, 43

磁束, 57

磁束密度, 6

磁場, 2

常磁性体, 43

電磁波, 75

電磁誘導, 57

電束, 73

反磁性, 44

反磁性体, 43

ビオ・サバールの法則, 15

ファラデーの法則, 57

変位電流, 73

ベータトロン, 69

ベクトルポテンシャル, 35

ホール効果, 34

マックスウェル方程式, 73

誘導電流, 57

レンツの法則, 59

ローレンツ力, 32